Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2024

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	01.10.2024
Name:	______________________________
Matrikelnummer:	______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/32	/33	/35

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2024

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	CAP3 - Hörsaal 2 und 3
Datum:	01.10.2024
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (32 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

Die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten des reellen zeitkontinuierlichen Signals $v(t)$ sind gegeben durch:

$$c_0 = 4\cos(2\pi), \qquad a_\mu = \begin{cases} \mu\, e^{j2\pi\mu} & , \mu \in \{1,2\}, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \qquad b_\mu = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{j\pi\mu} & , \mu \in \{2,3\}, \\ -5 & , \mu = 5, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie aus den trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten die zugehörigen komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten c_μ des Signals $v(t)$ für $\mu \in \mathbb{Z}$. (5 P)

$$c_0 = 4, \qquad a_\mu = \begin{cases} 1 & , \mu = 1, \\ 2 & , \mu = 2, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \qquad b_\mu = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \mu = 2, \\ -\frac{1}{3} & , \mu = 3, \\ -5 & , \mu = 5, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - jb_\mu)$ und $c_{-\mu} = c_\mu^*$ für $\mu \in \{1, \dots, \infty\}$ folgt:

$$c_\mu = \begin{cases} -j2.5 & , \mu = -5, \\ -j\frac{1}{6} & , \mu = -3, \\ 1 + j\frac{1}{4} & , \mu = -2, \\ \frac{1}{2} & , \mu = -1, \\ 4 & , \mu = 0, \\ \frac{1}{2} & , \mu = 1, \\ 1 - j\frac{1}{4} & , \mu = 2, \\ j\frac{1}{6} & , \mu = 3, \\ j2.5 & , \mu = 5, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Geben Sie die Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe an und bestimmen Sie hiermit das Signal $v(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$. Vereinfachen Sie hierbei die im Ergebnis vorhandenen Fourier-Reihenkoeffizienten. (3 P)

Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Daraus folgt für $v(t)$:

$$v(t) = 4 + \cos(\omega_0 t) + 2\cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) - 5\sin(5\omega_0 t).$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

(c) Welche Bandbreite ergibt sich für ein Signal mit den zugehörigen komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten $c_\mu = 1, \forall\, \mu \in \mathbb{Z}$? Begründen Sie anhand der erwarteten Frequenzkomponenten des Signals. (3 P)

Durch die gegebenen komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten c_μ ergibt sich, mit der Darstellung durch die Fourier-Reihe, ein Signal mit Frequenzkomponenten aller möglichen Vielfachen der Grundfrequenz ω_0.

Somit hat das Spektrum des Signals an allen möglichen negativen und positiven Vielfachen der Grundfrequenz ω_0 von Null verschiedene Anteile mit konstanter Amplitude. Das Signal verfügt somit über eine unlimitierte Bandbreite.

Gegeben seien die T-periodischen zeitkontinuierlichen Signale $d_1(t)$ und $d_2(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$:

$$d_1(t) = t, \quad d_2(t) = t^2, \quad \text{für: } -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}.$$

(d) Für welche trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten a_μ und b_μ erwarten Sie von Null verschiedene Werte jeweils bei den Zeitsignalen $d_1(t)$ und $d_2(t)$? Argumentieren Sie anhand der Signaleigenschaften und erklären Sie mögliche Unterschiede. (3 P)

Durch die ungerade Symmetrie von $d_1(t)$ sind nur die Koeffizienten b_μ zu erwarten, die Koeffizienten a_μ entfallen. Für das gerade Zeitsignal $d_2(t)$ sind hingegen nur die Koeffizienten a_μ zu erwarten und die Koeffizienten b_μ entfallen.

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$x(t) = \frac{1}{2} + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} - 2\sin(2\omega_0 t).$$

(e) Handelt es sich bei $x(t)$ um ein reell- oder komplexwertiges Signal? Begründen Sie anhand der vorkommenden Signalkomponenten. (3 P)

Mit der Eulerschen Formel $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$ folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} - 2\sin(2\omega_0 t), \\ &= \frac{1}{2} + 2\Big(\frac{1}{2}\Big(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\Big)\Big) - 2\sin(2\omega_0 t), \\ &= \frac{1}{2} + 2\cos(\omega_0 t) - 2\sin(2\omega_0 t). \end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei $x(t)$ um ein reelles Signal, da sich die Imaginärteile der ursprünglich enthaltenen komplexen Exponentialterme gegenseitig aufheben.

(f) Geben Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$ an. (3 P)

Hinweis: Eine explizite Berechnung der Fourier-Transformation ist nicht notwendig!

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung der Fourier-Transformierten $X(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi\left[\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)\right], \\ \sin(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ j\pi\left[\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0)\right], \\ e^{j\omega_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$X(j\omega) = \pi\Big[\delta_0(w) + 2\big[\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)\big] - j2\big[\delta_0(\omega + 2\omega_0) - \delta_0(\omega - 2\omega_0)\big]\Big].$$

(g) Skizzieren Sie das Spektrum $X(j\omega)$ im Bereich $\omega \in [-3\omega_0, 3\omega_0]$ mit allen Achsenbeschriftungen. (6 P)

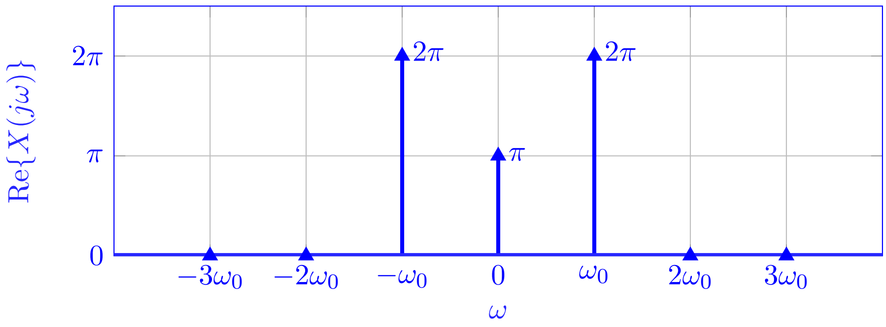


Abbildung 1: Realteil des Spektrums $X(j\omega)$.

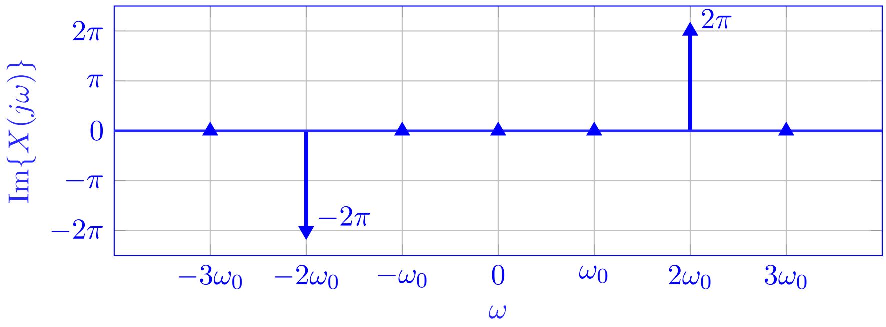


Abbildung 2: Imaginärteil des Spektrums $X(j\omega)$.

(h) Ist das Spektrum $X(j\omega)$ hermite-symmetrisch? Argumentieren Sie anhand der vorkommenden Spektral- und/oder Signalanteile. (3 P)

Ein hermite-symmetrisches Spektrum muss einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil aufweisen.

Die Real- und Imaginärteile von von $X(j\omega)$ sind gegeben durch:

$$X(j\omega)_{\text{re,ge}} = \pi\Big[\delta_0(w) + 2\big[\delta_0\left(\omega + \omega_0\right) + \delta_0\left(\omega - \omega_0\right)\big]\Big],$$

$$X(j\omega)_{\text{im,un}} = -j2\pi\big[\delta_0\left(\omega + 2\omega_0\right) - \delta_0\left(\omega - 2\omega_0\right)\big].$$

Durch den geraden Realteil und ungeraden Imaginärteil handelt es sich bei $X(j\omega)$ um ein hermite-symmetrisches Spektrum.

Alternativ: Im Zeitbereich entspricht $x(t)$ einem Zeitsignal mit den Realteilen:

$$x(t)_{\text{re,ge}} = \frac{1}{2} + 2\cos(\omega_0 t),$$

$$x(t)_{\text{re,un}} = -2\sin(2\omega_0 t).$$

Diese Signalanteile entsprechen im Spektrum einem reellen geraden und einem imaginären ungeraden Spektralanteil, sodass das Spektrum $X(j\omega)$ hermite-symmetrisch ist.

(i) Das Signal $x(t)$ soll zeitlich um $t_0 = 5$ verzögert werden. Geben Sie einen Ausdruck für das Spektrum des zeitverzögerten Signals an und erklären Sie, welche Auswirkungen diese Verzögerung auf das resultierende Spektrum hat. (3 P)

Mit dem Verschiebungssatz

$$v\,(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(j\omega)e^{-j\omega t_0},$$

ergibt sich für $t_0 = 5$:

$$x(t-5) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega)e^{-j\omega 5}.$$

Die Verschiebung im Zeitbereich entspricht also einer Modulation im Frequenzbereich, sodass es für jede Frequenz ω zu einer Phasenverzögerung um $t_0 \cdot \omega = 5\,\omega$ kommt.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben ist die diskrete Fourier-Transformierte $V_{1,M}(\mu) = \mathrm{DFT}\{v_1(n)\}$ und die diskrete Folge $v_2(n) = \mathrm{IDFT}\{V_{2,M}(\mu)\}$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{1,M}(\mu) = \begin{cases} \frac{5}{2}, & \mu = 0, \\ 1 - j, & \mu = 1, \\ -2, & \mu = 2, \\ 1 + j, & \mu = 3, \end{cases} \qquad v_2(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

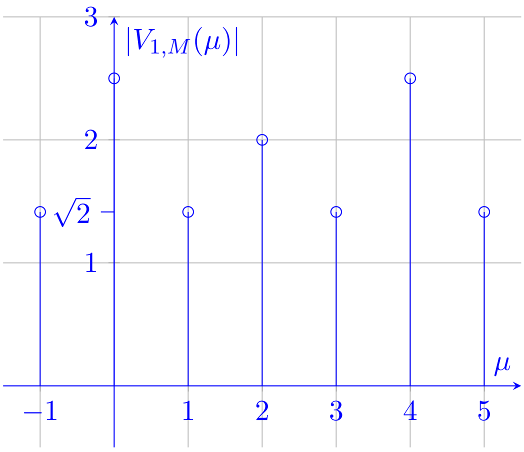
(a) Wie lässt sich der Mittelwert $\overline{v}_1$ einer diskreten Folge $v_1(n)$ der Länge M aus dem Spektrum $V_{1,M}(\mu)$ bestimmen? Geben Sie den allgemein gültigen Zusammenhang sowie den Mittelwert $\overline{v}_1$ an. (3 P)

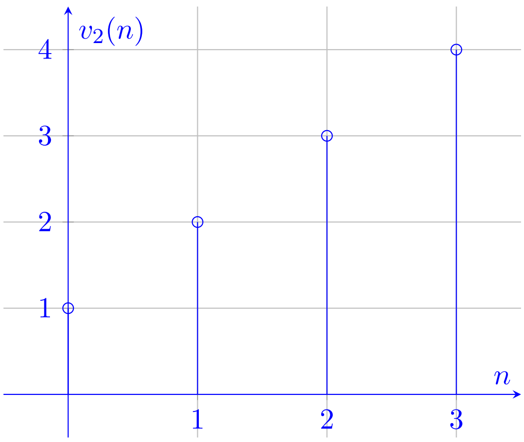
$$\overline{v}_1 = \frac{1}{M} V_{1,M}(0)$$

somit folgt

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}.$$

(b) Skizzieren Sie den Betrag von $V_{1,M}(\mu)$ für $\mu \in \{-1, 0, \dots, 4, 5\}$ sowie die diskrete Folge $v_2(n)$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (4 P)





(c) Ist die diskrete Folge $v_1(n) = \mathrm{IDFT}\{V_{1,M}(\mu)\}$ reellwertig? Begründen Sie. (2 P)
Anhand der Frequenzkomponente $\mu = 1$ und $\mu = 3$ lässt sich für $M = 4$ die hermite-Symmetrie ablesen. Schlussfolgernd ist die diskrete Folge $v_1(n) = \mathrm{IDFT}\{V_{1,M}(\mu)\}$ reellwertig.

(d) Das Zeitsignal $v_3(n)$ ist das Ergebnis der zyklischen Faltung von $v_3(n) = v_1(n) \circledast v_2(n)$. Geben Sie das Spektrum $V_{3,M}(\mu)$ im Bereich von $\mu \in \{-1, 0, \ldots, 4, 5\}$ für $M = 4$ an. (8 P)

Berechnung der DFT für $v_2(n)$:

$$V_{2,4}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}\mu n}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,4}(0) &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
V_{2,4}(1) &= 1e^{-j0} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} + 4e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 - j2 - 3 + j4 = -2 + j2 \\
V_{2,4}(2) &= 1e^{-j0} + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} + 4e^{-j3\pi} = 1 - 2 + 3 - 4 = -2 \\
V_{2,4}(3) &= 1e^{-j0} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} + 4e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 1 + j2 - 3 - j4 = -2 - j2
\end{aligned}$$

Ausnutzen der Symmetrieeigenschaft der DFT für $V_4(\mu)$:

$$V_4(3) = V_4(-1), \qquad V_4(4) = V_4(0), \qquad V_4(5) = V_4(1)$$

Multiplikation der Spektren:

$$V_{3,4}(\mu) = V_{1,4}(\mu) \cdot V_{2,4}(\mu)$$

$$\begin{aligned}
V_{3,4}(0) &= V_{1,4}(0) \cdot V_{2,4}(0) = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25 \\
V_{3,4}(1) &= V_{1,4}(1) \cdot V_{2,4}(1) = (1 - j) \cdot (-2 + j2) = j4 \\
V_{3,4}(2) &= V_{1,4}(2) \cdot V_{2,4}(2) = (-2) \cdot (-2) = 4 \\
V_{3,4}(3) &= V_{1,4}(3) \cdot V_{2,4}(3) = (1 + j) \cdot (-2 - j2) = -j4
\end{aligned}$$

Zusammenfassend:

$$V_{1,3}(n) = \begin{cases} -j4, & \text{für } \mu = -1, \\ 25, & \text{für } \mu = 0, \\ j4, & \text{für } \mu = 1, \\ 4, & \text{für } \mu = 2, \\ -j4, & \text{für } \mu = 3, \\ 25, & \text{für } \mu = 4, \\ j4, & \text{für } \mu = 5. \end{cases}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die diskrete Fourier-Transformierte $V_{4,M}(\mu)$ einer diskreten Folge $v_4(n)$ der Länge $M = 4$:

$$V_{4,M}(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{für } \mu = 0, \\ -j2, & \text{für } \mu = 1, \\ 0, & \text{für } \mu = 2, \\ j2, & \text{für } \mu = 3. \end{cases}$$

(e) Geben Sie die Formel für die inverse diskrete Fourier-Transformation an und berechnen Sie das Zeitsignal $v_4(n)$ aus dem Spektrum $V_{4,M}(\mu)$. (6 P)

Die IDFT ist definiert als:

$$v_4(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_{4,M}(\mu) e^{j\frac{2\pi}{M}\mu n}$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$v_4(n) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{3} V_{4,M}(\mu) e^{j\frac{2\pi}{4}\mu n}$$

$$\begin{aligned}
v_4(0) &= \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 0} + j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 0}\right] = \frac{1}{4}\left[-j2 + j2\right] = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0 \\
v_4(1) &= \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 1} + j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 1}\right] = \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\frac{\pi}{2}} + j2e^{j\frac{3\pi}{2}}\right] \\
v_4(1) &= \frac{1}{4}\left[-j2\cdot j + j2\cdot(-j)\right] = \frac{1}{4}\left[-2(-1) + 2(+1)\right] = \frac{1}{4}\left[2+2\right] = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1 \\
v_4(2) &= \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 2} + j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 2}\right] = \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\pi} + j2e^{j\frac{6\pi}{2}}\right] \\
v_4(2) &= \frac{1}{4}\left[-j2\cdot(-1) + j2\cdot(-1)\right] = \frac{1}{4}\left[j2 - j2\right] = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0 \\
v_4(3) &= \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 3} + j2e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 3}\right] = \frac{1}{4}\left[-j2e^{j\frac{3\pi}{2}} + j2e^{j\frac{9\pi}{2}}\right] \\
v_4(3) &= \frac{1}{4}\left[-j2\cdot(-j) + j2\cdot j\right] = \frac{1}{4}\left[2(-1) + 2(-1)\right] = \frac{1}{4}\left[-2-2\right] = \frac{1}{4}\cdot(-4) = -1
\end{aligned}$$

Zusammenfassend:

$$v_4(n) = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0, \\ 1, & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{für } n = 2, \\ -1, & \text{für } n = 3. \end{cases}$$

(f) Beweisen Sie $V_M(-\mu) = V_M^*(\mu)$ für $v(n) \in \mathbb{R}$. (3 P)

$$\begin{aligned}
V_M(-\mu) &= V_{M\,re,ge}(-\mu) + jV_{M\,im,un}(-\mu), \\
&= V_{M\,re,ge}(\mu) - jV_{M\,im,un}(\mu), \\
&= V_M^*(\mu).
\end{aligned}$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei ein kontinuierliches Signal $u_1(t) = \sin(\pi f_s t)$, wobei f_s die Abtastfrequenz ist und t die Zeit.

(g) Diskretisieren Sie das kontinuierliche Signal $u_1(t)$ mit einer Abtastfrequenz $f_s = 1000$ Hz und $t_n = \frac{n}{f_s}$ für $n \in \mathbb{Z}$. (3 P)

Das kontinuierliche Signal $u_1(t) = \sin(\pi f_s t)$ wird diskretisiert, indem $t_n = \frac{n}{f_s}$ gesetzt wird:

$$u_1(n) = \sin\left(\pi f_s \cdot \frac{n}{f_s}\right) = \sin(\pi n)$$

somit folgt

$$u_1(n) = 0\,\forall\, n \in \mathbb{Z}$$

(h) Geben Sie die Grundfrequenz f des Signals $u_1(t)$ an. Welches Phänomen tritt für die ermittelten Grundfrequenz bei der Abtastung auf? Begründen Sie. (4 P)

Frequenz des Signals $u_1(t)$

$$\sin(\pi f_s t) = \sin(2\pi f t)$$

$$f = \frac{f_s}{2}$$

Die Grundfrequenz f des Signals $u_1(t)$ entspricht genau der Nyquist-Frequenz. Bei der Abtastung eines Sinussignals mit der Nyquist-Frequenz kommt es zum Sonderfall, dass dieser in seinen Nullstellen abgetastet wird. Um einen generellen Informationsverlust zu vermeiden, sollte die Abtastfrequenz mit

$$f_s > 2 \cdot f_{\max}$$

gewählt werden.

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei ein kontinuierliches System mit den Polstellen $s_{\infty,1} = -j$ und $s_{\infty,2} = j$ und den Nullstellen $s_{0,1} = -\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}$, $s_{0,2} = -\frac{3}{2} - j\frac{1}{2}$ und $s_{0,3} = 3$.

(a) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm des gegebenen Systems. Achten Sie dabei auf eine vollständige Beschriftung. (4 P)

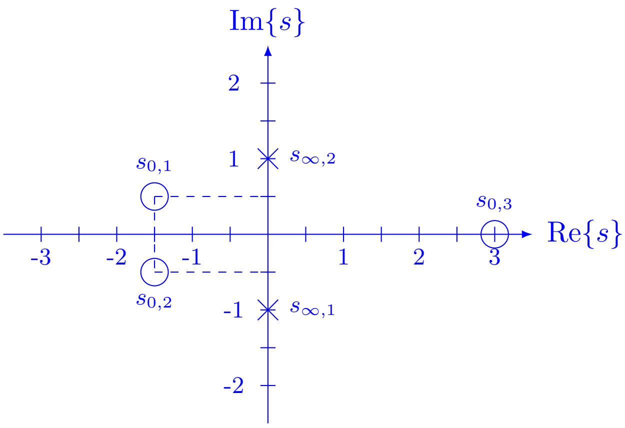


Abbildung 3: PN-Diagramm des gegebenen Systems.

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $H(s)$ in Polynomdarstellung. Es gelte $H(2) = -5$. (5 P)

$$
\begin{aligned}
H(s) &= K \cdot \frac{\Big(s - (-\frac{3}{2} + j\frac{1}{2})\Big)\Big(s - (-\frac{3}{2} - j\frac{1}{2})\Big)(s-3)}{\Big(s - (-j)\Big)(s-j)} \\
&= K \cdot \frac{\Big(s + \frac{3}{2} - j\frac{1}{2}\Big)\Big(s + \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}\Big)(s-3)}{(s+j)(s-j)} \\
&= K \cdot \frac{\Big((s+\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}\Big)(s-3)}{s^2+1} \\
&= K \cdot \frac{(s^2 + 3s + \frac{5}{2})(s-3)}{s^2+1} \\
&= K \cdot \frac{s^3 - \frac{13}{2}s - \frac{15}{2}}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Mit $H(2) = -5$ gilt:

$$
H(2) = K \cdot \frac{2^3 - \frac{13}{2} \cdot 2 - \frac{15}{2}}{2^2+1} = -5
$$

$$\rightarrow K = \frac{-5}{-\frac{5}{2}} = 2$$

Somit ergibt sich für die Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{2s^3 - 13s - 15}{s^2 + 1}$$

(c) Ist das System stabil und reellwertig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Das System ist nicht stabil, da mehr Nullstellen als Polstellen vorhanden sind. Der Zählergrad ist somit höher als der Nennergrad, wodurch es mindestens einen Pol bei $s \rightarrow \infty$ gibt.
Das System ist reellwertig, da die Pol- und Nullstellen reellwertig sind bzw. in komplex konjugierten Paaren vorliegen.

Es wird für die folgenden Aufgabenteile angenommen, dass eine zusätzliche Polstelle $s_{\infty,3} = -1$ existiert.

(d) Das gegebene System ist gemischtphasig. Wie muss vorgegangen werden, wenn das System in einen minimalphasigen Anteil und einen Allpass-Anteil zerlegt werden soll? Ist diese Zerlegung immer möglich? (3 P)
In einem minimalphasigen System liegen alle Nullstellen in der linken s-Ebene. Die Nullstelle, die in der rechten s-Ebene liegt, muss also an der imaginären Achse gespiegelt werden. Alle weiteren gegebenen Pol- und Nullstellen gehören zum minimalphasigen Anteil.

Um die zusätzliche Nullstelle im Gesamtsystem zu kompensieren, muss im Allpass-System an selber Stelle in der linken s-Ebene eine Polstelle eingefügt werden. Außerdem gehört die Nullstelle auf der rechten s-Ebene zum Allpass-System.

Die zusätzliche Nullstelle im minimalphasigen Anteil und der zusätzliche Pol im Allpass-Anteil kürzen sich bei der Multiplikation $H(s) = H_{\text{min}}(s) \cdot H_{\text{all}}(s)$.

Diese Zerlegung ist für jedes gemischtphasige System möglich.

(e) Geben Sie die Pol- und Nullstellen für den minimalphasigen Anteil und den Allpass-Anteil an. (3 P)
Minimalphasiger Anteil:
$s_{0,1} = -\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}$, $s_{0,2} = -\frac{3}{2} - j\frac{1}{2}$ und $s_{0,3} = -3$
$s_{\infty,1} = -j$, $s_{\infty,2} = j$ und $s_{\infty,3} = -1$

Allpass-Anteil:
$s_0 = 3$
$s_\infty = -3$

(f) Wäre eine Aufteilung in ein maximalphasiges System und ein Allpass-System im Allgemeinen sinnvoll? Begründen Sie. (3 P)
Die Aufteilung in ein maximalphasiges System und ein Allpass-System ist nicht sinnvoll.

Bei einem maximalphasigen System liegen alle Nullstellen in der rechten s-Ebene.

Somit müssten Nullstellen, die in der linken s-Ebene liegen, an der imaginären Achse gespiegelt werden. Diese müssen wiederum im Allpass-Anteil durch das Hinzufügen von Polstellen an derselben Stelle wie die gespiegelten Nullstellen kompensiert werden. Das Allpass-System wäre somit nicht stabil, da die hinzugefügten Polstellen dann in der rechten s-Ebene liegen.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei ein diskretes, reellwertiges System mit der Impulsantwort $h_0(n)$ für $n \in [0,7]$ in Abbildung 4. Außerhalb des Bereichs $n \in [0,7]$ sei die Impulsantwort Null.

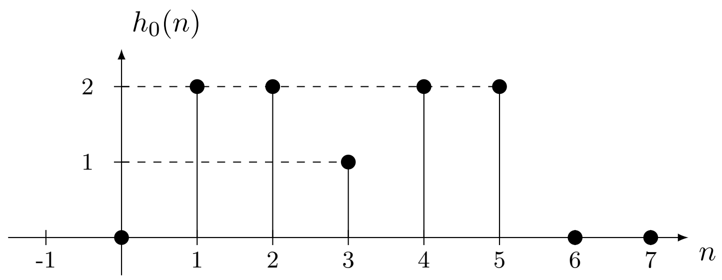


Abbildung 4: Impulsantwort $h_0(n)$ für $n \in [0,7]$ des diskreten, reellwertigen Systems.

(g) Geben Sie einen Ausdruck für die Funktionsgleichung von $h_0(n)$ bestehend aus Impuls- und Sprungfunktionen an. (3 P)

$$h_0(n) = 2\,\gamma_{-1}(n-1) - \gamma_0(n-3) - 2\,\gamma_{-1}(n-6)$$

(h) Geben Sie den allgemeinen Zusammenhang an, mit dem die Sprungantwort $h_{-1}(n)$ aus der Impulsantwort $h_0(n)$ berechnet werden kann. (2 P)

$$h_{-1}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} h_0(\kappa)$$

(i) Zeichnen Sie die Sprungantwort $h_{-1}(n)$ für $n \in [0,7]$ mit allen Achsenbeschriftungen. (5 P)

(j) Geben Sie mit Hilfe der Zeichnung aus (*i*) einen Ausdruck für die Funktionsgleichung von $h_{-1}(n)$ an. (3 P)

$$h_{-1}(n) = 2\,\gamma_{-2}(n) - \gamma_{-1}(n-3) - 2\,\gamma_{-2}(n-5)$$

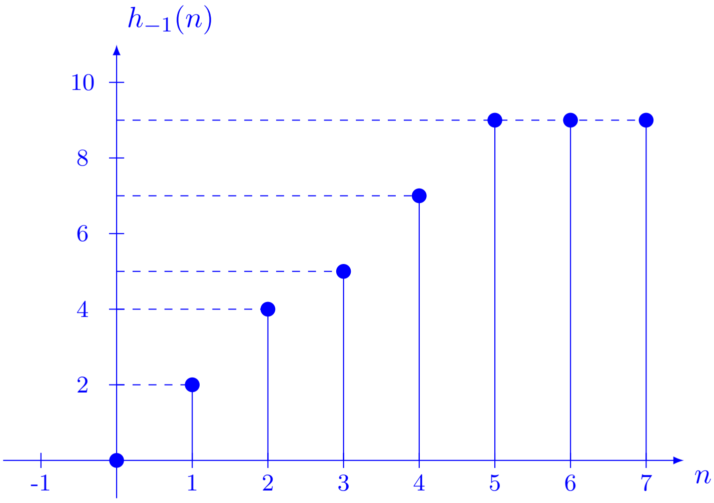


Abbildung 5: Sprungantwort $h_{-1}(n)$ für $n \in [0, 7]$ des diskreten, reellwertigen Systems.

(k) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl anhand der Impulsantwort $h_0(n)$ als auch anhand der Sprungantwort $h_{-1}(n)$. (2 P)

Das System ist stabil, weil die Impulsantwort endlich (finit) ist und die Sprungantwort gegen einen festen Wert konvergiert.

Dies ist eine leere Seite.