

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2025

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 23.09.2025

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/35	/34	/31

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2025

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: OS40 -Norbert-Gansel-Hörsaal
Datum: 23.09.2025
Beginn: 09:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (35 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Die komplexen Fourier-Reihenoeffizienten c_μ des zeitkontinuierlichen Signals $v(t) \in \mathbb{R}$ sind gegeben durch:

$$c_\mu = \begin{cases} 2 & , \mu = -4, \\ j\frac{1}{4} & , \mu = -3, \\ \frac{3}{2} - j\frac{1}{2} & , \mu = -2, \\ 3e^{j2\pi\mu} & , \mu = 0, \\ \frac{3}{2} + j\frac{1}{2} & , \mu = 2, \\ -j\frac{1}{4} & , \mu = 3, \\ 2 & , \mu = 4, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie aus den komplexen Fourier-Reihenoeffizienten die zugehörigen trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten c_0 , a_μ und b_μ des Signals $v(t)$ für $\mu \in \mathbb{N}$. (4 P)

Mit $a_\mu = 2 \operatorname{Re} \{c_\mu\}$ und $b_\mu = -2 \operatorname{Im} \{c_\mu\}$ folgt:

$$c_0 = 3e^{j2\pi \cdot 0} = 3, \quad a_\mu = \begin{cases} 3 & , \mu = 2, \\ 4 & , \mu = 4, \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} -1 & , \mu = 2, \\ \frac{1}{2} & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Geben Sie die Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe an und bestimmen Sie hiermit das Signal $v(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$. Ordnen Sie hierbei die im Ergebnis vorhandenen Terme in Bezug auf die enthaltenen Frequenzanteile (in Relation zu ω_0). (3 P)

Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Daraus folgt für $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= 3 + 3 \cos\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right) + 4 \cos\left(4 \frac{2\pi}{T} t\right) + \left(-\sin\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right)\right) + \frac{1}{2} \sin\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) \\ &= 3 + 3 \cos(2\omega_0 t) - \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t) + 4 \cos(4\omega_0 t). \end{aligned}$$

Das Signal $v(t)$ wird nun mit der Abtastfrequenz $\omega_A = 5\omega_0$ abgetastet, woraus das zeitdiskrete Signal $v_A(n)$ resultiert.

- (c) Begründen Sie, ob das Abtasttheorem bei der Abtastung des Signals $v(t)$ mit der (3 P)

Abtastfrequenz ω_A eingehalten wird. Welche Folgen hätte die Verletzung des Abtasttheorems?

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Tiefpass-Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz ω_B (bzw. ein Bandpass-Signal mit der Bandbreite ω_B), genau dann exakt rekonstruierbar ist, wenn es mit der Abtastfrequenz ω_A abgetastet wurde:

$$\omega_A \geq 2\omega_B.$$

Somit gilt für die Abtastung von $v(t)$ mit $\omega_B = 4\omega_0$ (ablesbar in Maximalfrequenz in $v(t)$ oder den maximalen trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten):

$$2\omega_B = 8\omega_0 \not\geq 5\omega_0 = \omega_A.$$

Dementsprechend wird das Abtasttheorem hier verletzt.

Bei einer Verletzung des Abtasttheorems können unerwünschte Signalkomponenten (**Aliasing**) im diskretisierten Signal auftreten. Dadurch kann es zur Maskierung von erwünschten Signalkomponenten kommen, was zu einem Informationsverlust führt. Somit kann das ursprüngliche Zeitsignal $v(t)$ nicht mehr vollständig aus dem diskretisierten Signal $v_A(n)$ rekonstruiert werden.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$x(t) = -\frac{5}{2} + \sin(3\omega_0 t) + 2 \sin^2(6\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin^2(\omega_0 t) + 2 \cos^2(6\omega_0 t).$$

- (d) Bringen Sie das Signal $x(t)$ in eine Form, die für den Koeffizientenvergleich mit der trigonometrischen Fourier-Reihe geeignet ist. (5 P)

Mit den trigonometrischen Zusammenhängen

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

und

$$\frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] = \sin^2(x)$$

ergibt sich:

$$x(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2\omega_0 t) + \sin(3\omega_0 t)$$

- (e) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal $x(t)$ jeweils die geraden und ungeraden Wechselanteile. (2 P)

$$x(t) = -\frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{4} \cos(2\omega_0 t)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sin(3\omega_0 t)}_{\text{ungerade}}$$

- (f) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten des Signals $x(t)$. (2 P)

$$c_0 = -\frac{1}{4}, \quad a_\mu = \begin{cases} -\frac{1}{4} & , \mu = 2, \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} 1 & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

- (g) Wie lässt sich der Gleichanteil eines Zeitsignals anhand der Koeffizienten von dessen Fourier-Reihe bestimmen? Geben Sie den Gleichanteil des Signals $x(t)$ an. (1 P)
Der Fourier-Reihenkoeffizient c_0 entspricht dem Gleichanteil des Signals. Dementsprechend ergibt sich für $x(t)$ ein Gleichanteil von $c_0 = -\frac{1}{4}$.

- (h) Geben Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$ an. (4 P)

Hinweis: Eine explizite Berechnung der Fourier-Transformation ist nicht notwendig!

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung des Spektrums $X(j\omega)$:

$$\begin{aligned} a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) &\circ \bullet a_1 V_1(j\omega) + a_2 V_2(j\omega) \\ \cos(\omega_0 t) &\circ \bullet \pi [\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)] \\ \sin(\omega_0 t) &\circ \bullet j\pi [\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0)] \\ e^{j\omega_0 t} &\circ \bullet 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$X(j\omega) = -\frac{\pi}{2}\delta_0(\omega) - \frac{\pi}{4}[\delta_0(\omega + 2\omega_0) + \delta_0(\omega - 2\omega_0)] + j\pi[\delta_0(\omega + 3\omega_0) - \delta_0(\omega - 3\omega_0)].$$

- (i) Skizzieren Sie das Spektrum $X(j\omega)$ im Bereich $\omega \in [-3\omega_0, 3\omega_0]$ mit allen Achsenbeschriftungen. Stellen Sie hierfür die reellen und imaginären Frequenzkomponenten in je einem eigenen Diagramm dar. (4 P)

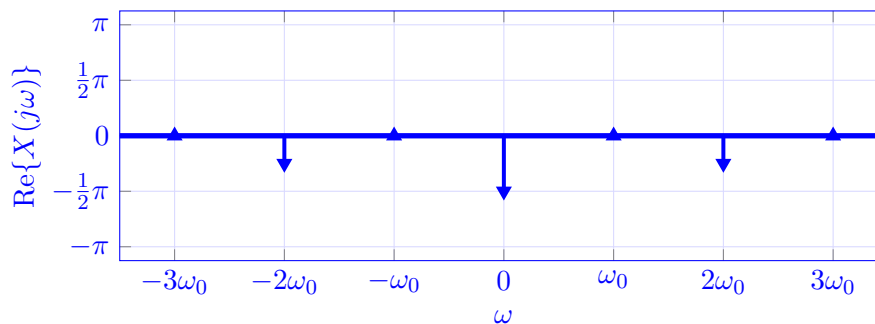


Abbildung 1: Realteil des Spektrums $X(j\omega)$.

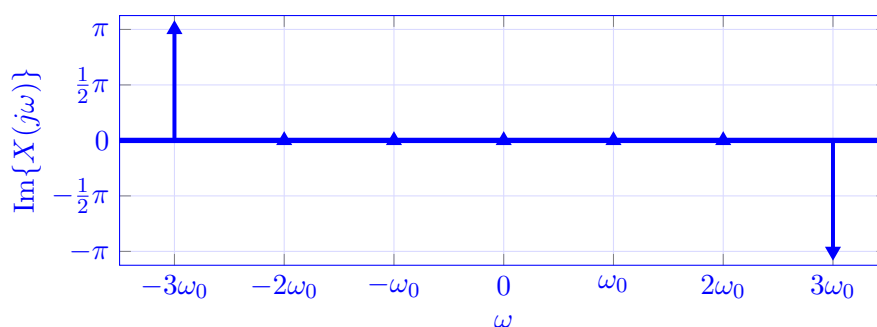


Abbildung 2: Imaginärteil des Spektrums $X(j\omega)$.

- (j) Erläutern Sie, wie die Periodizität eines Zeitsignals bestimmt werden kann, welches die Summe mehrerer periodischer Teilfunktionen ist. Bestimmen Sie dementsprechend die Periode T_x des Signals $x(t)$. (4 P)

Die Summe mehrerer periodischer Teilfunktionen ist dann periodisch, wenn die Periodendauern aller Teilfunktionen ganzzahlige Vielfache voneinander sind. Es muss also gelten:

$$T_x = \lambda_a T_a = \lambda_b T_b, \quad \text{mit } \lambda_a, \lambda_b \in \mathbb{N}.$$

Mit den zeitabhängigen periodischen Signalanteilen $-\frac{1}{4} \cos(2\omega_0 t)$ mit Periode $T_a = \frac{2\pi}{2\omega_0}$ und $\sin(3\omega_0 t)$ mit Periode $T_b = \frac{2\pi}{3\omega_0}$ folgt als Periode T_x für $x(t)$:

$$T_x = 2T_a = 3T_b = T.$$

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

- (k) Bei der Darstellung von nur **stückweise** stetigen Zeitsignalen mittels Fourier-Reihenkoeffizienten treten in der Umgebung von Sprungstellen unerwünschte Effekte auf. Erklären Sie, warum es dazu kommt, wie diese Effekte aussehen und wie die Bezeichnung dafür lautet. (3 P)

Ein stückweise stetiges Zeitsignal, z.B. ein Rechtecksignal, hat an den Übergängen zwischen den stetigen Signalabschnitten Sprünge mit theoretisch unendlich steiler Flanke. Damit folgt eine unendlich große Bandbreite in der spektralen Darstellung. Die Darstellung mit Fourier-Reihenkoeffizienten basiert dagegen auf einer endlichen Menge an Koeffizienten, daher lassen sich derartige Sprünge nur begrenzt genau abbilden.

Es folgt eine implizite Tiefpassfilterung, die zu Überschwingungen im rücktransformierten Signal sorgt. Dabei werden die Sprungstellen mit höherer Anzahl an Koeffizienten schärfer aufgelöst.

Dieser Zusammenhang ist als Gibb'sches Phänomen bekannt.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sind die diskrete Fourier-Transformierte $V_{1,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_1(n)\}$ und die diskrete Folge $v_2(n) = \text{IDFT}\{V_{2,M}(\mu)\}$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{1,M}(\mu) = \begin{cases} 6 & , \mu = 0, \\ 2 + j2 & , \mu = 1, \\ -3 & , \mu = 2, \\ 2 - j2 & , \mu = 3, \end{cases} \quad v_2(n) = \begin{cases} 2 & , n = 0, \\ 0 & , n = 1, \\ 1 & , n = 2, \\ 1 & , n = 3. \end{cases}$$

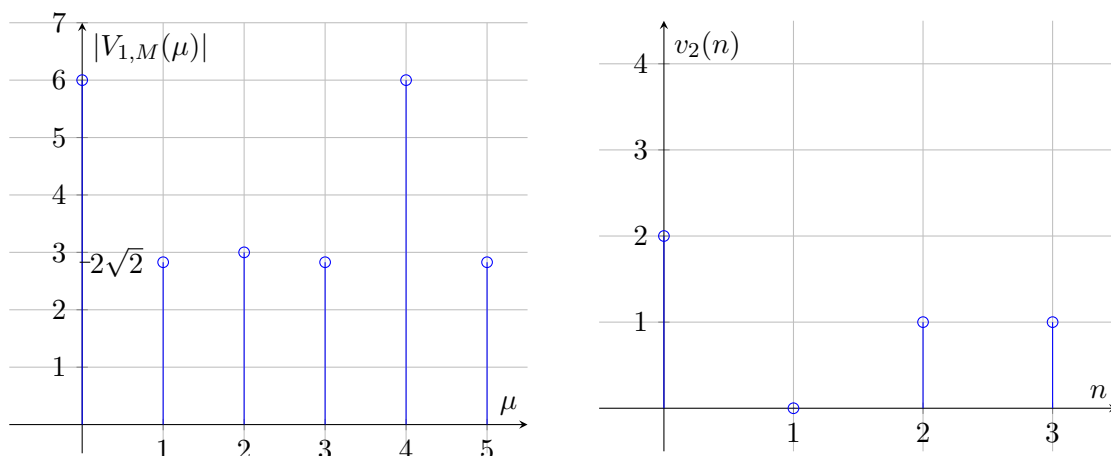
- (a) Wie lässt sich der Mittelwert \bar{v}_1 einer diskreten Folge $v_1(n)$ der Länge M aus dem Spektrum $V_{1,M}(\mu)$ bestimmen? Geben Sie den allgemein gültigen Zusammenhang sowie den Mittelwert \bar{v}_1 an. (3 P)

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{M} V_{1,M}(0)$$

somit folgt

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}.$$

- (b) Skizzieren Sie den Betrag von $V_{1,M}(\mu)$ für $\mu \in \{0, \dots, 4, 5\}$ sowie die diskrete Folge $v_2(n)$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (4 P)



- (c) Bestimmen Sie die DFT $V_{2,M}(\mu)$ der diskreten Folge $v_2(n)$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. (5P)

$$V_{2,4}(0) = 2 + 0 + 1 + 1 = 4,$$

$$\begin{aligned} V_{2,4}(1) &= 2 + 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot j = 1 + j, \\ V_{2,4}(2) &= 2 + 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2, \\ V_{2,4}(3) &= 2 + 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-j) = 1 - j, \\ V_{2,4}(4) &= V_2(0). \end{aligned}$$

- (d) Das Zeitsignal $v_3(n)$ ist das Ergebnis der zyklischen Faltung $v_3(n) = v_1(n) \otimes v_2(n)$. Berechnen Sie das Spektrum $V_3(\mu) = V_1(\mu) \cdot V_2(\mu)$ im Bereich $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. (4P)

Multiplikation der Spektren:

$$V_{3,4}(\mu) = V_{1,4}(\mu) \cdot V_{2,4}(\mu)$$

$$\begin{aligned} V_{3,4}(0) &= 6 \cdot 4 = 24, \\ V_{3,4}(1) &= (2 + j2)(1 + j) = 2 + j2 + j2 + j^2 2 = 2 + j4 - 2 = j4, \\ V_{3,4}(2) &= -3 \cdot 2 = -6, \\ V_{3,4}(3) &= (2 - j2)(1 - j1) = 2 - j2 - j2 + j^2 = 2 - j4 - 2 = -j4. \end{aligned}$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sei die diskrete Fourier-Transformierte $V_{4,M}(\mu)$ einer diskreten Folge $v_4(n)$ der Länge $M = 4$:

$$V_{4,M}(\mu) = \begin{cases} 3 & , \mu = 0, \\ j4 & , \mu = 1, \\ 5 & , \mu = 2, \\ -j4 & , \mu = 3. \end{cases}$$

- (e) Geben Sie die Formel für die inverse diskrete Fourier-Transformation an und berechnen Sie das Zeitsignal $v_4(n)$ aus dem Spektrum $V_{4,M}(\mu)$. (6 P)

Die IDFT ist definiert als:

$$v_4(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_{4,M}(\mu) e^{j \frac{2\pi}{M} \mu n}$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$v_4(n) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 V_{4,4}(\mu) e^{j\frac{2\pi}{4}\mu n}$$

$$v_4(0) = \frac{1}{4} (3 + j4 + 5 - j4) = \frac{1}{4} \cdot (3 + 5) = \frac{8}{4} = 2,$$

$$v_4(1) = \frac{1}{4} (3 - 4 + (-5) - 4) = \frac{-10}{4} = -2.5,$$

$$v_4(2) = \frac{1}{4} \cdot (3 - j4 + 5 + j4) = \frac{8}{4} = 2,$$

$$v_4(3) = \frac{1}{4} (3 + 4 - 5 + 4) = 1.5.$$

Zusammenfassend:

$$v_4(n) = \begin{cases} 2 & , n = 0, \\ -2.5 & , n = 1, \\ 2 & , n = 2, \\ 1.5 & , n = 3. \end{cases}$$

- (f) Handelt es sich bei der diskreten Folge $v_4(n)$ um eine reellwertige oder komplexwertige Folge? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation. (3 P)

Die Folge $v_4(n)$ ist reellwertig, da $V_{4,4}(\mu)$ die Eigenschaft der *Hermitesymmetrie* erfüllt.

Für eine diskrete Folge $v(n)$ der Länge M gilt: Wenn $v(n)$ reellwertig ist, dann muss das dazugehörige Spektrum $V_{4,4}(\mu)$ folgende Symmetrieeigenschaft erfüllen:

$$V_{4,4}(M - \mu) = V_{4,4}^*(\mu) \quad \text{für } \mu = 1, \dots, M$$

Dies bedeutet: Das DFT-Spektrum ist konjugiert komplex um den Nullfrequenzanteil. Im gegebenen Fall ($M = 4$) ergibt sich:

$$V_{4,4}(1) = j4, \quad V_{4,4}(3) = -j4 = V_{4,4}^*(1) \quad \text{und} \quad V_{4,4}(2) = 5 \in \mathbb{R}$$

Auch $V_{4,4}(0) = 3$ ist reell. Damit ist die Hermitesymmetrie vollständig erfüllt.

Folgerung: Da das Spektrum die Hermitesymmetrie aufweist, ist die zugehörige Zeitreihe $v_4(n)$ reellwertig.

- (g) Nennen Sie eine Eigenschaft der DFT bezüglich Periodizität und beweisen Sie diese Eigenschaft formal. (4P)

Die DFT ist periodisch mit der Periodenlänge M : $V(\mu + M) = V(\mu)$

$$V(\mu + M) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} (\mu+M)n} = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu n} e^{-j 2\pi n} = V(\mu)$$

Da $e^{-j 2\pi n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, folgt die Periodizität.

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

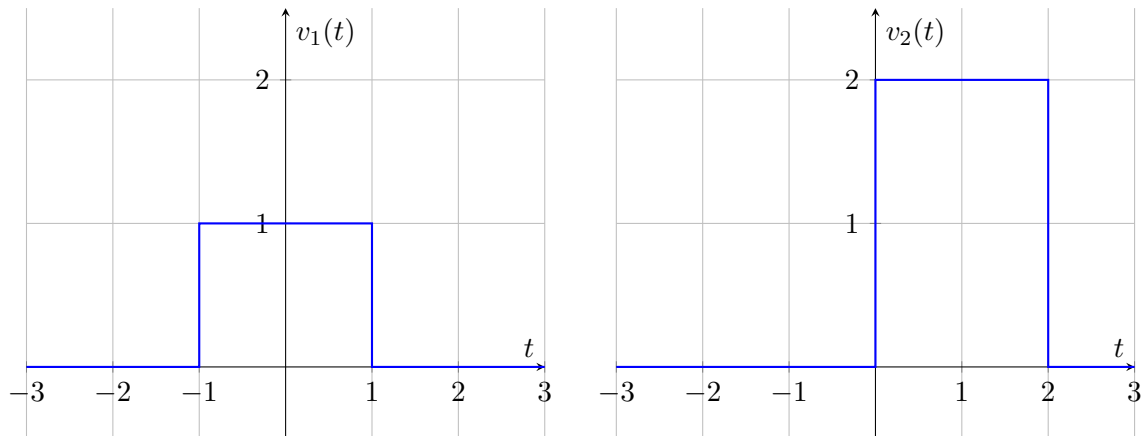
- (h) Was ergibt die Faltung zweier Rechteckfunktionen gleicher Breite? (1 P)

Die Faltung zweier Rechteckfunktionen gleicher Breite T ergibt eine Dreiecksfunktion

$$\text{rect}_T(t) * \text{rect}_T(t) = \text{tri}_T(t)$$

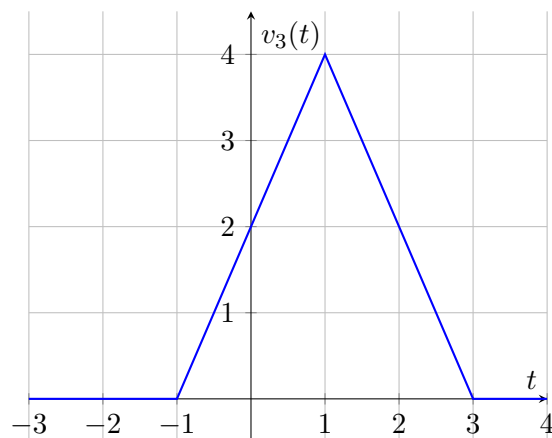
Diese besitzt eine Basisbreite von $2T$, steigt im Intervall $[-T, 0]$ linear an und fällt im Intervall $[0, T]$ linear ab. Ihr Maximum liegt bei $t = 0$.

Gegeben seien die kontinuierlichen Rechteckfunktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ mit der Breite $T = 2$.



(i) Zeichnen Sie die Funktion $v_3(t) = v_1(t) * v_2(t)$. Denken Sie an alle Achsenbeschriftungen. (4 P)

Die Funktion $v_3(t) = v_1(t) * v_2(t)$ ergibt sich als Faltung eines Rechtecks der Höhe 1 und Breite 2 (zentriert bei $t = 0$) mit einem Rechteck der Höhe 2 und Breite 2 (zentriert bei $t = 1$).



Aufgabe 3 (31 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei ein diskretes System mit der Übertragungsfunktion $H(z)$:

$$H(z) = K \frac{z - z_0}{(z - (1 + j))(z - z_\infty)}$$

- (a) In Abbildung 3 sind drei unvollständige Pol-Nullstellen-Diagramme dieses Systems (3 P) gegeben. Ergänzen Sie in diesen unter Berücksichtigung von $H(z)$ Pol- und Nullstellen so, dass das System in (A) maximalphasig, in (B) stabil und in (C) reellwertig wird.

Hinweis: Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

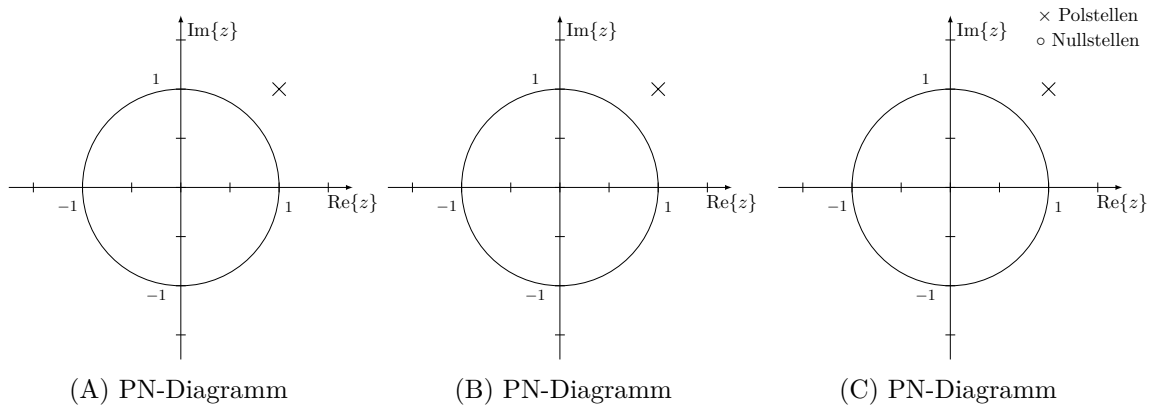


Abbildung 3: Unvollständige Pol-Nullstellen-Diagramme von $H(z)$.

Mögliche Lösung:

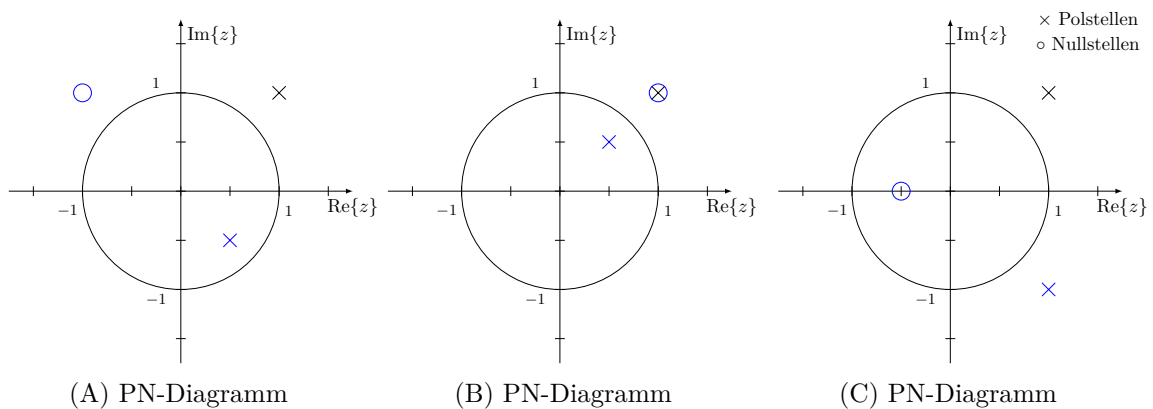


Abbildung 4: Ergänznte Pol-Nullstellen-Diagramme von $H(z)$.

(b) Begründen Sie, warum Sie die Pol- und Nullstellen in Teilaufgabe (a) entsprechend platziert haben. (3 P)

(A) In einem maximalphasigen System muss die Nullstelle außerhalb des Einheitskreises liegen. Die Lage der Polstellen ist dafür unerheblich.

(B) In einem stabilen System müssen die Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen. Da eine Polstelle außerhalb liegt, muss diese mit einer Nullstelle kompensiert werden.

(C) In einem reellwertigen System müssen die Pol- und Nullstellen reell sein oder als komplex konjugiertes Paar vorliegen. Da die vorgegebene Polstelle komplexwertig ist, muss die ergänzte Polstelle zu dieser komplex konjugiert sein. Die Nullstelle muss reellwertig sein.

(c) Es gelte nun $z_0 = -\frac{3}{4}$ und $z_\infty = 1 - j$. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion in Polynomdarstellung. Es gelte $H(3) = \frac{3}{2}$. (4 P)

$$\begin{aligned}
 H(z) &= K \cdot \frac{z + \frac{3}{4}}{(z - (1 + j))(z - (1 - j))} \\
 &= K \cdot \frac{z + \frac{3}{4}}{((z - 1) - j)((z - 1) + j)} \\
 &= K \cdot \frac{z + \frac{3}{4}}{(z - 1)^2 + 1} \\
 &= K \cdot \frac{z + \frac{3}{4}}{z^2 - 2z + 2} \\
 &\dots \text{ mit } H(3) = \frac{3}{2} \text{ folgt } \dots \\
 H(3) &= K \cdot \frac{3 + \frac{3}{4}}{3^2 - 2 \cdot 3 + 2} = \frac{3}{2} \\
 K &= 2 \\
 \rightarrow H(z) &= \frac{2z + \frac{3}{2}}{z^2 - 2z + 2}
 \end{aligned}$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei ein kontinuierliches System mit der folgenden Übertragungsfunktion $H(s)$:

$$H(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)^2}$$

(d) Geben Sie die Pol- und Nullstellen des Systems an. (3 P)

Polstellen: $s_{\infty,1/2} = -1 \rightarrow$ Doppel-Polstelle

Nullstelle: $s_{0,1} = -3$

- (e) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm von $H(s)$. Denken Sie an eine vollständige Beschriftung. (4 P)

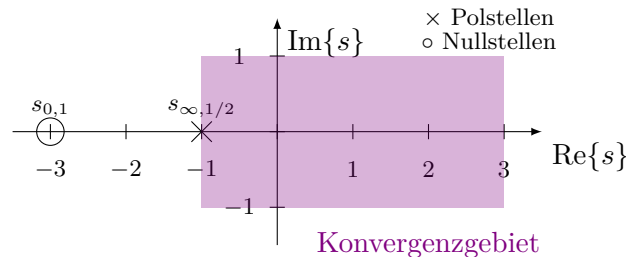


Abbildung 5: Pol-Nullstellen-Diagramm von $H(s)$.

- (f) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Systems. (4 P)
 Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung ist zur Lösung dieser Aufgabe nicht erforderlich.

Mit den Korrespondenzen $\frac{1}{(s-s_{\infty})^2} \bullet \rightarrow t e^{s_{\infty} t} \delta_{-1}(t)$ und $\frac{s}{(s-s_{\infty})^2} \bullet \rightarrow e^{s_{\infty} t} [1 + s_{\infty} t] \delta_{-1}(t)$ folgt:

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^2}$$

\bullet
 \circ

$$h(t) = e^{-t} [1-t] \delta_{-1}(t) + 3t e^{-t} \delta_{-1}(t) = [1-t+3t] e^{-t} \delta_{-1}(t) = [1+2t] e^{-t} \delta_{-1}(t)$$

- (g) Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten der Impulsantwort $h(t)$. (2 P)
 Die Impulsantwort steigt zunächst durch den Term $1+2t$ kurz an und fällt dann aufgrund des Exponentialterms e^{-t} immer weiter ab, bevor diese gegen Null konvergiert.
- (h) Ist das System kausal und stabil? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Impulsantwort und im Falle der Stabilität auch anhand des Pol-Nullstellen-Diagramms. (3 P)
 Das System ist kausal, da die Impulsantwort $h(t)$ für $t < 0$ Null ist.
 Das System ist stabil, da die Impulsantwort $h(t)$ gegen Null konvergiert und die Polstellen in der linken Halbebene liegen.
- (i) Wie wirkt sich die Lage der Pol- und Nullstellen auf das Systemverhalten aus? (2 P)
 Die Polstellen sorgen dafür, dass die tiefen Frequenzen durchgelassen werden. Die Nullstelle dämpft die hohen Frequenzen. Daher verhält sich das System wie ein Tiefpassfilter.
- (j) Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Übertragungsfunktion und begründen Sie (3 P)

Ihre Antwort. Kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet außerdem im Pol-Nullstellen-Diagramm aus Aufgabenteil (e).

Das Konvergenzgebiet liegt rechts vom größten Realteil der Polstellen. Daher gilt hier für das Konvergenzgebiet: $\operatorname{Re}\{s\} > -1$.

Dies ist eine leere Seite.