

## Rauschreduzierung in SONAR-Lagebildern

Karoline Gussow<sup>1</sup>, Daniel Wagner<sup>1</sup>, Marco Driesen<sup>1</sup>, Christian Kanarski<sup>1</sup>, Finn Röhrdanz<sup>1</sup>, Konstantinos Karatziotis<sup>1</sup>, Lukas Schirmer<sup>1</sup>, Ralf Burgardt<sup>1</sup>, Viktoriia Boichenko<sup>1</sup>, Gerhard Schmidt<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel,*

*Email: {kars, dawa, madr, chk, finr, koka, lusc, rabu, vib, gus}@tf.uni-kiel.de*

### Kurzfassung

Die Detektion von Zielen in SONAR-Lagebildern stellt eine Herausforderung dar, da die Signale häufig durch verschiedene Rauschkomponenten und Artefakte überlagert werden. Dabei handelt es sich einerseits um das Hintergrundrauschen der Unterwasserumgebung und andererseits um Artefakte, die im Zuge der Signalverarbeitung generiert werden. Insbesondere die Nebenkeulen des Beamformers führen dazu, dass in der Umgebung eines tatsächlichen Ziels zusätzliche, scheinbare Ziele auftreten. Ähnliche Effekte werden durch Leistungsspitzen verursacht, die aus der Korrelation zwischen Send- und Empfangssignal resultieren. Zur Verbesserung der Detektionsgenauigkeit kann daher versucht werden, diese Rauschanteile zu reduzieren, um die relevanten Zielsignale deutlicher hervorzuheben. Hierzu wurden zwei Ansätze untersucht: Zum einen wurde ein zweidimensionales Wiener-Filter eingesetzt, das die bekannten Anteile des Beamformers und der Korrelation auf statistische Weise für eine Lagebildverbesserung nutzt, sodass die Zielsignale besser isoliert werden. Zum anderen wurde ein Ansatz auf Basis künstlicher Intelligenz entwickelt, der denselben Zweck verfolgt. Beide Methoden wurden in ein Echtzeit-Rahmenwerk integriert und hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit miteinander verglichen. Die Ergebnisse zeigen das Potenzial beider Ansätze zur Verbesserung der Zielerkennung in komplexen akustischen Umgebungen. Die in diesem Beitrag vorgestellten Ergebnisse basieren auf der Masterarbeit von Daniel Wagner [1].

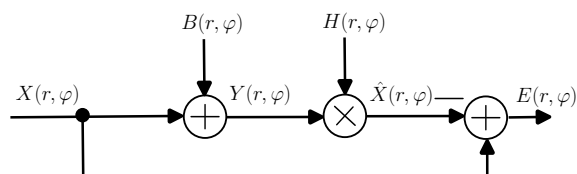
### Wiener-Filter

Bei der ersten Methode handelt es sich um ein klassisches Wiener-Filter. Dieses wird dafür verwendet, das Hintergrundrauschen sowie die Artefakte zu reduzieren, die durch die Signalverarbeitung um die Ziele herum entstehen. Das Wiener-Filter minimiert den mittleren quadratischen Fehler  $\mathbf{E} = [E(r, \varphi)]$  zwischen dem geschätzten Lagebild  $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{X}(r, \varphi)]$  und dem wahren Lagebild  $\mathbf{X} = [X(r, \varphi)]$  [2]:

$$\mathbf{E}\left\{|E(r, \varphi)|^2\right\} = \mathbf{E}\left\{|\hat{X}(r, \varphi) - X(r, \varphi)|^2\right\} \rightarrow \min. \quad (1)$$

Da das wahre Lagebild  $\mathbf{X}$  nicht direkt zugänglich ist, steht nur das mit Rauschen  $\mathbf{B} = [B(r, \varphi)]$  überlagerte Lagebild  $\mathbf{Y} = Y(r, \varphi)$  zur Verfügung. Das zugehörige Blockschaltbild ist in Abbildung 1 zu sehen. Die Übertragungsfunktion  $H_{\text{opt}}(r, \varphi)$  des Wiener-Filters kann mit der folgenden Formel berechnet werden [2]:

$$H_{\text{opt}}(r, \varphi) = 1 - \frac{K_{\text{over}} \hat{S}_{bb}(r, \varphi)}{\hat{S}_{yy}(r, \varphi)}. \quad (2)$$



**Abbildung 1:** Blockschaltbild des Wiener-Filters in Anlehnung an [2].

Dabei ist  $K_{\text{over}}$  der Überschätzungsfaktor,  $\hat{S}_{bb} = [\hat{S}_{bb}(r, \varphi)]$  das Autoleistungsdichtespektrum von  $\mathbf{B}$  und  $\hat{S}_{yy} = [\hat{S}_{yy}(r, \varphi)]$  das Autoleistungsdichtespektrum von  $\mathbf{Y}$ . Das Filter lässt also die Nutzsignalanteile passieren und dämpft die Rauschanteile. Angewendet auf das mit Rauschen überlagerte Lagebild  $\mathbf{Y}$  ergibt sich das rauschreduzierte Lagebild  $\hat{\mathbf{X}}$ :

$$\hat{X}(r, \varphi) = Y(r, \varphi) \cdot H_{\text{opt}}(r, \varphi). \quad (3)$$

Da das Rauschen  $\mathbf{B}$  unbekannt ist, muss dieses geschätzt werden. Dabei wird zwischen dem Hintergrundrauschen und den durch die Signalverarbeitung verursachten Artefakten unterschieden. Das Hintergrundrauschen kann mit Hilfe von drei verschiedenen Methoden geschätzt werden. Bei der ersten Methode wird ein konstanter Grenzwert festgelegt und alle Signalanteile unterhalb dieses Grenzwertes werden als Rauschen angenommen. Um den Leistungsverlust des Schalls bei der Ausbreitung Unterwasser zu berücksichtigen, werden die Lagebilder häufig mit  $r^2$  skaliert, um die Ziele, die weiter entfernt liegen, besser identifizieren zu können.  $r$  ist dabei die Entfernung vom Ziel zum SONAR-System. Allerdings wird dabei auch das Hintergrundrauschen um diesen Faktor skaliert. Dies wird bei der zweiten Methode berücksichtigt. Die dritte Methode ist eine automatische Schätzung. Hierbei wird das Rauschen mit den Hydrophonen aufgenommen, während kein Signal ausgesendet wird und daraus das Hintergrundrauschen geschätzt.

Die Artefakte, die durch die Signalverarbeitung verursacht werden, sind die Nebenkeulen des Beamformers und die der Korrelation aus dem Send- und Empfangssignal. Um diese Komponenten an der richtigen Stelle zu entfernen, ist es notwendig, die Position der Ziele zu identifizieren. Dafür wird eine iterative Maximumsuche durchgeführt. Für das gefundene Maximum werden der Winkel  $\varphi$  und die Entfernung  $r$  bestimmt und damit das Beampattern berechnet. Anschließend wird dieses auf einen Wert leicht über dem Maximum angehoben, um Unsicherheiten auszugleichen. Außerdem wird Maximum-Pooling angewendet, da sich aufgrund der diskreten Winkelauflösung das Maximum zwischen

zwei Winkeln befinden kann. Somit wird das Beampattern verbreitert und kann auch angewendet werden, wenn der Winkel nicht exakt bestimmt wurde. Anschließend wird die Autokorrelation des Sendesignals berechnet, um die Effekte, die durch die signalangepasste Filterung entstehen, schätzen und entfernen zu können. Dies ist möglich, da das Empfangssignal das zeitlich verzögerte, mit Rauschen überlagerte Sendesignal ist. Auch hier findet Maximum-Pooling statt, um aufgrund der hohen Abtastrate von 192 kHz, die in diesem Setup verwendet wird, die Auflösung des Lagebilds in Distanzrichtung zu reduzieren. Um den Ausbreitungsverlust des Schalls auch hier zu berücksichtigen, wird mit  $r^2$  skaliert.

Nachdem diese beiden Rauschkomponenten bestimmt wurden, sollen diese in die Rauschmatrix integriert werden, in der bisher das geschätzte Hintergrundrauschen enthalten ist. Um eine Überschätzung zu vermeiden, welche bei einer Addition der Rauschkomponenten entstehen könnte, wird ein Maximum-Operator eingefügt, sodass nur der höchste Rauschwert von Hintergrundrauschen, Beampattern oder Korrelation in die Rauschmatrix eingetragen wird. Dies resultiert in einem Filter, das jedoch auch das gewünschte Leistungmaximum des Ziels entfernt. Um dieses am Ende wieder hinzuzufügen, wird die gefundene Zielposition in einer binären Zielmatrix gespeichert, in der alle Zielregionen mit Null und alle anderen Regionen mit Eins gewichtet werden. Anschließend wird das Wiener-Filter auf das Lagebild angewendet. Diese Verarbeitung wird solange wiederholt, bis eine festgelegte Anzahl an Iterationen erreicht wurde oder das gefundene Maximum kleiner als ein festgelegter Grenzwert ist. Im Anschluss wird die Zielmatrix elementweise mit der Rauschmatrix multipliziert, sodass alle Zielregionen in der Rauschmatrix auf Null gesetzt werden. Dadurch bleiben diese bei der finalen Filterung mit dem Lagebild erhalten:

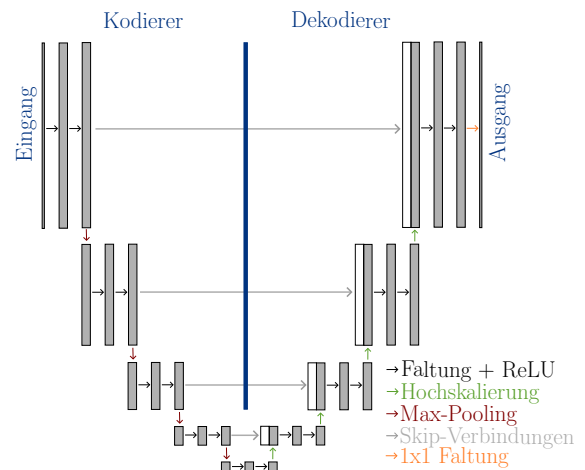
$$H(r, \varphi) = \min\left(1, \max\left(v_{\min}, 1 - \frac{K_{\text{over}} \hat{S}_{bb}(r, \varphi)}{\hat{S}_{yy}(r, \varphi)}\right)\right). \quad (4)$$

Dabei ist die Filterung auf Eins begrenzt, um eine unerwünschte Verstärkung zu vermeiden. Mit dem Wert  $v_{\min}$  kann der gewünschte Grad der Rauschunterdrückung eingestellt werden kann.

## U-Net

Da das Wiener-Filter auf einem linearen Signalmodell basiert und primär der Rauschreduktion dient, sind seine Möglichkeiten zur Rekonstruktion zusammenhängender Strukturen begrenzt. Daher wurde als zweiter Ansatz ein neuronales Netzwerk – konkret ein U-Net – untersucht. Als Eingang wird das Lagebild verwendet. Der Ausgang des Netzwerks ist eine binäre Maske, welche das Lagebild in Signalbereiche und Rauschbereiche einteilt. Der Hauptvorteil dabei ist, dass das Netzwerk keine zusätzlichen Signalanteile hinzufügen kann. Außerdem kann eine Vorverarbeitung der Maske stattfinden, bevor diese auf das Lagebild angewendet wird, sodass unter anderem die Stärke der Rauschreduzierung beeinflusst werden kann. Da es sich bei der Erstellung einer binären Maske um keine komplexe Aufgabe handelt, wird eine einfache

U-Net-Struktur verwendet. Diese ist in Abbildung 2 exemplarisch abgebildet.



**Abbildung 2:** Struktur eines einfachen U-Nets in Anlehnung an [1].

Das U-Net besteht aus einem Kodierer und einem Dekodierer. Im Kodierer wird die Auflösung der Schichten immer weiter reduziert und gleichzeitig die Anzahl der Merkmalskanäle erhöht. Eine Schicht im Kodierer besteht aus zwei Faltungsschichten, gefolgt von einer Batch-Normalisierung, einer ReLU-Aktivierungsfunktion und einer Max-Pooling-Schicht, welche die Dimensionen reduziert und mit der folgenden Kodierer-Schicht verknüpft. Diese Struktur wiederholt sich, bis die Bottleneck-Schicht erreicht wird. Diese besteht auch aus zwei Faltungsschichten, einer Batch-Normalisierung und einer ReLU-Aktivierungsfunktion. Die Bottleneck-Schicht sowie die letzte Kodierer-Schicht verfügen zudem über eine Dropout-Schicht, um ein stabiles Training zu ermöglichen und das Risiko der Überanpassung zu reduzieren. Durch den Dekodierer wird die ursprüngliche Auflösung wieder hergestellt. Seine Struktur ist umgekehrt zu der des Kodierers. Eine Dekodierer-Schicht nimmt zunächst eine Hochskalierung vor und verknüpft diese anschließend mit den entsprechenden Kodierer-Merkmalen über die Skip-Verbindungen. Danach folgen zwei Faltungsschichten mit Batch-Normalisierung und ReLU-Aktivierungsfunktion. Diese Struktur wird wiederholt bis die letzte Schicht erreicht ist. Als letzter Schritt wird eine 1x1-Faltung mit einer Sigmoid-Aktivierung durchgeführt, um die Ausgabe zu erzeugen. Der Ausgang des U-Nets ist eine Maske, welche anschließend in ein binäres Format überführt wird. Dabei werden die Signalbereiche mit einer Eins und die Rauschbereiche mit einer Null markiert. Die Maske wird elementweise mit dem originalen Lagebild multipliziert, sodass das Rauschen unterdrückt und die Signalanteile beibehalten werden.

Für das Training des U-Nets ist eine möglichst große Anzahl unterschiedlicher Trainingsdaten erforderlich. Diese werden mit Hilfe einer Simulation im Echtzeitrahmenwerk KiRAT (Kiel Real-time Application Toolkit) generiert. In dieser können verschiedene Ziele (Punktziele und Wände) positioniert werden. Die genauen Positionen können anschließend extrahiert und für die spätere Evaluierung in entsprechende Masken umgewandelt wer-

den. Zusätzlich wird Hintergrundrauschen erzeugt, das aus Schiffs-, Wind-, Turbulenz- und thermischen Rauschen besteht. Es wird ein monostatisches Single-Input-Multiple-Output-SONAR-System simuliert. Zur Erzeugung der Lagebilder werden unter anderem Empfangsbeamforming und eine signalangepasste Filterung durchgeführt. Ein Lagebild enthält dabei bis zu zwei Wände und bis zu zehn Ziele, die jeweils zufällig positioniert werden. Ein Beispiel ist in Abbildung 3(a) zu sehen. Insgesamt wurden 39.600 Datensätze, bestehend aus einem Lagebild und einer zugehörigen Maske, erzeugt. Diese Daten wurden in ein Trainings-, ein Test- und ein Validierungsset aufgeteilt. Das Training erfolgt mit der Focal-Tversky-Verlustfunktion, da diese besonders für Daten mit kleinen Strukturen geeignet ist [3]. Um die Verlustfunktion zu minimieren, werden die Netzwerkparameter mit Hilfe des Adam-Optimierers aktualisiert, der auf Basis der beobachteten Trainingsgradienten arbeitet und so eine stabile Konvergenz ermöglicht [4]. Zudem wurde eine Hyperparametertuning durchgeführt, um die Trainingsleistung und Segmentierungsgenauigkeit zu optimieren. Dabei wurden sowohl Architektur-Hyperparameter (Netzwerktiefe, Faltungsgröße, Anzahl der Filter) als auch Verlustfunktions-Parameter betrachtet. Damit das Netzwerk auch in Echtzeit funktioniert, wurde das Modell „eingefroren“, sodass ein statischer Graph entsteht. Dafür werden die Variablen im Modell in Konstanten umgewandelt und nicht benötigte Variablen entfernt, wodurch weiteres Training ausgeschlossen ist und die Verarbeitung beschleunigt wird.

## Evaluierung

Die Evaluierung wird mit Hilfe der Simulationsumgebung in KiRAT durchgeführt. Dabei wird eine zufällige Anzahl an Zielen und Wänden generiert. Um die Vergleichbarkeit zwischen den beiden Methoden zu bewahren, wird ein Seed gesetzt, damit bei verschiedenen Durchläufen die Position und Anzahl der Ziele und Wände gleich bleibt. Zur Evaluierung wird neben dem Lagebild eine Maske mit den tatsächlichen Zielpositionen generiert. Mit Hilfe der Lagebilder lässt sich die Stärke der Rauschunterdrückung ermitteln und feststellen, ob nur Rauschen oder auch Signalkomponenten durch die beiden Methoden unterdrückt werden. Dies allein ist jedoch kein fairer Vergleich, da das U-Net lediglich eine Maske ausgibt, während das Wiener-Filter das Rauschen schätzt. Die Leistung des Wiener-Filters hängt also nicht nur davon ab, wie gut das Rauschen rekonstruiert werden kann, sondern auch davon, wie genau die Signalregionen identifiziert werden können. Das U-Net identifiziert hingegen nur die Signalregionen. Daher werden die vom U-Net und Wiener-Filter erzeugten Masken zudem mit der Maske der tatsächlichen Zielpositionen verglichen. Damit das möglich ist, wird die Maske des Wiener-Filters vorher invertiert, da die Signalregionen mit Nullen und die Rauschregionen mit Einsen markiert wurden. Die Evaluierung erfolgt mit verschiedenen Hintergrundrauschlevels von  $-70$  dB bis  $-80$  dB. Um möglichst genaue Ergebnisse zu erhalten, wird die Evaluierung für 100 Lagebilder pro Rauschlevel durchgeführt. Im Folgenden werden die Durchschnittswerte betrachtet.

Zunächst wird das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) der gefilterten im Vergleich zu den originalen Lagebildern betrachtet. Dazu wird die Signalleistung an den wahren Zielpositionen berechnet. Die restliche Leistung wird als Rauschleistung angenommen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt.

**Tabelle 1:** Durchschnittliches SNR mit Standardabweichung bei verschiedenen Rauschlevels.

Rauschen	Ungefiltert	U-Net	Wiener-Filter
$-70$ dB	$3,4 \pm 1,2$ dB	$17,9 \pm 2,4$ dB	$15,5 \pm 2,9$ dB
$-74$ dB	$7,6 \pm 1,3$ dB	$17,7 \pm 2,0$ dB	$17,0 \pm 2,3$ dB
$-76$ dB	$10,1 \pm 1,5$ dB	$17,4 \pm 2,0$ dB	$17,3 \pm 2,2$ dB
$-80$ dB	$19,0 \pm 2,0$ dB	$31,2 \pm 2,1$ dB	$35,9 \pm 2,8$ dB

Es ist zu erkennen, dass das SNR umso höher ist, je niedriger das Rauschlevel ist. Zudem kann das SNR mit Hilfe beider Methoden deutlich verbessert werden. Bei höheren Rauschlevels wurden mit dem U-Net bessere Ergebnisse erzielt, bei niedrigeren Rauschlevels mit dem Wiener-Filter. Die größeren Standardabweichungen beim Wiener-Filter lassen sich damit erklären, dass der Ansatz zu zahlreichen Einschnitten in den ansonsten durchgehenden Wänden führt. Dies ist beispielhaft in Abbildung 3 zu erkennen.

Um genauere Informationen über die Leistung der beiden Methoden zu erhalten, wird die Dämpfung der Signal- und Rauschregionen separat betrachtet. Die Festlegung dieser Bereiche wird wieder über die Maske mit den wahren Zielpositionen vorgenommen. Die Dämpfung wird berechnet, indem die Leistung der Signal- bzw. Rauschbereiche der gefilterten Lagebilder mit dem ungefilterten verglichen werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 und 3 dargestellt.

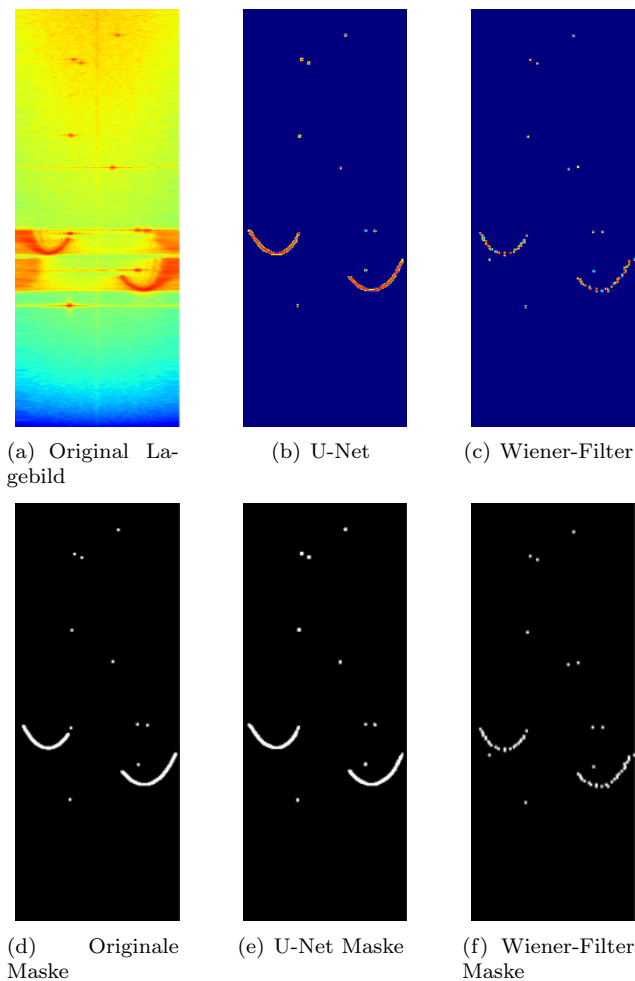
**Tabelle 2:** Durchschnittliche Dämpfung der Rauschregionen mit Standardabweichung bei verschiedenen Rauschlevels.

Rauschen	U-Net	Wiener-Filter
$-70$ dB	$18,5 \pm 1,5$ dB	$18,7 \pm 1,2$ dB
$-74$ dB	$10,8 \pm 1,1$ dB	$11,5 \pm 1,0$ dB
$-76$ dB	$8,0 \pm 1,0$ dB	$8,6 \pm 0,9$ dB
$-80$ dB	$12,7 \pm 1,8$ dB	$17,7 \pm 2,5$ dB

**Tabelle 3:** Durchschnittliche Dämpfung der Signalregionen mit Standardabweichung bei verschiedenen Rauschlevels.

Rauschen	U-Net	Wiener-Filter
$-70$ dB	$82,8 \pm 9,1$ dB	$12,2 \pm 4,8$ dB
$-74$ dB	$1,1 \pm 0,9$ dB	$3,1 \pm 1,8$ dB
$-76$ dB	$0,9 \pm 0,7$ dB	$2,2 \pm 2,1$ dB
$-80$ dB	$0,1 \pm 0,2$ dB	$0,6 \pm 0,4$ dB

Wie Tabelle 2 zeigt, dämpfen beide Methode die Rauschregionen in einem ähnlichen Maß, wobei das Wiener-Filter ein wenig mehr dämpft. Allerdings unterdrückt das



**Abbildung 3:** Ungefilterte und gefilterte SONAR-Lagebilder mit zugehörigen Masken [1].

Wiener-Filter auch mehr der gewünschten Signalanteile, vor allem bei stärkerem Hintergrundrauschen, wie Tabelle 3 zeigt. Der auffällig hohe Wert des U-Nets bei  $-70$  dB lässt sich dadurch erklären, dass das U-Net kleine Wände bei hoher Hintergrundrauschleistung und Entfernung  $r$  nicht erkennt. Dadurch werden diese Wände komplett unterdrückt.

Als letztes Evaluierungsmaß wird der Dice-Koeffizient verwendet. Dieser ist eine statistische Kennzahl, die häufig bei Segmentierungsaufgaben verwendet wird, um die Ähnlichkeit zwischen zwei Mengen zu bewerten [5]. In diesem Fall drückt er aus, inwieweit die generierten Masken mit der wahren Maske übereinstimmen. Eins bedeutet vollständige Übereinstimmung, während Null keine Übereinstimmung angibt. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 4 aufgeführt. Es ist zu erkennen, dass bei niedrigem Rauschlevel mit beiden Methoden die Signalregionen größtenteils identifiziert werden können. Je höher das Rauschen wird, desto weniger gut gelingt dies bei beiden Ansätzen. Dies ist beim Wiener-Filter noch stärker ausgeprägt. Beim U-Net bleibt der Dice-Koeffizient auf einem ähnlichen Niveau.

Insgesamt kann das Wiener-Filter bei niedrigerem Hintergrundrauschen die durch die Signalverarbeitung verursachten Artefakte gut schätzen und dämpfen. Bei zusam-

**Tabelle 4:** Durchschnittlicher Dice-Koeffizient mit Standardabweichung bei verschiedenen Rauschlevels.

Rauschen	U-Net	Wiener-Filter
$-70$ dB	$0,46 \pm 0,20$	$0,26 \pm 0,16$
$-74$ dB	$0,60 \pm 0,17$	$0,45 \pm 0,16$
$-76$ dB	$0,61 \pm 0,17$	$0,52 \pm 0,17$
$-80$ dB	$0,94 \pm 0,03$	$0,86 \pm 0,07$

menhängenden Zielen gibt es jedoch Schwierigkeiten, da auch gewünschte Signalkomponenten unterdrückt werden. Das U-Net erfüllt diese Aufgabe ebenfalls und kann vor allem bei höheren Rauschlevels gute Ergebnisse erzielen. Zudem werden die Wände nahezu durchgehend segmentiert. Das Wiener-Filter ist außerdem flexibel einsetzbar, da seine Parameter vergleichsweise einfach an neue Umgebungsbedingungen angepasst werden können, während ein U-Net hierfür in der Regel erneut trainiert werden muss.

### Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden zwei Methoden – ein Wiener-Filter und ein U-Net – zur Rauschreduzierung in SONAR-Lagebildern vorgestellt. Diese verringern sowohl das Hintergrundrauschen als auch die durch die Signalverarbeitung induzierten Artefakte. Es wurde gezeigt, dass beide Methoden das Ziel erfüllen und dazu beitragen können, Ziele besser zu identifizieren. Zudem wurden die jeweiligen Vor- und Nachteile der Methoden erläutert.

Zukünftig könnten beide Methoden weiter verbessert werden. Beim Wiener-Filter könnten die Berechnung des Beampatterns und der Autokorrelation so kombiniert werden, dass mehr Signalleistung an der Position des Ziels erhalten bleibt. Das U-Net könnte verbessert werden, indem der Trainingsdatensatz um Volumenziele und mehr kleine Wände erweitert wird, um diese besser detektieren zu können. Außerdem könnte eine Kombination beider Methoden vielversprechend sein. So könnte das U-Net die Zielpositionen identifizieren, während das Hintergrundrauschen und die Artefakte um diese Ziele per Wiener-Filter-Ansatz geschätzt und reduziert werden.

### Literatur

- [1] D. Wagner: Improving the Detection Reliability of SONAR Systems with Artificial Intelligence, Masterarbeit, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2025
- [2] E. Hänsler, G. Schmidt: Acoustic Echo and Noise Control: A Practical Approach, John Wiley & Sons, Ltd, 2004
- [3] N. Abraham, N. Khan: A Novel Focal Tversky Loss Function with Improved Attention U-Net for Lesion Segmentation, Toronto Metropolitan University, 2023, DOI: 10.32920/22734398.v1
- [4] D. P. Kingma, J. Ba: Adam: A Method for Stochastic Optimization, 2017, DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980
- [5] L. R. Dice: Measures of the Amount of Ecologic Association Between Species, Ecology, Vol. 26, No. 3, pp. 297–302, 1945, DOI: 10.2307/1932409