

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2020/2021

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 26.03.2021

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

| | | | |
|---------|-----|-----|-----|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 |
| Punkte | /33 | /36 | /31 |

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2020/2021

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: online
Datum: 26.03.2021
Beginn: 08:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist ausschließlich das Durchblättern der aktuellen Klausur erlaubt**, darüber hinaus sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Für eine Periode des Signals $v(t)$ im Intervall $[0, T]$ gilt mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$v(t) = - \int_0^t 4 \omega_0 \sin(5 \omega_0 \tau) d\tau - 8 \sin^2\left(\frac{1}{2} \omega_0 t\right) + \frac{4}{3} \sin\left(\frac{1}{2}(6 \omega_0 t + \pi)\right) + \frac{9}{5}.$$

- (a) Nennen Sie zwei Verfahren, um die Koeffizienten der trigonometrischen Fourier-Reihe für ein Signal zu erhalten! Beschreiben Sie kurz das Vorgehen! Geben Sie allgemeine Formeln an, wenn für das Verfahren erforderlich! (5 P)
1. Berechnung der Koeffizienten über die Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe:

$$a_\mu = \frac{2}{T} \left(\int_{t'}^{t'+T} v(t) \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right),$$

$$b_\mu = \frac{2}{T} \left(\int_{t'}^{t'+T} v(t) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right).$$

2. Bestimmung über Koeffizientenvergleich:

Sinus- und Cosinus-Terme mit Vielfachen der Grundfrequenz werden identifiziert und deren Gewichte als Koeffizienten der trigonometrischen Fourier-Reihe verwendet.

- (b) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten des Signals $v(t)$! (8 P)
- Integration:

$$- \int_0^t 4 \omega_0 \sin(5 \omega_0 \tau) d\tau = \left[\frac{4}{5} \cos(5 \omega_0 \tau) \right]_0^t = \frac{4}{5} \cos(5 \omega_0 t) - \frac{4}{5}.$$

Auflösen des quadratischen Terms mit Additionstheorem $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$:

$$- 8 \sin^2\left(\frac{1}{2} \omega_0 t\right) = -\frac{8}{2}(1 - \cos(\omega_0 t)) = -4 + 4 \cos(\omega_0 t).$$

Phasenverschiebung:

$$\frac{4}{3} \sin\left(\frac{1}{2}(6 \omega_0 t + \pi)\right) = \frac{4}{3} \cos(3 \omega_0 t).$$

Zusammenfassung:

$$v(t) = -3 + 4 \cos(\omega_0 t) + \frac{4}{3} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{4}{5} \cos(5 \omega_0 t).$$

Koeffizientenvergleich:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = -3$$

$$a_\mu = \begin{cases} 4, & \mu = 1, \\ \frac{4}{3}, & \mu = 3, \\ \frac{4}{5}, & \mu = 5, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$b_\mu = 0 \quad \text{für alle } \mu.$$

$$\text{mit } v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben sind folgende Signale mit $\tau, a \in \mathbb{R}$:

$$v_1(t) = \delta_{-1}(t)a^{\tau t} \quad \text{mit } a > 1 \text{ und } \tau < 0,$$

$$v_2(t) = \delta_{-1}(t)a^{\tau t} \quad \text{mit } a > 1 \text{ und } \tau > 0,$$

$$v_3(t) = \cos(2\pi ft).$$

- (c) Gegeben sind Fourier-Reihe, Fourier-Transformation und Laplace-Transformation. Welche Transformation würden Sie für welches Signal verwenden? Jede Transformation darf genau einmal verwendet werden. Begründen Sie ihre Antwort! (6 P)

$v_3(t)$: Die Sinusschwingung ist periodisch, daher bietet sich eine Fourier-Reihendarstellung an.

$v_1(t)$: Die abklingende Exponentialfunktion konvergiert, daher bietet sich eine Fourier-Transformation an.

$v_2(t)$: Die ansteigende Exponentialfunktion divergiert, daher bietet sich die Laplace-Transformation (in einem bestimmten Konvergenzbereich) an.

- (d) Bestimmen sie den Konvergenzbereich für das Signal, dem Sie die Laplace-Transformation zugeordnet haben und erklären Sie den Begriff! (4 P)

Die Laplace-Transformation kann so verstanden werden, dass das Signal zunächst mit einem dämpfenden Exponentialterm (mit Dämpfungsfaktor $\text{Re}\{s\}$) multipliziert und anschließend Fourier-transformiert wird. Durch geeignete Wahl von $\text{Re}\{s\}$ kann ein Konvergieren der Transformation erreicht werden:

$$\mathcal{L}\{v_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{-1}(t)a^{\tau t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{\ln(a)\tau t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{\ln(a)\tau t - \text{Re}\{s\}t - j\text{Im}\{s\}t} dt.$$

Für den Realteil des Arguments der Exponentialfunktion folgt mithilfe der Konvergenzbedingung:

$$\ln(a)\tau - \text{Re}\{s\} < 0 \Rightarrow \text{Re}\{s\} > \ln(a)\tau.$$

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Für eine Periode des Signals $v_4(t)$ gilt mit $a > 0$:

$$v_4(t) = -a \operatorname{sign}\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

(e) Skizzieren Sie $v_4(t)$ im Intervall $[0, T]$! (2 P)

Es handelt sich um eine invertierte und verschobene Vorzeichenfunktion:

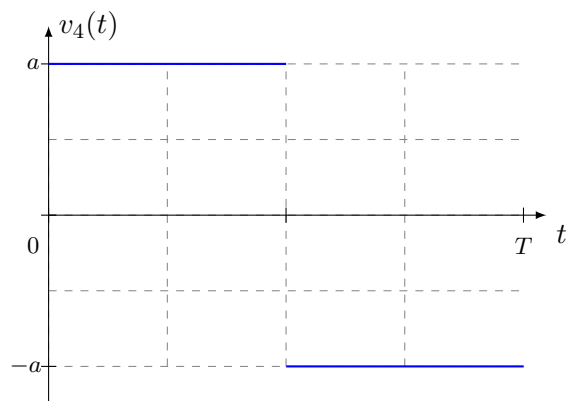


Abbildung 1: Skizze des Signals $v_4(t)$

(f) Sind die Fourier-Reihenoeffizienten für $v_4(t)$ gerade oder ungerade? Begründen Sie! (2 P)

Das Signal ist reell und ungerade, daher wird das Signal ausschließlich durch ungerade Fourier-Koeffizienten (b_μ) beschrieben.

(g) Bei der Fourierreihendarstellung des Signals $v_4(t)$ tritt eine Besonderheit auf. Nennen Sie die korrekte Bezeichnung dafür und erklären Sie, wie diese zustande kommt! Skizzieren Sie grob das Signal $v_5(t)$ im Intervall $[0, T]$. Dieses entspricht einer Approximation von $v_4(t)$ mithilfe einer endlichen Anzahl an Fourier-Reihenoeffizienten. Markieren Sie in der Skizze Unterschiede zu $v_4(t)$! (6 P)

Bei bestimmten zeitkontinuierlichen Signalen (z.B. Rechteckfunktion, Vorzeichenfunktion) ergeben sich unendlich steile Übergänge zwischen positiver und negativer Halbwelle (Unstetigkeiten). Für die spektrale Darstellung folgt daraus eine unendlich große erforderliche Bandbreite, die bei der Fourier-Reihen-Darstellung mit einer endlichen Anzahl an Koeffizienten jedoch beschränkt ist. Die Konsequenz ist eine Tiefpassfilterung. Bei der Rücktransformation der endlichen Fourier-Reihe ergeben sich im Zeitsignal sog. Überschwinger, was als Gibb'sches Phänomen bezeichnet wird.

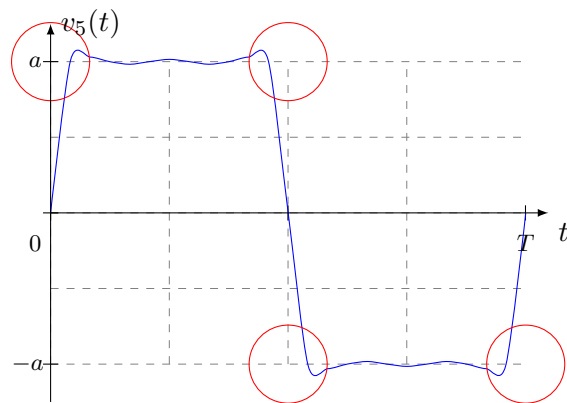


Abbildung 2: Skizze des Signals $v_5(t)$

Aufgabe 2 (36 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei die Diskrete Fourier-Transformierte $V_M(\mu)$ einer diskreten Folge $v(n)$ der Länge $M = 4$:

$$V_M(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ 3, & \mu = 1, \\ 2, & \mu = 2, \\ 1, & \mu = 3. \end{cases}$$

- (a) Aus der Vorlesung Signale und Systeme I wissen Sie, dass die Diskrete Fourier-Transformierte $V_M(\mu)$ M -periodisch ist. Zeigen Sie allgemein, dass der Zusammenhang $V_M(\mu + \lambda M) = V_M(\mu)$ gilt. (6 P)

$$\begin{aligned} V_M(\mu + \lambda M) &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j(\mu + \lambda M) \frac{2\pi}{M} n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \cdot e^{-j\lambda M \frac{2\pi}{M} n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \cdot e^{-j\lambda 2\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} = V_M(\mu). \end{aligned}$$

- (b) Wie Sie sehen, sind die Werte der Diskreten Fourier-Transformierten $V_M(\mu)$ reellwertig. Enthält $V_M(\mu)$ gerade und ungerade Anteile? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 P)
 Die Diskrete Fourier-Transformierte $V_M(\mu)$ enthält sowohl gerade als auch ungerade Anteile. Um das zu beweisen, genügt es für eine μ -Stelle zu zeigen, dass gerade und ungerade Anteile existieren. Für die Berechnung gerader und ungerader Anteile können folgende Korrespondenzen benutzt werden:

$$\begin{aligned} f(n) &= f_{\text{ge}}(n) + f_{\text{un}}(n), \\ f_{\text{ge}}(n) &= \frac{f(n) + f(-n)}{2}, \\ f_{\text{un}}(n) &= \frac{f(n) - f(-n)}{2}. \end{aligned}$$

Wie es aus der folgenden Berechnung hervorgeht, existieren an der Stelle $\mu = 1$ sowohl gerade als auch ungerade Anteile:

$$V_{M,\text{ge}}(1) = \frac{V_M(1) + V_M(-1)}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2,$$

$$V_{M,un}(1) = \frac{V_M(1) - V_M(-1)}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

- (c) Unter der Betrachtung der Eigenschaften der Diskreten Fourier-Transformierten $V_M(\mu)$ aus der Teilaufgabe (b), was können Sie über die Folge $v(n)$ sagen, ohne sie zu berechnen? Ist die Folge reellwertig oder komplex? Enthält $v(n)$ gerade und ungerade Anteile? Begründen Sie Ihre Antwort! (4 P)
- Aus der Symmetriebeziehung folgt, dass die diskrete Folge $v(n)$ komplex sein muss. Aufgrund der Linearität der DFT/IDFT-Transformation und der Symmetriebeziehung enthält die Folge gerade und ungerade Anteile.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben seien eine Diskrete Fourier-Transformierte $V_{a,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_a(n)\}$ und eine diskrete Folge $v_b(n) = \text{IDFT}\{V_{b,M}(\mu)\}$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{a,M}(\mu) = \begin{cases} \frac{9}{4}, & \mu = 0, \\ 2 - j, & \mu = 1, \\ 16, & \mu = 2, \\ 2 + j, & \mu = 3, \end{cases} \quad v_b(n) = \begin{cases} 4, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ \frac{1}{2}, & n = 2, \\ \frac{1}{4}, & n = 3. \end{cases}$$

- (d) Sie möchten das Ergebnis der zyklischen Faltung von $v_c(n) = v_a(n) \otimes v_b(n)$ bestimmen. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweisen mindestens für zwei Möglichkeiten! (5 P)
- erste Möglichkeit:
- i) Diskrete Fourier-Transformierte $\{V_{b,M}(\mu)\} = \text{DFT}\{v_b(n)\}$ durch DFT bestimmen
 - ii) Ergebnis der zyklischen Faltung $\{V_{c,M}(\mu)\} = V_{a,M}(\mu) \cdot V_{b,M}(\mu)$ im Frequenzbereich bestimmen
 - iii) diskrete Folge $v_c(n) = \text{IDFT}\{V_{c,M}(\mu)\}$ durch inverse DFT bestimmen
- zweite Möglichkeit:
- i) diskrete Folge $v_a(n) = \text{IDFT}\{V_{a,M}(\mu)\}$ durch inverse DFT bestimmen
 - ii) diskrete Folge $v_c(n) = v_a(n) \otimes v_b(n)$ durch zyklische Faltung bestimmen

- (e) Welche Faltungs-Arten kennen Sie? Nennen Sie den Hauptunterschied zwischen den Faltungs-Arten! (3 P)
- Es gibt zwei Faltungs-Arten, die zyklische und die lineare Faltung. Bei der zyklischen Faltung wird eine der beiden Folgen zyklisch wiederholt. Das führt dazu, dass das Ergebnis der Faltung die gleiche Länge wie die Ursprungsfolgen hat. Bei der linearen Faltung werden die Folgen nicht wiederholt. Die so entstandene Folge hat die Länge $M_1 + M_2 - 1|_{M_1=M_2} = 2M - 1$. Durch auffüllen der Folgen mit Nullen kann die zyklische Faltung in lineare überführt werden.

- (f) Nehmen Sie an, dass die Folge $v_a(n) = v_b(n) \otimes h(n)$ das Ergebnis einer zyklischen Faltung mit einer Folge $h(n)$ ist. Wie würden Sie die Diskrete Fourier-Transformierte

$H_M(\mu) = \text{DFT}\{h(n)\}$ bestimmen? Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise! (3 P)

Um die Diskrete Fourier-Transformierte $H_M(\mu) = \text{DFT}\{h(n)\}$ bestimmen zu können, wird die Folge $v_b(n)$ in den Frequenzbereich überführt. Im Frequenzbereich entspricht zyklische Faltung einer Multiplikation $V_{a,M}(\mu) = V_{b,M}(\mu) \cdot H_M(\mu)$. Stellt man die Gleichung nach $H_M(\mu) = \frac{V_{a,M}(\mu)}{V_{b,M}(\mu)}$ um, so lässt sich die Diskrete Fourier-Transformierte durch komplexe Division bestimmen.

(g) Bestimmen Sie die Diskrete Fourier-Transformierte $H_M(\mu) = \text{DFT}\{h(n)\}$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Vereinfachen Sie soweit es geht! (12 P)

$$V_{b,M}(\mu) = \sum_{n=0}^3 v_b(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}:$$

$$V_{b,M}(0) = (4 + 2 + 0.5 + 0.25) = 6.75,$$

$$\begin{aligned} V_{b,M}(1) &= \left(4 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 0.5 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 0.25 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) \\ &= (4 - j2 - 0.5 + j0.25) = 3.5 - j1.75, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{b,M}(2) &= \left(4 + 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4}} + 0.5 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 0.25 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) \\ &= (4 - 2 + 0.5 - 0.25) = 2.25, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{b,M}(3) &= \left(4 + 2 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4}} + 0.5 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 0.25 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) \\ &= (4 + j2 - 0.5 - j0.25) = 3.5 + j1.75. \end{aligned}$$

$$H_M(\mu) = \frac{V_{a,M}(\mu)}{V_{b,M}(\mu)}:$$

$$H_M(0) = \frac{2.25}{6.75} = \frac{1}{3},$$

$$H_M(1) = \frac{2 - j}{3.5 - j1.75} = \frac{4}{7},$$

$$H_M(2) = \frac{16}{2.25} = \frac{64}{9},$$

$$H_M(3) = \frac{2 + j}{3.5 + j1.75} = \frac{4}{7}.$$

Aufgabe 3 (31 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei das System

$$y(t) = S\{v(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^t v(\tau - \alpha) e^{-\frac{\tau}{\alpha} t} d\tau$$

beschrieben durch die Systemantwort $y(t)$ auf die Systemanregung $v(t)$.

- (a) Bestimmen Sie die Antwort $y_0(t)$ des Systems auf die Anregung mit $v(t) = \delta_0(t)$. Lösen Sie die Gleichung so weit wie möglich auf! (5 P)
 Die Antwort des Systems ergibt sich bei Anregung des Systems mit dem Impuls $v(t) = \delta_0(t)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} y_0(t) &= S\{\delta_0(t)\} \\ &= \int_{\tau=-\infty}^t \delta_0(\tau - \alpha) e^{-\frac{\tau}{\alpha} t} d\tau \\ &\dots \text{mit der Ausblendeigenschaft der Dirac-Distribution} \dots \\ &= \int_{\tau=-\infty}^t \delta_0(\tau - \alpha) e^{-\frac{\alpha}{\alpha} t} d\tau = e^{-t} \int_{\tau=-\infty}^t \delta_0(\tau - \alpha) d\tau \\ &\dots \text{Substitution } k = \tau - \alpha \dots \\ &= e^{-t} \int_{k=-\infty}^{t-\alpha} \delta_0(k) dk = e^{-t} [\delta_{-1}(k)]_{k=-\infty}^{t-\alpha} \\ &= e^{-t} \delta_{-1}(t - \alpha) \end{aligned}$$

- (b) Bestimmen Sie das Spektrum $Y_0(j\omega) = \mathcal{F}\{y_0(t)\}$. (5 P)
 Für das Spektrum ergibt sich

$$\begin{aligned} Y_0(j\omega) &= \mathcal{F}\{y_0(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta_{-1}(t - \alpha) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt \\ &= \left[\frac{-1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)t} \right]_{\alpha}^{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{1+j\omega} \left(\underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1+j\omega)t}}_{=0} - e^{-(1+j\omega)\alpha} \right) \\
 &= \frac{1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)\alpha}
 \end{aligned}$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion

$$H_d(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{z}{z - a_i}$$

mit $N = 3$, $a_0 = \frac{3}{4}$, $a_1 = \frac{1}{2}j$ und $a_2 = -\frac{1}{2}j$.

- (c) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen des Systems und zeichnen Sie das Pol-/Nullstellen-Diagramm! (10 P)

Die Pole der Übertragungsfunktion sind schon angegeben durch die Variablen a_i .
D.h. es gilt

$$\begin{aligned}
 z_{\infty,0} &= a_0 = \frac{3}{4} \\
 z_{\infty,1} &= a_1 = \frac{1}{2}j \\
 z_{\infty,2} &= a_2 = -\frac{1}{2}j
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Nullstellen muss die Übertragungsfunktion in die Produktform umgewandelt werden:

$$\begin{aligned}
 H_d(z) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{z}{z - a_i} \\
 &= \frac{z}{z - a_0} + \frac{z}{z - a_1} + \frac{z}{z - a_2} \\
 &\dots \text{ Einsetzen von } a_0, a_1, a_2 \dots \\
 &= \frac{z}{z - \frac{3}{4}} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}j} + \frac{z}{z - \left(-\frac{1}{2}j\right)} \\
 &= \frac{z \left(\left(z - \frac{1}{2}j\right) \left(z + \frac{1}{2}j\right) + \left(z - \frac{3}{4}\right) \left(z + \frac{1}{2}j\right) + \left(z - \frac{3}{4}\right) \left(z - \frac{1}{2}j\right) \right)}{\left(z - \frac{3}{4}\right) \left(z - \frac{1}{2}j\right) \left(z - \left(-\frac{1}{2}j\right)\right)} \\
 &= \frac{z \left(z^2 + \frac{1}{4} + z^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}j\right) z - \frac{3}{8}j + z^2 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}j\right) z + \frac{3}{8}j \right)}{\left(z - \frac{3}{4}\right) \left(z - \frac{1}{2}j\right) \left(z - \left(-\frac{1}{2}j\right)\right)} \\
 &= \frac{z \left(3z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{4} \right)}{\left(z - \frac{3}{4}\right) \left(z - \frac{1}{2}j\right) \left(z - \left(-\frac{1}{2}j\right)\right)}
 \end{aligned}$$

$$= 3 \frac{z \left(z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12} \right)}{\left(z - \frac{3}{4} \right) \left(z - \frac{1}{2}j \right) \left(z - \left(-\frac{1}{2}j \right) \right)}$$

Eine Nullstelle liegt offensichtlich bei $z_{0,0} = 0$. Die weiteren Nullstellen lassen sich bestimmen über:

$$\begin{aligned} z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12} &= 0 \\ \left(z - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} &= 0 \\ \left(z - \frac{1}{4} \right)^2 &= -\frac{1}{48} \\ \rightarrow z_{0,1/2} &= \frac{1}{4} \pm j \sqrt{\frac{1}{48}} \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich das Pol-/Nullstellendiagramm zu:

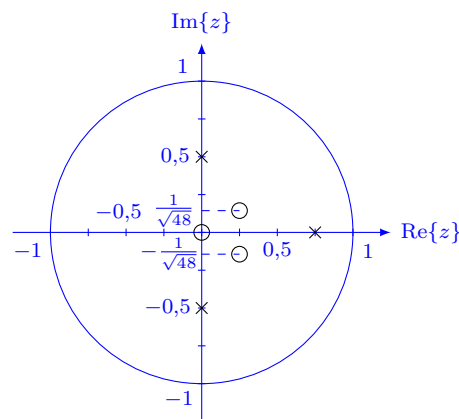


Abbildung 3: Pol-/Nullstellendiagramm der Übertragungsfunktion $H_d(z)$.

- (d) Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor des Systems. (1 P)

Der Verstärkungsfaktor des Systems lautet $K = 3$. Der Verstärkungsfaktor ist an der Übertragungsfunktion ablesbar (siehe Lösung zu Aufgabenteil (d)).

- (e) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_{0,d}(n)$ des Systems. Geben Sie auch das Konvergenzgebiet an! (6 P)

Die Impulsantwort des System kann mit Hilfe der Korrespondenz $\frac{z}{z-a} \bullet \circ a^n \gamma_{-1}(n)$ einfach bestimmt werden:

$$H_d = \frac{z}{z - \frac{3}{4}} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}j} + \frac{z}{z - \left(-\frac{1}{2}j \right)}$$

•
○

$$\begin{aligned} h_{0,d} &= \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_{-1}(n) + \left(\frac{1}{2}j \right)^n \gamma_{-1}(n) + \left(-\frac{1}{2}j \right)^n \gamma_{-1}(n) \\ &= \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n + \left(\frac{1}{2}j \right)^n + \left(-\frac{1}{2}j \right)^n \right) \gamma_{-1}(n) \end{aligned}$$

Das Konvergenzgebiet ergibt sich aus der Betrachtung der Polstellen der Übertragungsfunktion.

$$H_d = \underbrace{\frac{z}{z - \frac{3}{4}}}_{|z| > \frac{3}{4}} + \underbrace{\frac{z}{z - \frac{1}{2}j}}_{|z| > \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{z}{z - \left(-\frac{1}{2}j\right)}}_{|z| > \frac{1}{2}}$$

Dadurch ergibt sich ein Konvergenzgebiet von $|z| > \frac{3}{4}$.

(f) Ist das angegebene System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System ist stabil. Dieses lässt sich sowohl anhand des Pol-/Nullstellendiagramms, als auch anhand der Impulsantwort feststellen.

- Pol-/Nullstellendiagramm: Alle Pole liegen innerhalb des Einheitskreises, d.h. $|z_{\infty,i}| < 1, \forall i \in \{0, 1, 2\}$.
- Impulsantwort: Die Impulsantwort ist absolut summierbar.

(g) Ist das angegebene System minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System ist minimalphasig, da alle Nullstellen innerhalb des (oder auf dem) Einheitskreis(es) liegen, d.h. $|z_{0,i}| \leq 1, \forall i \in \{0, 1, 2\}$.