

# Signale und Systeme I

## Modulklausur SS 2022

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 20.09.2022

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

### Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

### Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/32	/33	/35

Summe der Punkte: \_\_\_\_\_ /100

### Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den \_\_\_\_\_ Unterschrift: \_\_\_\_\_

---

# Signale und Systeme I

## Modulklausur SS 2022

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt  
Ort: OS40 - Norbert-Gansel-Hörsaal  
Datum: 20.09.2022  
Beginn: 09:00 h  
Einlesezeit: 10 Minuten  
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

### Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist ausschließlich das Durchblättern der aktuellen Klausur erlaubt**, darüber hinaus sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

## Aufgabe 1 (32 Punkte)

**Teil 1** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal  $v(t)$  mit  $a \in \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$  und  $T \in \mathbb{R}^+$ :

$$v(t) = \begin{cases} a \left(1 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right), & 0 \leq t \leq T, \\ a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie das Signal  $v(t)$  im Bereich  $t \in [-T, T]$  mit allen Achsenbeschriftungen. (4 P)

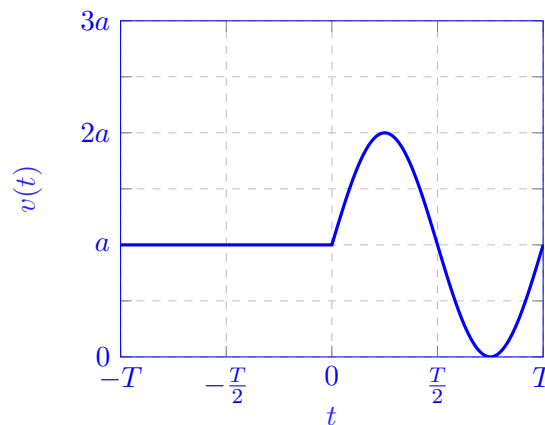


Abbildung 1: Signalgraph von  $v(t)$  im Bereich  $t \in [-T, T]$ .

Das zeitkontinuierliche Signal  $v(t)$  im Bereich  $t \in [0, T]$  soll nun  $T$ -periodisch fortgesetzt werden, wodurch sich das zeitkontinuierliche Signal  $u(t)$  ergibt:

$$u(t) = a \left(1 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie explizit den trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten  $b_1$  für das Signal  $u(t)$ . (7 P)

*Hinweis: Die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten  $b_\mu$  sind gegeben durch:*

$$b_\mu = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T}t\right) dt.$$

*Hinweis: Folgender trigonometrischer Zusammenhang gilt:*

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)].$$

$$b_\mu = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

mit  $\mu = 1$ ,  $t_0 = 0$  und  $u(t) = a(1 + \sin(\frac{2\pi}{T}t))$  folgt:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T a \left(1 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2a}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt. \end{aligned}$$

Mit dem trigonometrischem Zusammenhang  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$  und  $x = \frac{2\pi}{T}t$  folgt:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2a}{T} \left( \underbrace{\left[ -\frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^T}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[ t \right]_0^T}_{=\frac{T}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \right]_0^T}_{=0} \right) \\ &= \frac{2a}{T} \cdot \frac{T}{2} \\ &= a. \end{aligned}$$

- (c) Bestimmen Sie den komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten  $c_0$  für das Signal  $u(t)$ . (3 P)  
Welchen Signalanteil stellt dieser Koeffizient dar?

Ansatz 1: Gleichanteil  $c_0 = a$  von  $u(t)$  durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Ansatz 2: Explizite Berechnung von  $c_0$ :

Mit

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt,$$

folgt:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T a \left(1 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) dt \\ &= \frac{a}{T} \left( \underbrace{\left[ t \right]_0^T}_{=T} - \underbrace{\left[ \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^T}_{=0} \right) \\ &= \frac{a}{T} T \\ &= a. \end{aligned}$$

Der komplexe Fourier-Reihenkoeffizient  $c_0$  stellt den Gleichanteil des Signals dar.

- (d) Geben Sie den Gleich- und Wechselanteil des Signals  $u(t)$  an. Zeigen Sie, welche Symmetrieeigenschaften die Signalanteile jeweils aufweisen. (4 P)

$$u(t) = u_{\text{gleich}} + u_{\text{wechsel}}(t)$$

$$u_{\text{gleich}} = a, \quad u_{\text{wechsel}}(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Da  $u_{\text{gleich}} = u_{\text{gleich}}(t) = u_{\text{gleich}}(-t)$  gilt, weist der Gleichanteil von  $u(t)$  eine gerade Symmetrie auf.

Da  $u_{\text{wechsel}}(t) = -u_{\text{wechsel}}(-t)$  gilt, weist der Wechselanteil von  $u(t)$  eine ungerade Symmetrie auf.

Im Folgenden soll  $U(j\omega)$  nun das Spektrum des Signals  $u(t)$  darstellen.

- (e) Welche Aussagen können Sie über die Symmetrieeigenschaften und die Reell- oder Komplexwertigkeit des Spektrums  $U(j\omega)$  treffen? Nutzen Sie zur Begründung die zuvor ermittelten Symmetrieeigenschaften des Signals  $u(t)$ . (3 P)

Der reelle Gleichanteil  $u_{\text{gleich}} = a$  mit gerader Symmetrie entspricht im Spektrum einem reellen und geraden Spektralanteil

$$u_{\text{re,ge}}(t) \circ \bullet U_{\text{re,ge}}(j\omega).$$

Der reelle Wechselanteil  $u_{\text{wechsel}}(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$  mit ungerader Symmetrie entspricht im Spektrum einem imaginären und ungeraden Spektralanteil

$$u_{\text{re,un}}(t) \circ \bullet j U_{\text{im,un}}(j\omega).$$

Somit ergibt sich mit  $U(j\omega)$  ein hermit-symmetrisch komplexes Spektrum mit geradem Realteil und ungeradem Imaginärteil.

$$U(j\omega) = U_{\text{re,ge}}(j\omega) + j U_{\text{im,un}}(j\omega)$$

**Teil 2** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei das Spektrum  $X(j\omega)$ , welches in der folgenden Abbildung dargestellt ist:

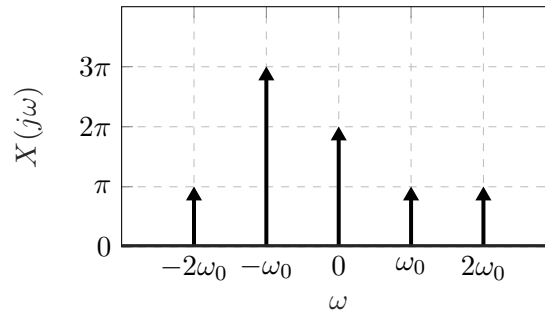


Abbildung 2: Spektrum  $X(j\omega)$  des Signals  $x(t)$ .

- (f) Geben Sie explizit einen Ausdruck für die inverse Fourier-Transformierte  $x(t)$  mit allen vorkommenden Signalanteilen des Spektrums  $X(j\omega)$  an. (6 P)

*Hinweis: Eine explizite Berechnung der inversen Fourier-Transformation ist nicht notwendig!*

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung des Zeitsignals:

$$\begin{aligned} a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) &\longleftrightarrow a_1 V_1(j\omega) + a_2 V_2(j\omega) \\ \cos(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \pi [\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)] \\ e^{j\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi \delta_0(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \cos(\omega_0 t) + e^{-j\omega_0 t} + \cos(2\omega_0 t) \\ &= 1 + \frac{3}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \cos(2\omega_0 t). \end{aligned}$$

- (g) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal  $x(t)$  jeweils die reellen und komplexen Signalanteile. (2 P)

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{1 + \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t)}_{\text{reell}} + \underbrace{e^{-j\omega_0 t}}_{\text{komplex}} \\ &= \underbrace{1 + \cos(2\omega_0 t)}_{\text{reell}} + \underbrace{\frac{3}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}}_{\text{komplex}} \end{aligned}$$

- (h) Mit welcher Frequenz  $w_A$  muss das Signal  $x(t)$  mindestens abgetastet werden, um das Abtasttheorem nicht zu verletzen? Welche Folge hat die Verletzung des Abtasttheorems? (3 P)

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz  $\omega_B$ , dann exakt rekonstruierbar ist, wenn es mit der Abtastfrequenz  $\omega_A$  abgetastet wurde:

$$\omega_A > 2\omega_B.$$

Daraus folgt für die Abtastung von  $x(t)$ :

$$\omega_A > 2(2\omega_0) = 4\omega_0.$$

Bei einer Verletzung des Abtasttheorems können unerwünschte Signalkomponenten (**Aliasing**) im diskretisierten Signal auftreten. Dadurch kann es zur Maskierung von erwünschten Signalkomponenten kommen, was zu einem Informationsverlust führt und das ursprüngliche Zeitsignal  $x(t)$  nicht mehr vollständig aus dem diskretisierten Signal  $x(n)$  rekonstruiert werden kann.

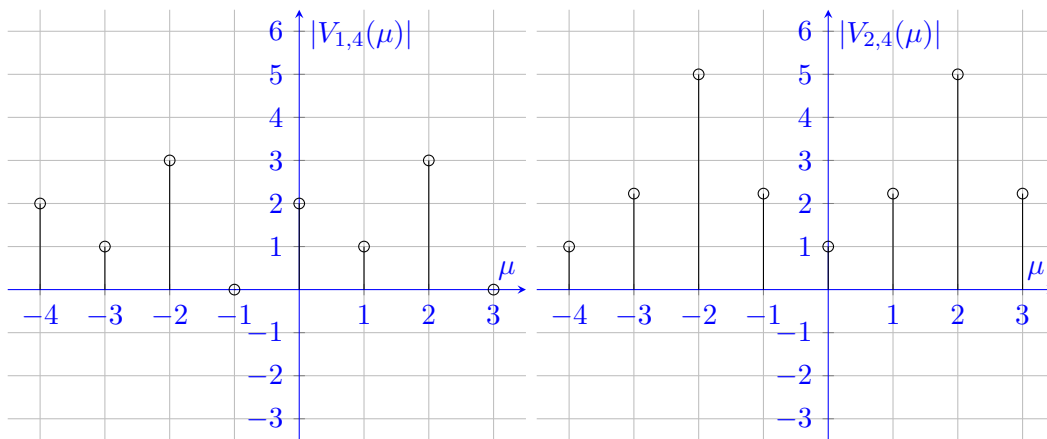
## Aufgabe 2 (33 Punkte)

**Teil 1** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben seien die diskreten Fourier-Transformierten der Folgen  $v_1(n)$  und  $v_2(n)$ :

$$V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} 2 & , \mu = 0 \\ j & , \mu = 1 \\ -3 & , \mu = 2 \\ 0 & , \mu = 3 \end{cases}, \quad V_{2,4}(\mu) = \begin{cases} 1 & , \mu = 0 \\ 2 - j & , \mu = 1 \\ 5 & , \mu = 2 \\ 2 + j & , \mu = 3 \end{cases}.$$

- (a) Skizzieren Sie den Betrag der diskreten Folgen  $V_{1,4}(\mu)$  und  $V_{2,4}(\mu)$  mit allen Achsenbeschriftungen für  $\mu \in \{-4, -3, \dots, 2, 3\}$ . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (5 P)



- (b) Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformation  $V_{z,M}(\mu)$  der zyklischen Faltung  $v_z(n) = v_1(n) \otimes v_2(n)$  für  $M = 4$  und  $\mu \in \{0, 1, \dots, 5\}$ . (3 P)

$$V_{z,M}(\mu) = \begin{cases} 2 & , \mu = 0 \\ 1 + 2j & , \mu = 1 \\ -15 & , \mu = 2 \\ 0 & , \mu = 3 \\ 2 & , \mu = 4 \\ 1 + 2j & , \mu = 5 \end{cases}$$

- (c) Handelt es sich bei den Folgen  $v_1(n)$  und  $v_2(n)$  um reelle Folgen? Begründen Sie ihre Antwort. (3 P)

- Die Folge  $v_1(n)$  ist nicht reell, da ihr Spektrum nicht hermite-symmetrisch mit einem geraden Realteil und einem ungeraden Imaginärteil ist.



- Die Folge  $v_2(n)$  ist reell, da ihr Spektrum hermite-symmetrisch mit einem geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil ist.

**Teil 2** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei die Impulsantwort  $h_0(n)$ :

$$h_0(n) = a^n [\gamma_{-1}(n) - \gamma_{-1}(n - N)]$$

eines zeitdiskreten Systems mit  $\{a \in \mathbb{R} \setminus 0 \mid |a| < 1\}$  und  $N \in \mathbb{N}$ .

- (d) Berechnen Sie die zeitdiskrete Fourier-Transformation  $H(e^{j\Omega})$  der Folge  $h_0(n)$ . (6 P)

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (ae^{-j\Omega})^n \\ &= \frac{1 - (ae^{-j\Omega})^N}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad \forall a \neq 1 \end{aligned}$$

- (e) Berechnen Sie das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion  $|H(e^{j\Omega})|^2$ . Für die Parameter gilt ab jetzt  $a = \frac{1}{2}$  und  $N = 4$ . Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit, dass im Zähler und Nenner Kosinus- bzw. Sinus-Terme stehen. (8 P)

Hinweis: Es gilt folgender Zusammenhang:

$$|z|^2 = z \cdot z^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})|^2 &= \left| \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \right|^2 \\ &= \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \right) \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \right)^* \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{+j\Omega}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}e^{+j\Omega}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{16}e^{j4\Omega} + \frac{1}{256} - \frac{1}{16}e^{-j4\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{257}{256} - \frac{1}{8} \cos(4\Omega)}{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}$$

- (f) Welche Art von Filter produziert diese Impulsantwort? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)  
 Es handelt sich um ein Tiefpassfilter.  $|H(e^{j0})|^2 = 225/64$ ,  $|H(e^{j\pi})|^2 = 25/64$

**Teil 3** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

- (g) Für die zyklische Faltung zweier Spektren  $X_M(\mu)$  und  $Y_M(\mu)$  und deren diskreten (6 P)  
 Folgen  $x(n)$  und  $y(n)$ , gilt  $\text{IDFT}\{\frac{1}{M}(X_M(\mu) \circledast Y_M(\mu))\} = x(n) \cdot y(n)$ . Weisen sie diesen Zusammenhang nach, indem sie die  $\text{IDFT}\{\frac{1}{M}(X_M(\mu) \circledast Y_M(\mu))\}$  berechnen und vereinfachen. Die Spektren  $X_M(\mu)$  und  $Y_M(\mu)$  seien  $M$  periodisch. Daher vereinfacht sich die zyklische Faltung der Spektren zu:

$$X_M(\mu) \circledast Y_M(\mu) = \sum_{m=0}^{M-1} X_M(m)Y_M(\mu - m)_{\text{mod } M} = \sum_{m=0}^{M-1} X_M(m)Y_M(\mu - m)$$

Nutzen Sie diese Tatsache bei ihren Vereinfachungen aus.

$$\begin{aligned} \text{IDFT}_M\left\{\frac{1}{M}(X_M(\mu) \circledast Y_M(\mu))\right\} &= \frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{M-1} (X_M(\mu) \circledast Y_M(\mu))e^{j2\pi \frac{n\mu}{M}} \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} X_M(m)Y_M(\mu - m)e^{j2\pi \frac{n\mu}{M}} \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=0}^{M-1} X_M(m) \sum_{\mu=0}^{M-1} Y_M(\mu - m)e^{j2\pi \frac{n\mu}{M}} \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=0}^{M-1} X_M(m)M y(n)e^{j2\pi \frac{m n}{M}} \\ &= \frac{1}{M} y(n) \sum_{m=0}^{M-1} X_M(m)e^{j2\pi \frac{m n}{M}} \\ &= x(n) \cdot y(n) \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 (35 Punkte)

**Teil 1** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei die Sprungantwort

$$h_{-1}(t) = t e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$$

des Systems mit der Übertragungsfunktion  $H(s)$ .

- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion  $H(s)$  des Systems. (3 P)

Der Zusammenhang zwischen Laplace-Transformierter und Sprungantwort lautet:

$$H(s) = s \mathcal{L}\{h_{-1}(t)\}$$

Mit der Korrespondenz aus der Formelsammlung

$$t e^{s_{\infty} t} \delta_{-1}(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \frac{1}{(s - s_{\infty})^2}$$

für  $\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_{\infty}\}$  ergibt sich die Übertragungsfunktion zu:

$$H(s) = \frac{s}{(s - \alpha)^2} \quad \text{mit } \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{\alpha\}$$

- (b) Für welche Werte von  $\alpha$  ist das angegebene System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System weist eine doppelte Polstelle bei  $s_{\infty,1/2} = \alpha$  auf. Damit das System stabil ist, muss also gelten:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{s_{\infty}\} &< 0 \\ \operatorname{Re}\{\alpha\} &< 0 \end{aligned}$$

- (c) Für welche Werte von  $\alpha$  ist das angegebene System reellwertig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Damit das System reellwertig ist, muss auch  $\alpha$  reellwertig sein. Andernfalls hätte das System Polstellen, die nicht komplex konjugiert zueinander sind, und wäre damit nicht mehr reellwertig.

Im Folgenden gilt  $\alpha = -1$ .

- (d) Zeichnen Sie das zugehörige Pol-/Nullstellendiagramm. (4 P)

Das System besitzt eine Nullstelle bei  $s_{0,1} = 0$  und zwei Polstellen bei  $s_{\infty,1/2} = -1$ . Darauf ergibt sich folgendes Pol-/Nullstellendiagramm:

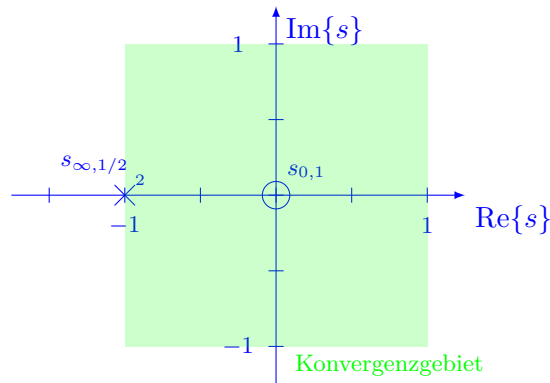


Abbildung 3: PN-Diagramm des Systems  $H(s)$ .

- (e) Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Übertragungsfunktion und begründen Sie Ihre Antwort. Kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet zusätzlich in dem Pol-/Nullstellendiagramm aus Aufgabenteil (d). (3 P)

Für das Konvergenzgebiet ergibt sich  $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_{\infty}\}$ . D.h. in diesem Fall  $\text{Re}\{s\} > -1$ .

- (f) Ist das angegebene System minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System besitzt eine Nullstelle bei  $s_{0,1} = 0$ . Für Minimalphasigkeit muss gelten:  $\text{Re}\{s_{0,i}\} \leq 0 \forall i$ . Diese Bedingung ist hier erfüllt, d.h. das System ist minimalphasig.

**Teil 2** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Das System  $S_2\{\cdot\}$  ist entsprechend der Gleichung

$$y(n) = |v(n - N)|$$

mit  $y(n) = S_2\{v(n)\}$  definiert. Dabei gilt  $v(n) \in \mathbb{R} \forall n$  und  $N \in \mathbb{Z}$ .

- (g) Überprüfen Sie das System  $S_2\{\cdot\}$  auf (10 P)

- Linearität
- Kausalität
- Verschiebungsinvarianz und
- Stabilität.

Begründen Sie hierbei jeweils Ihre Antwort!

- **Linearität:** Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz gilt:

$$S\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l v_l(n)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l S\{v_l(n)\}.$$

Mit der Annahme  $v(n) = \alpha_1 v_1(n) + \alpha_2 v_2(n)$  gilt für das System  $S_2\{\cdot\}$ :

$$y(n) = S_2\{v(n)\} = |\alpha_1 v_1(n - N) + \alpha_2 v_2(n - N)| \\ \neq \alpha_1 |v_1(n - N)| + \alpha_2 |v_2(n - N)|.$$

⇒ Das System ist somit **nicht linear**.

- **Kausalität:** Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal  $y(n)$  nur von vergangenen Werten des Eingangssignals  $v(n)$  abhängt. Bei dem angegebenen System  $S_2\{\cdot\}$  hängt das Ausgangssignal zum Zeitpunkt  $n_0$

$$y(n_0) = |v(n_0 - N)|$$

nur vom Eingangssignal zum Zeitpunkt  $n_0 - N$  ab.

⇒ Das System ist **kausal** für  $N \geq 0$ . Für  $N < 0$  ist das System nicht kausal.

- **Verschiebungsinvarianz:** Ein System ist verschiebungsinvariant, wenn es in der Reihenfolge mit einer Signalverschiebung vertauscht werden darf:

$$S\{v(n - \kappa)\} = y(n - \kappa).$$

Auf ein verschobenes Signal reagiert das System mit

$$S_2\{v(n - \kappa)\} = |v(n - N - \kappa)| \\ = y(n - \kappa).$$

⇒ Das System ist somit **verschiebungsinvariant**.

- **Stabilität:** Ein System ist stabil, wenn es auf beschränkte Eingangssignale mit beschränkten Ausgangssignalen reagiert:

$$\text{Für } |v(n)| \leq M_1 < \infty, \forall n \text{ muss gelten } |y(n)| \leq M_2 < \infty, \forall n.$$

Für den Betrag des Ausgangssignals des Systems  $S_2\{\cdot\}$  gilt

$$|y(n)| = |v(n - N)|$$

⇒ Das System ist **stabil**.

**Teil 3** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Gegeben seien die folgenden Pol-/Nullstellendiagramme sowie die Impulsantworten

- (h) Ordnen Sie den Pol-/Nullstellendiagramme die zugehörigen Impulsantworten zu und begründen Sie Ihre Entscheidung! (9 P)

Für die Zuordnung der Pol-/Nullstellendiagramme zu den Impulsantworten, müssen die Polstellen der Übertragungsfunktionen betrachtet werden.

- PN-Diagramm 1 und Impulsantwort b gehören zusammen. Die Polstellen befinden sich auf dem Einheitskreis, d.h. das System ist grenzstabil. Dies kann man auch an der Impulsantwort b sehen, die zwischen den Werten -1 und 1 pendelt.

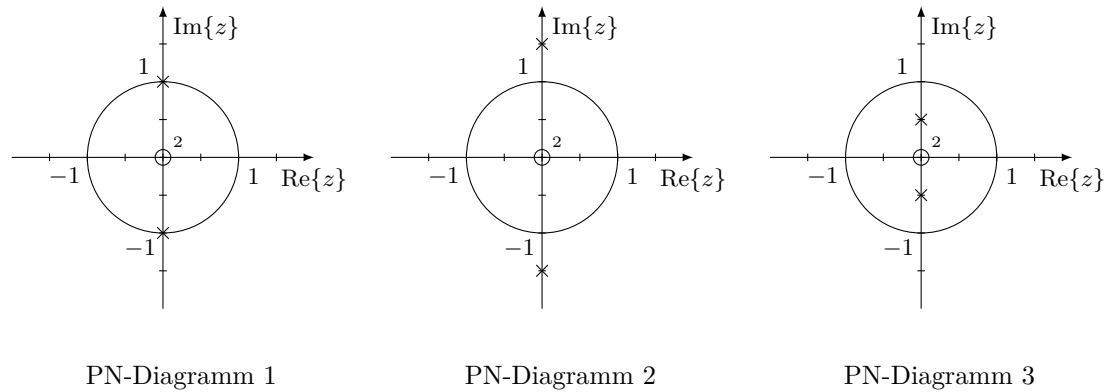


Abbildung 4: PN-Diagramme diskreter Systeme.

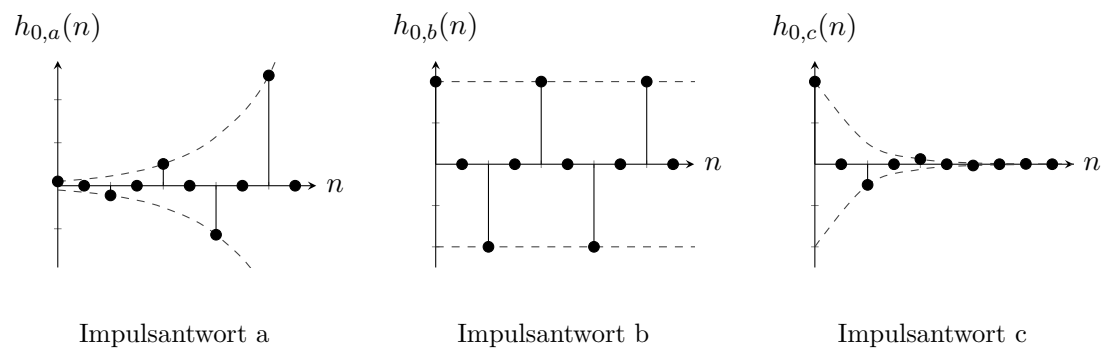


Abbildung 5: Impulsantworten diskreter Systeme.

- PN-Diagramm 2 und Impulsantwort a gehören zusammen. Die Polstellen befinden sich außerhalb des Einheitskreises. Das System ist dadurch nicht stabil. Die Impulsantwort a schwingt sich auf, d.h. das zugehörige System ist nicht stabil.
- PN-Diagramm 3 und Impulsantwort c gehören zusammen. Die Polstellen befinden sich innerhalb des Einheitskreises und somit ist das System stabil. Auch die Impulsantwort c gehört zu einem stabilen System, da diese für größere Werte von  $n$  abklingt.

Dies ist eine leere Seite.