

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2026

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 22.09.2026

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/34	/33

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- ☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2026

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: CAP 3 - Hörsaal 2 und 3
Datum: 22.09.2026
Beginn: 09:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $v(t)$, dessen Fourier-Reihenoeffizienten im Folgenden per Koeffizientenvergleich bestimmt werden sollen. Es gilt mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ für $T > 0$:

$$v(t) = 4 \sin(\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t) + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\omega_0} \sin(3\omega_0 t) \right] + \sum_{k=0}^2 \cos \left(k\omega_0 t - k \frac{\pi}{2} \right).$$

- (a) Bringen Sie $v(t)$ durch Vereinfachung in eine Form, die der Definition der reellen Fourier-Reihe entspricht. (6 P)

Mit

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

ergibt sich

$$4 \sin(\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t) = 2 \sin(3\omega_0 t) - 2 \sin(\omega_0 t).$$

Außerdem gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega_0} \sin(3\omega_0 t) \right) = 3 \cos(3\omega_0 t).$$

Die Summe lautet

$$\sum_{k=0}^2 \cos \left(k\omega_0 t - k \frac{\pi}{2} \right) = 1 + \sin(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t).$$

Somit erhält man

$$v(t) = 1 - \sin(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t) + 2 \sin(3\omega_0 t) + 3 \cos(3\omega_0 t)$$

- (b) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal $v(t)$ den Gleichanteil sowie die geraden und ungeraden Wechselanteile. (3 P)

Gleichanteil

$$v_{\text{DC}}(t) = 1$$

Gerader Wechselanteil

$$v_g(t) = \cos(2\omega_0 t) + 3 \cos(3\omega_0 t)$$

Ungerader Wechselanteil

$$v_u(t) = -\sin(\omega_0 t) + 2 \sin(3\omega_0 t)$$

- (c) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten c_0 , a_μ und b_μ des Signals $v(t)$. (4 P)

Trigonometrische Fourierkoeffizienten

$$c_0 = 1,$$

$$a_\mu = \begin{cases} 0, & \mu = 1, \\ -1, & \mu = 2, \\ 3, & \mu = 3, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} -1, & \mu = 1, \\ 0, & \mu = 2, \\ 2, & \mu = 3, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

- (d) Bestimmen Sie aus den trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten die zugehörigen komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten c_μ für $\mu \in \mathbb{Z}$. (4 P)

Komplexe Fourierkoeffizienten

$$c_\mu = \begin{cases} \frac{3}{2} + j, & \mu = -3, \\ -\frac{1}{2}, & \mu = -2, \\ -\frac{j}{2}, & \mu = -1, \\ 1, & \mu = 0, \\ \frac{j}{2}, & \mu = 1, \\ -\frac{1}{2}, & \mu = 2, \\ \frac{3}{2} - j, & \mu = 3, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei das Signal $x(t)$, für welches in der folgenden Abbildung das Amplituden- und Phasenspektrum angegeben sind:

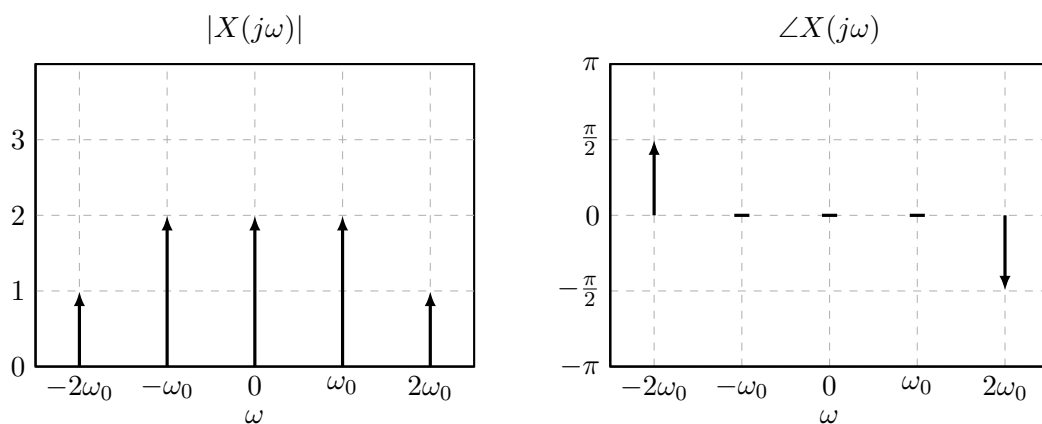


Abbildung 1: Spektrum $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$.

- (e) Bestimmen Sie aus den dargestellten Spektren die komplexen Fourier-Koeffizienten c_μ für $\mu = -2, \dots, 2$. (4 P)

Aus dem Betrags- und Phasenspektrum ergibt sich

$$c_\mu = \begin{cases} 2, & \mu = 0, \\ 2, & \mu = -1, \\ 2, & \mu = 1, \\ j, & \mu = -2, \\ -j, & \mu = 2 \end{cases}$$

- (f) Gegeben sind die Signale

$$x_1(t) = 2 + 4 \cos(\omega_0 t) - 2 \sin(2\omega_0 t)$$

und

$$x_2(t) = 2 + 4 \cos(\omega_0 t) + 2 \sin(2\omega_0 t).$$

Entscheiden Sie, welches dieser Signale zu dem in Abb. 1 gegebenen Spektrum passt und begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 P)

Es gilt

$$c_{\pm 1} = 2 \implies 4 \cos(\omega_0 t),$$

sowie

$$c_2 = -j, \quad c_{-2} = j \implies 2 \sin(2\omega_0 t).$$

Damit lautet das rekonstruierte Signal

$$x(t) = 2 + 4 \cos(\omega_0 t) + 2 \sin(2\omega_0 t).$$

Damit ist

$$x_2(t)$$

der richtige Lösungsvorschlag.

- (g) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zu dem in Abb. 1 gegebenen Spektrum korrekt sind und begründen Sie ihre Bewertung:

1. „Da das Spektrum nur aus endlich vielen Spektrallinien besteht, ist das Signal zeitlich begrenzt.“

Falsch. Ein Linienspektrum beschreibt ein periodisches Signal. Ein periodisches Signal besitzt unendliche Zeitdauer und ist daher nicht zeitlich begrenzt.

2. „Wird die Spektrallinie bei $2\omega_0$ entfernt, so ändert sich lediglich die Amplitude des Zeitsignals.“

Falsch. Wird lediglich die positive Spektrallinie entfernt, handelt es sich nicht mehr um ein reelles Signal. Es ergibt sich

$$x(t) = 2 + 4 \cos(\omega_0 t) + j e^{-j 2 \omega_0 t}.$$

3. „Die Kreisfrequenzen der beiden Wechselanteile sind ω_0 und $2\omega_0$. Daher beträgt die Kreisfrequenz des Gesamtsignals $3\omega_0$.“ (6 P)

Falsch. Es gilt $T_2 = 2\pi/2\omega_0 = T_1/2 = T/2$. Damit ist die kleinste gemeinsame Periodendauer $T_{ges} = T$. Damit gilt auch für die Kreisfrequenz $\omega_{ges} = \omega_0$.

- (h) Welcher Frequenzanteil bestimmt die minimale Kreisabtastrfrequenz nach dem Abtasttheorem? Geben Sie die erforderliche Kreisabtastrfrequenz ω_A für das Signal $x_1(t)$ an und erläutern Sie die Folge einer Unterschreitung dieser Grenze. (3 P)

Der höchste im Spektrum enthaltene Frequenzanteil besitzt die Kreisfrequenz

$$\omega_{\max} = 2\omega_0.$$

Nach dem Abtasttheorem muss die Kreisabtastrfrequenz mindestens doppelt so groß sein wie die höchste im Signal enthaltene Kreisfrequenz:

$$\boxed{\omega_A \geq 2\omega_{\max} = 4\omega_0.}$$

Wird diese Bedingung unterschritten, kommt es zu *Aliasing*. Dabei überlagern sich Spektralkopien, sodass die ursprünglichen Frequenzanteile nicht mehr eindeutig rekonstruiert werden können. Eine verlustfreie Rekonstruktion des ursprünglichen Signals ist dann nicht mehr möglich.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

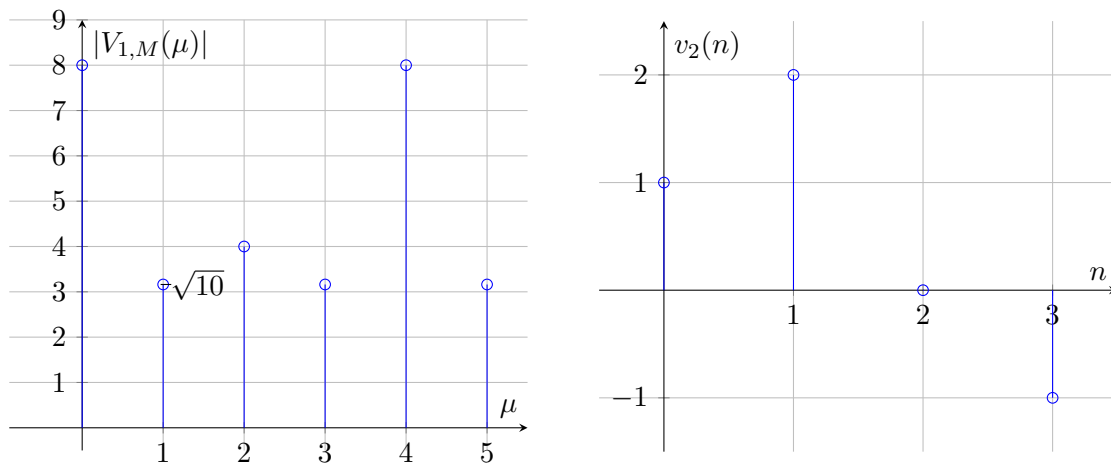
Gegeben sind die diskrete Fourier-Transformierte $V_{1,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_1(n)\}$ und die diskrete Folge $v_2(n)$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{1,M}(\mu) = \begin{cases} 8 & , \mu = 0, \\ 1 + j3 & , \mu = 1, \\ -4 & , \mu = 2, \\ 1 - j3 & , \mu = 3, \end{cases} \quad v_2(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 2 & , n = 1, \\ 0 & , n = 2, \\ -1 & , n = 3, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Erfüllt das gegebene Spektrum $V_{1,M}(\mu)$ die Hermitesymmetrie? Welche Aussage lässt sich daraus über die Zeitfolge $v_1(n)$ treffen? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 P)

Ja, es gilt $V_{1,M}(3) = 1 - j3 = V_{1,M}^*(1)$. Außerdem sind $V_{1,M}(0) = 8$ und $V_{1,M}(2) = -4$ reell. Aus der Hermitesymmetrie folgt, dass die zugehörige Zeitfolge $v_1(n)$ reellwertig ist.

- (b) Skizzieren Sie $|V_{1,M}(\mu)|$ für $\mu \in \{0, \dots, 4, 5\}$ sowie die diskrete Folge $v_2(n)$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Achten Sie auf eine vollständige Achsenbeschriftung. (4 P)



- (c) Erläutern Sie anhand Ihrer Skizze aus (b), weshalb $|V_{1,M}(4)|$ und $|V_{1,M}(5)|$ ihre gesetzten Werte annehmen. (3 P)

Das DFT-Spektrum ist periodisch mit der Periodenlänge $M = 4$, d. h. es gilt $V_{1,M}(\mu + M) = V_{1,M}(\mu)$. Daher folgt $|V_{1,M}(4)| = |V_{1,M}(0)|$ und $|V_{1,M}(5)| = |V_{1,M}(1)|$.

- (d) Welche Faltungs-Arten kennen Sie für die Faltung zweier Folgen der Länge M ? Nennen Sie den Hauptunterschied zwischen den Faltungs-Arten! (2 P)

Es gibt die *lineare* und die *zyklische* Faltung. Bei der zyklischen Faltung wird eine der beiden Folgen periodisch fortgesetzt; das Ergebnis hat die Länge M . Bei der linearen Faltung erfolgt keine periodische Fortsetzung; das Ergebnis hat die Länge $2M - 1$.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sei die diskrete Fourier-Transformierte $V_{3,M}(\mu)$ einer diskreten Folge $v_3(n)$ der Länge $M = 4$:

$$V_{3,M}(\mu) = \begin{cases} 4 & , \mu = 0, \\ j2 & , \mu = 1, \\ 0 & , \mu = 2, \\ -j2 & , \mu = 3. \end{cases}$$

- (e) Geben Sie die Formel für die inverse diskrete Fourier-Transformation an und berechnen Sie das Zeitsignal $v_3(n)$ aus dem Spektrum $V_{3,M}(\mu)$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. (6 P)

Die IDFT ist definiert als:

$$v_3(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_{3,M}(\mu) e^{j \frac{2\pi}{M} \mu n}.$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$v_3(n) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 V_{3,M}(\mu) e^{j \frac{2\pi}{4} \mu n}$$

$$v_3(0) = \frac{1}{4} (4 + j2 + 0 - j2) = 1,$$

$$v_3(1) = \frac{1}{4} (4 + j2 \cdot j + 0 + (-j2) \cdot (-j)) = \frac{1}{4} (4 - 2 - 2) = 0,$$

$$v_3(2) = \frac{1}{4} (4 - j2 + 0 + j2) = 1,$$

$$v_3(3) = \frac{1}{4} (4 + j2 \cdot (-j) + 0 + (-j2) \cdot j) = \frac{1}{4} (4 + 2 + 2) = 2.$$

Zusammenfassend:

$$v_3(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 0 & , n = 1, \\ 1 & , n = 2, \\ 2 & , n = 3. \end{cases}$$

- (f) Sie möchten das Ergebnis einer zyklischen Faltung $v_c(n) = v_a(n) \circledast v_b(n)$ zweier Folgen der Länge M bestimmen. Beschreiben Sie **zwei mögliche Vorgehensweisen** und geben Sie den Zusammenhang im Frequenzbereich an. Eine ausführliche Rechnung ist nicht erforderlich.

(5 P)

Erste Möglichkeit (Zeitbereich):

- i) $v_a(n)$ und $v_b(n)$ direkt zyklisch falten.

Zweite Möglichkeit (Frequenzbereich):

- i) $V_{a,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_a(n)\}$ und $V_{b,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_b(n)\}$ bestimmen,

- ii) $V_{c,M}(\mu) = V_{a,M}(\mu) \cdot V_{b,M}(\mu)$ im Frequenzbereich berechnen,

- iii) $v_c(n) = \text{IDFT}\{V_{c,M}(\mu)\}$ durch inverse DFT bestimmen.

Zusammenhang im Frequenzbereich:

$$V_{c,M}(\mu) = V_{a,M}(\mu) \cdot V_{b,M}(\mu).$$

- (g) Die Folge $v_3(n)$ aus (e) werde zyklisch um n_0 Stellen verschoben: $\tilde{v}_3(n) = v_3(n - n_0)$. Ändern sich die Beträge $|\tilde{V}_{3,M}(\mu)|$ gegenüber $|V_{3,M}(\mu)|$? Geben Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen $\tilde{V}_{3,M}(\mu)$ und $V_{3,M}(\mu)$ an.

(3 P)

Die Beträge ändern sich nicht, da gilt $|\tilde{V}_{3,M}(\mu)| = |V_{3,M}(\mu)|$. Eine Verschiebung im Zeitbereich bewirkt lediglich eine *Phasenverschiebung* im Frequenzbereich:

$$\tilde{V}_{3,M}(\mu) = V_{3,M}(\mu) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{M} \mu n_0}.$$

Die komplexen Anteile von $V_{3,M}(\mu)$ enthalten somit Phaseninformationen über die zeitliche Lage der Frequenzanteile, ändern aber nicht den Betrag des Spektrums.

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei die diskrete Folge $v_4(n)$:

$$v_4(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 2 & , n = 1, \\ 1 & , n = 2, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

sowie die Impulsantwort

$$h(n) = \gamma_{-1}(n) + \gamma_{-1}(n-1) - \gamma_{-1}(n-2) + \gamma_{-1}(n-3) - 2\gamma_{-1}(n-4),$$

wobei $\gamma_{-1}(n)$ die Sprungfolge bezeichnet.

- (h) Bestimmen Sie die diskrete Folge $h(n)$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ und berechnen Sie das Signal $y_L(n) = v_4(n) * h(n)$. Geben Sie außerdem die Gesamtlänge von $y_L(n)$ an. (5 P)

Mit $\gamma_{-1}(n) = 1$ für $n \geq 0$ und $\gamma_{-1}(n) = 0$ sonst ergibt sich:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 2 & , n = 1, \\ 1 & , n = 2, \\ 2 & , n = 3. \end{cases}$$

Die lineare Faltung ist definiert als:

$$y_L(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) \cdot h(n-k).$$

Für $n \in \{0, 1, \dots, 6\}$ ergibt sich:

$$y_L(n) = [1, 4, 6, 6, 5, 2].$$

Mit $M_1 = 3$ (Länge von $v(n)$) und $M_2 = 4$ (Länge von $h(n)$) folgt für die Signallänge:

$$M = M_1 + M_2 - 1 = 6.$$

Das Spektrum $Y_M(\mu)$ ergibt sich aus dem Signalflussgraphen in Abb. 2:

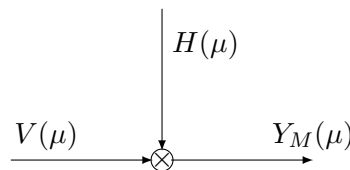


Abbildung 2: Verschaltung der gegebenen Signale.

Hierbei ist $Y_M(\mu)$ gegeben durch:

$$Y_M(\mu) = \begin{cases} 8 & , \mu = 0, \\ 2 + j2 & , \mu = 1, \\ 0 & , \mu = 2, \\ 2 - j2 & , \mu = 3. \end{cases}$$

- (i) Das Signal $y(n) = \text{IDFT}\{Y_M(\mu)\}$ entsteht durch die in Abb. 2 dargestellte Verarbeitung. Sind die Folgen $y_L(n)$ und $y(n)$ identisch? Begründen Sie Ihre Antwort. Wie kann die zyklische Faltung in die lineare Faltung überführt werden? (3 P)

Nein, die Folgen sind nicht identisch. Eine Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer *zyklischen* Faltung im Zeitbereich, während $y_L(n)$ durch *lineare* Faltung entsteht. Bereits die unterschiedlichen Signallängen ($M_L = 6$ gegenüber $M = 4$) zeigen, dass die Ergebnisse nicht übereinstimmen können.

Durch Zero-Padding der Folgen auf die Länge $M_1 + M_2 - 1$ kann die zyklische Faltung so erweitert werden, dass sie der linearen Faltung entspricht.

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

- (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Laplace-Transformation und der Fourier-Transformation. (2 P)

Die Fourier-Transformation ist ein Spezialfall der Laplace-Transformation. Sie ergibt sich durch Auswertung der Laplace-Transformierten auf der imaginären Achse $s = j\omega$.

- (b) Unter welcher Bedingung kann die Fourier-Transformierte eines Signals aus seiner Laplace-Transformation bestimmt werden? (2 P)

Die Fourier-Transformation existiert genau dann, wenn die imaginäre Achse $\operatorname{Re}(s) = 0$ im Konvergenzbereich der Laplace-Transformierten liegt.

Gegeben sei nun das Signal

$$v(t) = e^{-2t} \delta_{-1}(t).$$

- (c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $V(s)$ von $v(t)$ durch Lösen des entsprechenden Integrals und geben Sie den Konvergenzbereich an. (6 P)

Hinweis: Sollten Sie das Integral nicht lösen können, dürfen Sie die entsprechende Korrespondenz verwenden. Die Punkte für die Herleitung durch das Integral entfallen in diesem Fall.

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}\{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\ &\dots \text{ mit } \delta_{-1}(t) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ ergibt sich } \dots \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+s)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2+s} e^{-(2+s)t} \right]_0^{\infty} \\ &\dots \text{ mit } e^{-\infty} \rightarrow 0 \text{ und } e^0 = 1 \text{ ergibt sich } \dots \\ &= \frac{1}{2+s} \end{aligned}$$

Damit das Integral konvergiert, muss $\operatorname{Re}\{s + 2\} > 0$ gelten. Daraus folgt der Konvergenzbereich $\operatorname{Re}\{s\} > -2$.

- (d) Existiert die Fourier-Transformation für $v(t)$? Falls ja, bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $V(j\omega)$ mithilfe der in (c) berechneten Laplace-Transformierten $V(s)$. (3 P)

Damit die Fourier-Transformation existiert, muss die imaginäre Achse $\operatorname{Re}\{s\} = 0$ im

Konvergenzbereich liegen. Dies ist erfüllt, da $0 > -2$ gilt. Die Fourier-Transformierte ergibt sich durch das Einsetzen von $s = j\omega$ in die Laplace-Transformierte:

$$V(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}.$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sei ein kontinuierliches System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{s - a}{(s + 1)(s^2 + 2s + b)}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (e) Geben Sie die Kriterien für Stabilität und Minimalphasigkeit eines kontinuierlichen Systems an. (2 P)

Ein kontinuierliches System ist stabil, wenn $\operatorname{Re}\{s_{\infty,i}\} < 0, \forall i$ gilt. Außerdem muss der Nennergrad der Übertragungsfunktion größer sein als der Zählergrad.

Ein kontinuierliches System ist minimalphasig, wenn $\operatorname{Re}\{s_{0,i}\} \leq 0, \forall i$ gilt.

- (f) Bestimmen Sie die Nullstelle und die Polstellen des Systems $H(s)$ in Abhängigkeit von a und b . (4 P)

Nullstelle:

$$s_0 - a = 0 \quad \rightarrow \quad s_0 = a$$

Polstellen:

$$s_{\infty,1} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{\infty,1} = -1$$

$$s_{\infty,2/3}^2 + 2s + b = 0$$

$$s_{\infty,2/3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - b}$$

$$s_{\infty,2/3} = -1 \pm \sqrt{1 - b}$$

- (g) Bestimmen Sie den Wertebereich für a und b so, dass das System stabil und minimalphasig ist. Begründen Sie Ihre Antwort. (5 P)

Für Minimalphasigkeit müssen die Nullstellen in der abgeschlossenen linken Halbebene liegen. Daher muss für a gelten:

$$\operatorname{Re}\{a\} \leq 0 \quad \rightarrow \quad a \leq 0, \quad \text{da } a \in \mathbb{R}.$$

Für Stabilität muss der Nennergrad von $H(s)$ größer sein als der Zählergrad, was hier gegeben ist. Die Polstellen müssen in der linken Halbebene liegen. Daher muss für b gelten:

Für $s_{\infty,1}$:

$$\operatorname{Re}\{-1\} = -1 < 0$$

Für $s_{\infty,2/3}$:

$$\operatorname{Re}\{-1 \pm \sqrt{1-b}\} < 0$$

Wenn der Pol $s_{\infty,2} = -1 + \sqrt{1-b}$ in der linken Halbebene liegt, liegt auch $s_{\infty,3} = -1 - \sqrt{1-b}$ in der linken Halbebene, daher wird im Folgenden $s_{\infty,2}$ betrachtet.

Für $b < 1$ ist die Klammer reell. Daher gilt:

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt{1-b} &< 0 \\ \sqrt{1-b} &< 1 \\ 1-b &< 1 \quad \rightarrow \quad b > 0 \end{aligned}$$

Für $b \geq 1$ ist die Klammer imaginär. Daher gilt:

$$\operatorname{Re}\{-1 \pm \sqrt{1-b}\} = -1 < 0$$

Es muss also $b > 0$ gelten, damit das System stabil ist.

- (h) „Ein stabiles System ist immer minimalphasig.“ (3 P)
Beurteilen Sie diese Aussage anhand der gegebenen Übertragungsfunktion.

Diese Aussage ist falsch, da Stabilität ausschließlich durch die Lage der Polstellen und Minimalphasigkeit durch die Lage der Nullstellen bestimmt wird. Für $a = 2$ und $b = 3$ liegen alle Pole der Übertragungsfunktion in der linken Halbebene, während die Nullstelle bei $s_0 = 2$ in der rechten Halbebene liegt. Das System ist damit stabil, aber nicht minimalphasig, wodurch die Aussage widerlegt ist.

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei ein diskretes System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{5})}$$

mit dem Konvergenzbereich $|z| > \frac{1}{2}$.

- (i) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(n)$ mithilfe einer Partialbruchzerlegung. Es dürfen die bekannten Korrespondenzen genutzt werden. (6 P)

Zunächst wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{5})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{2}} + \frac{C}{z - \frac{1}{5}}$$

Bestimmung der Koeffizienten A , B , und C :

$$\begin{aligned}
 A &= \left. \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{5})} \right|_{z=0} &&= 10 \\
 B &= \left. \frac{1}{z(z - \frac{1}{5})} \right|_{z=\frac{1}{2}} &&= \frac{20}{3} \\
 C &= \left. \frac{1}{z(z - \frac{1}{2})} \right|_{z=\frac{1}{5}} &&= -\frac{50}{3} \\
 H(z) &= 10 + \frac{\frac{20}{3}z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{50}{3}z}{z - \frac{1}{5}}
 \end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen $1 \bullet \text{---} \circ \gamma_0(n)$ und $\frac{z}{z-a} \bullet \text{---} \circ a^n \gamma_{-1}(n)$ ergibt sich die Impulsantwort:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= 10 + \frac{\frac{20}{3}z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{50}{3}z}{z - \frac{1}{5}} \\
 &\quad \downarrow \\
 h(n) &= 10 \gamma_0(n) + \frac{20}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n) - \frac{50}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n \gamma_{-1}(n)
 \end{aligned}$$

Dies ist eine leere Seite.