# Signale und Systeme I

## Modulklausur SS 2021

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 21.09.2021

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

### Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ____________________

### Korrektur

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Punkte | /33 | /33 | /34 |

Summe der Punkte: __________ /100

### Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den __________ Unterschrift: ____________________

# Signale und Systeme I

## Modulklausur SS 2021

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Ort: | CAP2 - Frederik-Paulsen-Hörsaal |
| Datum: | 21.09.2021 |
| Beginn: | 08:00 h |
| Einlesezeit: | 10 Minuten |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten |

## Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist ausschließlich das Durchblättern der aktuellen Klausur erlaubt**, darüber hinaus sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

## Aufgabe 1 (33 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $v(t)$, dessen Fourier-Reihenkoeffizienten im Folgenden bestimmt werden sollen. Es gilt mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$v(t) = \frac{3}{4}\cos(2\omega_0 T) + 3\cos(3\omega_0 t)\sin(2\omega_0 t) + e^{-j3\omega_0 t}\Big(1 + e^{j6\omega_0 t}\Big) - 2\Big(1 + \cos(5\omega_0 t)\Big)$$

*(a)* Bringen Sie $v(t)$ zunächst in eine Form, die für den Koeffizientenvergleich mit der trigonometrischen Fourier-Reihe geeignet ist! (8 P)

Umformen des Cosinusterms in eine Konstante mithilfe der $2\pi$-Periodizität:

$$\frac{3}{4}\cos(2\omega_0 T) = \frac{3}{4}\cos(2\cdot 2\pi f_0 T) = \frac{3}{4}\cos(4\pi) = \frac{3}{4}.$$

Umformen der Exponentialterme in einen Cosinusterm gemäß der Eulerschen Formel $\cos(x) = \frac{1}{2}\Big(e^{jx} + e^{-jx}\Big)$:

$$e^{-j3\omega_0 t}\Big(1 + e^{j6\omega_0 t}\Big) = e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t} = 2\cos\left(3\omega_0 t\right).$$

Umformen des Produktterms in zwei separate Sinusterme mit Additionstheorem $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big[\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big]$:

$$3\cos(3\omega_0 t)\sin(2\omega_0 t) = \frac{3}{2}\Big[\sin(-\omega_0 t) + \sin(5\omega_0 t)\Big] = \frac{3}{2}\Big[-\sin(\omega_0 t) + \sin(5\omega_0 t)\Big].$$

Zusammenfassen:

$$v(t) = -\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\sin(\omega_0 t) + 2\cos(3\omega_0 t) - 2\cos(5\omega_0 t) + \frac{3}{2}\sin(5\omega_0 t)$$

*(b)* Erwarten Sie gerade und/oder ungerade Fourier-Reihenkoeffizienten? Begründen Sie mit der Symmetrie des Signals! (2 P)

Das Signal $v(t)$ weist sowohl punktsymmetrische Anteile (Sinus) als auch achsensymmetrische Anteile (Cosinus) auf. Es sind daher ungerade und gerade Fourier-Reihenkoeffizienten zu erwarten.

*(c)* Enthält das Signal $v(t)$ einen Gleichanteil? Geben Sie diesen gegebenenfalls an! (1 P)

Es liegt ein Gleichanteil $c_0 = -\frac{5}{4}$ vor.

*(d)* Geben Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten für das Signal $v(t)$ an! (3 P)

Aus dem Koeffizientenvergleich mit dem in (a) vereinfachten Signal ergibt sich:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = -\frac{5}{4}, \qquad a_\mu = \begin{cases} 2, & \mu = 3, \\ -2, & \mu = 5, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad b_\mu = \begin{cases} -\frac{3}{2}, & \mu = 1, \\ \frac{3}{2}, & \mu = 5, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

*(e)* Geben Sie in allgemeiner Form an, wie die komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten aus den trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten berechnet werden können! (2 P)

Der Zusammenhang zwischen den komplexen und den trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten ist definiert als:

$$c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - jb_\mu), \quad c_{-\mu} = c_\mu^*.$$

*(f)* Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten $c_\mu$ des Signals $v(t)$! (4 P)

Bei Anwendung der Formel aus (e) ergibt sich:

$$c_\mu = \begin{cases} -1 + j\frac{3}{4}, & \mu = -5, \\ 1, & \mu = -3, \\ -j\frac{3}{4}, & \mu = -1, \\ -\frac{5}{4}, & \mu = 0, \\ j\frac{3}{4}, & \mu = 1, \\ 1, & \mu = 3, \\ -1 - j\frac{3}{4}, & \mu = 5, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei das Signal $u(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und der Fourier-Transformierten $U(j\omega)$:

$$u(t) = \cos(3\omega_0 t) - 2\sin(5\omega_0 t)$$

*(g)* Erklären Sie den Begriff hermite-symmetrisch! Was folgt daraus konkret für die Signale $u(t)$ und $U(j\omega)$? (5 P)

Die Beziehung zwischen geraden und ungeraden (reellen und imaginären) Anteilen in Zeitsignal und Spektrum ist hermite-symmetrisch:

$$u(t) = u_{re,ge}(t) + u_{re,un}(t) + ju_{im,ge}(t) + ju_{im,un}(t)$$

$$U(j\omega) = U_{re,ge}(j\omega) + U_{re,un}(j\omega) + jU_{im,ge}(j\omega) + jU_{im,un}(j\omega)$$

Das Zeitsignal $u(t)$ enthält reelle gerade und ungerade Anteile, daher ergeben sich für das Spektrum reelle gerade und imaginäre ungerade Anteile.

*(h)* Wann kommt es zu einer Verletzung des Abtasttheorems? Was folgt daraus konkret für das Signal $u(t)$? (4 P)

Die Abtastfrequenz $\omega_a$ muss mindestens zweimal so groß sein wie die höchste vorkommende Frequenzkomponente $\omega_s$. Andernfalls tauchen unerwünschte Signalkomponenten im diskretisierten Signal auf (Aliasing).

Für $u(t)$ gilt mit $\omega_s = \max(3\omega_0, 5\omega_0) = 5\omega_0$:

$$\omega_a \geq 2 \cdot 5\omega_0 = 10\omega_0$$

*(i)* Wie gehen Sie bei der Bestimmung der Periodizität eines Zeitsignals vor, das aus mehreren Frequenzkomponenten zusammengesetzt ist? Was folgt daraus konkret für das Signal $u(t)$? (4 P)

Damit das zusammengesetzte Signal ebenfalls periodisch ist (mit der Periodendauer $T_g$), müssen die beiden Periodendauern der Teilfunktionen ($T_1$, $T_2$) ganzzahlige Vielfache voneinander sein. Es muss also gelten $T_g = \lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$.

Für $u(t)$ ergibt sich mit scharfem Hinsehen:

$$T_g = \underbrace{3}_{\lambda_1} \frac{T_0}{3} = \underbrace{5}_{\lambda_2} \frac{T_0}{5} = T_0.$$

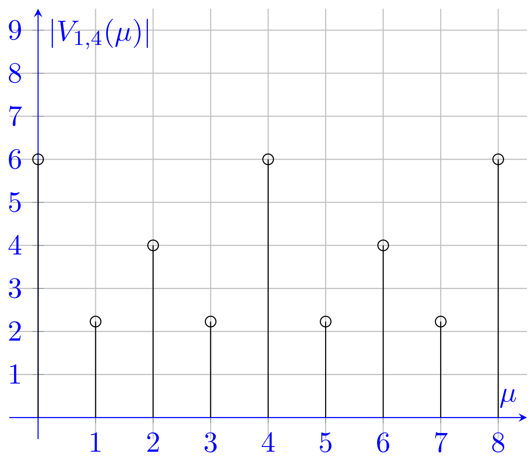
# Aufgabe 2 (33 Punkte)

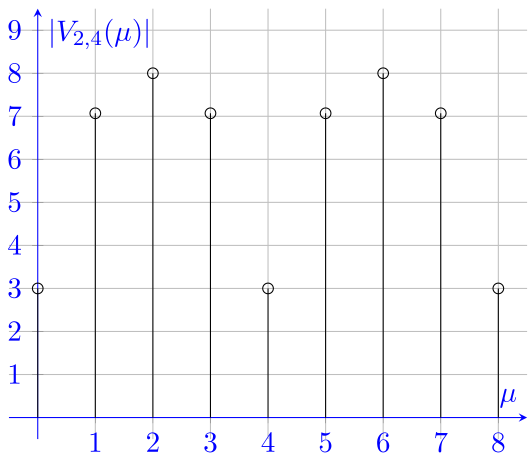
**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben seien die diskreten Fourier-Transformierten der Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$:

$$V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} 6 & , \mu = 0, \\ 1+2j & , \mu = 1, \\ -4 & , \mu = 2, \\ 1-2j & , \mu = 3, \end{cases} , \qquad V_{2,4}(\mu) = \begin{cases} 3 & , \mu = 0, \\ 5+5j & , \mu = 1, \\ -8 & , \mu = 2, \\ 5-5j & , \mu = 3. \end{cases}$$

*(a)* Skizzieren Sie den Betrag der diskreten Spektren $V_{1,4}(\mu)$ und $V_{2,4}(\mu)$ mit allen Achsenbeschriftungen für $\mu \in \{0, 1, ..., 7, 8\}$ in **je ein** Diagramm. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (4 P)




*(b)* Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformierte $\text{IDFT}\{V_{1,4}(\mu)\}$ für $n \in \{0, 1, ..., 6, 7\}$. (7 P)

$$\begin{aligned}
v_1(n) &= \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{3} V_{1,4}(\mu) e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n}, \\
v_1(0) &= \frac{1}{4} (6 \cdot 1 + (1+2j) \cdot 1 + (-4) \cdot 1 + (1-2j) \cdot 1) \\
&= \frac{1}{4} (6 + 1 + 2j - 4 + 1 - 2j) \\
&= \frac{4}{4} = 1 \\
v_1(1) &= \frac{1}{4} (6 \cdot 1 + (1+2j) \cdot j + (-4) \cdot (-1) + (1-2j) \cdot (-j)) \\
&= \frac{1}{4} (6 + j - 2 + 4 - j - 2) \\
&= \frac{6}{4} = 1,5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_1(2) &= \frac{1}{4}\left(6 \cdot 1 + (1+2j)\cdot(-1) + (-4)\cdot 1 + (1-2j)\cdot(-1)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(6 - 1 - 2j - 4 - 1 + 2j\right)\\
&= \frac{0}{4} = 0\\
v_1(3) &= \frac{1}{4}\left(6 \cdot 1 + (1+2j)\cdot(-j) + (-4)\cdot(-1) + (1-2j)\cdot(j)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(6 - j + 2 + 4 + j + 2\right)\\
&= \frac{14}{4} = 3,5\\
v_1(4) &= v_1(0) = 1\\
v_1(5) &= v_1(1) = 1,5\\
v_1(6) &= v_1(2) = 0\\
v_1(7) &= v_1(3) = 3,5
\end{aligned}
$$

*(c)* Die Folge $v_2(n)$ ist das Ergebnis der zyklischen Faltung $v_2(n) = v_1(n) \circledast v_3(n)$. Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformation $V_{3,4}(\mu) = \text{DFT}\{v_3(n)\}$ für $\mu \in \{0,1,2,3\}$. (4 P)

$$
V_{3,4}(\mu) = V_{2,4}(\mu)/V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} 0,5 & , \mu = 0,\\ 3-j & , \mu = 1,\\ 2 & , \mu = 2,\\ 3+j & , \mu = 3. \end{cases}
$$

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben seien die Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ mit:

$$
u_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} f_s t\right) \qquad\qquad u_2(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} f_s t\right)
$$

*(d)* Geben Sie die Folgen $v_1(n) = u_1(n \cdot \frac{1}{f_s})$ und $v_2(n) = u_2(n \cdot \frac{1}{f_s})$, welche durch Abtastung der Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ zu den Zeitpunkten $t = n\frac{1}{f_s}$ mit $n \in \{0,1,2,3\}$ entstehen, an. (3 P)

$$
v_1(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0,\\ 1 & , n = 1,\\ 0 & , n = 2,\\ -1 & , n = 3, \end{cases}
$$

$$v_2(n) = \begin{cases} 0 & , \ n = 0, \\ -1 & , \ n = 1, \\ 0 & , \ n = 2, \\ 1 & , \ n = 3. \end{cases}$$

*(e)* Berechnen Sie die Fourier-Transformierten DFT$\{v_1(n)\}$ und DFT$\{v_2(n)\}$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. (5 P)

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

$$\begin{aligned} V_{1,4}(0) &= 1 - 1 = 0 \\ V_{1,4}(1) &= -j + -j = -2j \\ V_{1,4}(2) &= -1 + 1 = 0 \\ V_{1,4}(3) &= j + j = 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{2,4}(0) &= -1 + 1 = 0 \\ V_{2,4}(1) &= j + j = 2j \\ V_{2,4}(2) &= 1 - 1 = 0 \\ V_{2,4}(3) &= -j - j = -2j \end{aligned}$$

*(f)* Bei welchen Frequenzen enthalten die Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ Anteile? (1 P)

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sin(2\pi f_1 t) = \sin(-2\pi f_1 t) \\ 2\pi f_1 t &= \pm \frac{\pi}{2} f_s t \\ f_1 &= \pm \frac{f_s}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \sin(2\pi f_2 t) = \sin(-2\pi f_2 t) \\ 2\pi f_2 t &= \pm \frac{3\pi}{2} f_s t \\ f_2 &= \pm \frac{3 f_s}{4} \end{aligned}$$

*(g)* Bei welchen Frequenzen enthalten die Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ Anteile? (1 P)
Beide Fourier-Transformierten der Folgen haben Anteile bei $\mu_1 = -1$ und $\mu_2 = 1$ Anteile. Die Stützstellen der DFT entsprechen Frequenzen von $f_n = n\frac{f_s}{M}$, $n \in \{\mathbb{Z}| \, |n| \leq \frac{M}{2}\}$. Daher enthalten beide Folgen Anteile bei Frequenzen von $f = \pm\frac{f_s}{4}$.

*(h)* Vergleichen Sie ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben ($f$) und ($g$). Erklären Sie Ihre Beobachtungen. (2 P)

Während die Frequenzen von $u_1(t)$ und $v_1(n)$ übereinstimmen ist dies für $u_2(t)$ und $v_2(n)$ nicht der Fall. Der Grund hierfür ist, dass das Abtasttheorem für $u_2(t)$ verletzt wurde ($f_2 = \frac{3}{4} f_s > \frac{1}{2} f_s$).

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

*(i)* Für die zyklische Faltung zweier Folgen $x(n)$ und $y(n)$ und deren Fourier-Transformierten $X_M(\mu)$ und $Y_M(\mu)$, gilt $\mathrm{DFT}_M\{(x(n) \circledast y(n))\} = X_M(\mu) \cdot Y_M(\mu)$. Weisen sie diesen Zusammenhang nach, indem sie die $\mathrm{DFT}_M\{(x(n) \circledast y(n))\}$ berechnen und geschickt vereinfachen. Die Folgen $x(n)$ und $y(n)$ seien $M$ periodisch. Daher vereinfacht sich die zyklische Faltung der Folgen zu: (6 P)

$$x(n) \circledast y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m) y(n-m)_{\bmod M} = \sum_{m=0}^{M-1} x(m) y(n-m)$$

Nutzen Sie diese Tatsache bei ihren Vereinfachungen aus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT}_M\{(x(n) \circledast y(n))\}(\mu) &= \sum_{n=0}^{M-1} (x(n) \circledast y(n)) e^{-j2\pi \frac{n\mu}{M}} \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(m) y(n-m) e^{-j2\pi \frac{n\mu}{M}} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} x(m) \sum_{n=0}^{M-1} y(n-m) e^{-j2\pi \frac{n\mu}{M}} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} x(m) Y_M(\mu) e^{-j2\pi \frac{m\mu}{M}} \\
&= Y_M(\mu) \sum_{m=0}^{M-1} x(m) e^{-j2\pi \frac{m\mu}{M}} \\
&= X_M(\mu) \cdot Y_M(\mu)
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3 (34 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y(n) = v(n) - \alpha\, v(n-2) - \beta\, y(n-1)$$

des Systems $S_1\{\cdot\}$ mit $y(n) = S_1\{v(n)\}$. Es gelte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

*(a)* Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_1(z)$ des Systems $S_1\{\cdot\}$. (3 P)
Die Übertragungsfunktion ist definiert als $H_1(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$. Daher muss die Differenzengleichung zunächst in den z-Bereich transformiert werden.

$$y(n) = v(n) - \alpha\, v(n-2) - \beta\, y(n-1)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= V(z) - \alpha\, V(z) z^{-2} - \beta\, Y(z) z^{-1} \\
Y(z)(1 + \beta\, z^{-1}) &= V(z)(1 - \alpha\, z^{-2}) \\
H_1(z) &= \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{1 - \alpha\, z^{-2}}{1 + \beta\, z^{-1}} \\
&= \frac{z^2 - \alpha}{z^2 + \beta\, z}
\end{aligned}$$

*(b)* Ist das System rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Das System ist rekursiv, da es von vorhergehenden Ausgangswerten abhängt.

*(c)* Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Das System ist kausal, da der Ausgang nur von aktuellen oder früheren Eingangs- und Ausgangswerten, jedoch nicht von zukünftigen Eingangswerten abhängt.

*(d)* Was muss für die Parameter $\alpha$ und $\beta$ gelten, damit das System minimalphasig und stabil ist? Begründen Sie Ihre Antwort! (6 P)
Für Minimalphasigkeit müssen die Nullstellen des Systems in oder auf dem Einheitskreis liegen, d.h. $|z_{0,i}| \leq 1\, \forall\, i$. Die Nullstellen sind:

$$\begin{aligned}
z^2 - \alpha &= 0 \\
z^2 &= \alpha \\
\rightarrow z_{0,1/2} &= \pm\sqrt{\alpha}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $|\alpha| \leq 1$, damit das System minimalphasig ist. Für Stabilität müssen alle Polstellen im Einheitskreis liegen, d.h. $|z_{\infty,i}| < 1\, \forall\, i$. Die Polstellen des Systems sind:

$$\begin{aligned}
z^2 + \beta\, z &= 0 \\
z(z + \beta) &= 0 \\
\rightarrow z_{\infty,1} &= 0
\end{aligned}$$

und

$$z_{\infty,2} = -\beta$$

Daher muss gelten $|\beta| < 1$.

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion $H_2(s)$. Das zugehörige Pol-/Nullstellendiagramm ist in Abbildung 1 dargestellt.

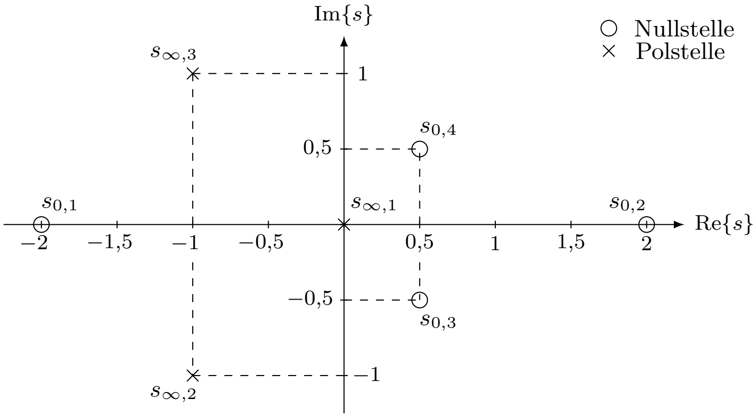



Abbildung 1: Pol-/Nullstellendiagramm der Übertragungsfunktion $H_2(s)$.

*(e)* Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_2(s)$ des Systems. Es gelte $H_2(-1) = 15$. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. (8 P)

Für die Übertragungsfunktion des Systems gilt

$$\begin{aligned}
H_2(s) &= K\,\frac{(s-s_{0,1})(s-s_{0,2})(s-s_{0,3})(s-s_{0,4})}{(s-s_{\infty,1})(s-s_{\infty,2})(s-s_{\infty,3})} \\
&= K\,\frac{(s-(-2))(s-2)(s-(0,5-0,5\,j))(s-(0,5+0,5\,j))}{s(s-(-1+j))(s-(-1-j))} \\
&= K\,\frac{(s^2-4)(s^2-s+0,5)}{s(s^2+2s+2)} \\
&= K\,\frac{s^4-s^3-3,5s^2+4s-2}{s^3+2s^2+2s}
\end{aligned}$$

Der Verstärkungsfaktor $K$ des Systems kann über die Bedingung $H_2(-1) = 15$ bestimmt werden. D.h.:

$$\begin{aligned}
H_2(-1) &= K\,\frac{(-1)^4-(-1)^3-3,5\,(-1)^2+4\,(-1)-2}{(-1)^3+2\,(-1)^2+2\,(-1)} = 15 \\
&= K\,\frac{1+1-3,5-4-2}{-1+2-2} = 15 \\
&= K\,\frac{-7,5}{-1} = 7,5\,K = 15 \\
\rightarrow K &= \frac{15}{7,5} = 2
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Übertragungsfunktion zu

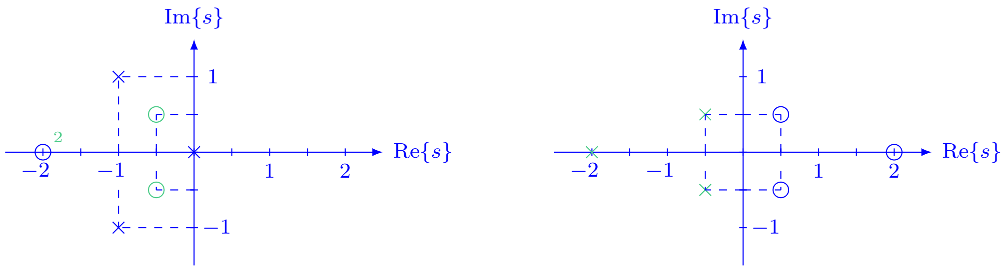
$$H_2(s) = 2\,\frac{s^4 - s^3 - 3,5s^2 + 4s - 2}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

*(f)* Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Das System ist nicht stabil, da mehr Nullstellen als Polstellen vorhanden sind (d.h. der Zählergrad größer als der Nennergrad ist).

*(g)* Erklären Sie kurz, was man unter einem Allpass-Filter versteht. Was bedeutet das konkret für dessen Pol- und Nullstellen? (3 P)
Ein Allpass besitzt einen konstanten Betragsfrequenzgang. D.h. wenn ein Allpass-Anteil zu einem System hinzugefügt wird, kann sich der Phasenverlauf ändern, nicht jedoch der Betragsfrequenzgang (bis auf einen konstanten Faktor). Für die Pol- und Nullstellen gilt hier: $s_0 = -s_\infty^*$

*(h)* Formen Sie das angegebene gemischtphasige System so um, dass es aus einem minimalphasigen Anteil $H_2^{\text{min}}(s)$ und einem Allpass-Anteil $H_2^{\text{all}}(s)$ besteht. Geben Sie sowohl das Pol-/Nullstellendiagramm, als auch die Übertragungsfunktionen $H_2^{\text{min}}(s)$ und $H_2^{\text{all}}(s)$ an. (8 P)

*Hinweis:* Die Übertragungsfunktionen $H_2^{\text{min}}(s)$ und $H_2^{\text{all}}(s)$ müssen hierbei nicht vereinfacht werden.
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jedes gemischtphasige System in einen minimalphasigen Anteil und einen Allpass-Anteil zerlegt werden kann (*Lineare Systeme - Folie 112*). Für das minimalphasige System müssen alle Nullstellen in der linken s-Halbebene (oder auf der imaginären Achse) liegen. D.h. alle Pole bleiben, alle Nullstellen in der linken Halbebene bleiben und die Nullstellen in der rechten Halbebene werden an der imaginären Achse gespiegelt. Für den Allpass-Anteil werden die Nullstellen aus der rechten Halbebene behalten und die Polstellen für die (in dem minimalphasigen Anteil) hinzugekommenen Nullstellen ergänzt (siehe Skript für eine ausführliche Beschreibung der Herangehensweise). Dadurch ergeben sich hier die Pol-/Nullstellendiagramme zu:




(a) Pol-/Nullstellendiagramm von $H_2^{\text{min}}(s)$ (b) Pol-/Nullstellendiagramm von $H_2^{\text{all}}(s)$

Abbildung 2: Aufteilung der Übertragungsfunktion $H_2(s)$ in einen minimalphasigen Anteil $H_2^{\text{min}}(s)$ und einen Allpass-Anteil $H_2^{\text{all}}(s)$.

Die neu hinzugekommenen Pol- und Nullstellen sind in grün markiert.

Die Übertragungsfunktionen ergeben sich für den minimalphasigen Anteil zu

$$\begin{aligned} H_2^{\text{min}}(s) &= 2\,\frac{(s+2)^2(s+0,5+0,5j)(s+0,5-0,5j)}{s(s+1+j)(s+1-j)} \\ &= 2\,\frac{s^4+5s^3+8,5s^2+6s+2}{s^3+2s^2+2s} \end{aligned}$$

und für den Allpass-Anteil zu

$$\begin{aligned} H_2^{\text{all}}(s) &= \frac{(s-2)(s-0,5-0,5j)(s-0,5+0,5j)}{(s+2)(s+0,5-0,5j)(s+0,5+0,5j)} \\ &= \frac{s^3-3s^2+2,5s-1}{s^3+3s^2+2,5s+1} \end{aligned}$$

Hierbei kann der Vorfaktor $K = 2$ entweder dem minimalphasigen Anteil oder dem Allpass-Anteil zugeordnet (oder auf beide Systeme aufgeteilt) werden.

Dies ist eine leere Seite.