Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2021/2022

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	18.03.2022
Name:	______________________
Matrikelnummer:	______________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/32	/36	/32

Summe der Punkte: ______________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ______________ Unterschrift: ______________________

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2021/2022

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	Online
Datum:	18.03.2022
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist ausschließlich das Durchblättern der aktuellen Klausur erlaubt**, darüber hinaus sind alle Schreibutensilien abzulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (32 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $v(t)$, dessen Fourier-Reihenkoeffizienten im Folgenden per Koeffizientenvergleich bestimmt werden sollen. Es gilt mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ für $T > 0$:

$$v(t) = 4\cos(2\omega_0 t)\sin(2\omega_0 t) + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega_0}\sin(2\omega_0 t)\right] + 2\sum_{k=0}^{3}\cos\left(k\omega_0 t - k\frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Bringen Sie $v(t)$ zunächst durch Vereinfachung in die Form: (8 P)

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos(\mu\,\omega_0 t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin(\mu\,\omega_0 t).$$

Umformen des Produktterms in zwei separate Sinusterme mit Additionstheorem $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big[\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big]$:

$$4\cos(2\omega_0 t)\sin(2\omega_0 t) = 2\Big[\sin(0) + \sin(4\omega_0 t)\Big] = 2\sin(4\omega_0 t).$$

Ableiten des Sinusterms mit der Kettenregel $\frac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at)$:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega_0}\sin(2\omega_0 t)\right] = \frac{2\omega_0}{\omega_0}\cos(2\omega_0 t) = 2\cos(2\omega_0 t)$$

Auflösen des Summenzeichens in einzelne Cosinus-Terme und anschließende Umformung mithilfe der Sinus-Cosinus-Beziehung:

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{3}\cos\left(k\omega_0 t - k\frac{\pi}{2}\right) &= 2\left[\cos(0) + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2\omega_0 t - \pi) + \cos\left(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}\right)\right] \\
&= 2\Big[1 + \sin(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t) - \sin(3\omega_0 t)\Big] \\
&= 2 + 2\sin(\omega_0 t) - 2\cos(2\omega_0 t) - 2\sin(3\omega_0 t).
\end{aligned}$$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
v(t) &= 2\sin(4\omega_0 t) + 2\cos(2\omega_0 t) + 2 + 2\sin(\omega_0 t) - 2\cos(2\omega_0 t) - 2\sin(3\omega_0 t) \\
&= 2 + 2\sin(\omega_0 t) - 2\sin(3\omega_0 t) + 2\sin(4\omega_0 t).
\end{aligned}$$

(b) Markieren Sie jeden Term aus (a) als gerade, ungerade oder als Gleichanteil! (2 P)

$$v(t) = \overbrace{2}^{\text{Gleichanteil}} + \overbrace{2\sin(\omega_0 t)}^{\text{ungerade}} - \overbrace{2\sin(3\omega_0 t)}^{\text{ungerade}} + \overbrace{2\sin(4\omega_0 t)}^{\text{ungerade}}.$$

(c) Geben Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten des Signals $v(t)$ an! (2 P)

Es gilt mit $\mu > 0$:

$$c_0 = 2, \quad a_\mu = 0, \quad b_\mu = \begin{cases} 2, & \mu = 1, \\ -2, & \mu = 3, \\ 2, & \mu = 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Signal $v(t)$ wird nun auf ein lineares, zeit-invariantes System gegeben, sodass gilt: $y(t) = S\{v(t)\}$. Der Systemoperator $S\{...\}$ beschreibt dabei das Filter mit dem Frequenzgang $H(j\omega)$ mit $H_0 \neq 0$:

$$H(j\omega) = \begin{cases} H_0, & |\omega| < \frac{5\pi}{T}, \\ H_0 \cdot e^{-j\omega\frac{T}{12}}, & \frac{5\pi}{T} \leq |\omega| < \frac{7\pi}{T}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) Um welche Art von Filter handelt es sich (Hochpass, Tiefpass, Bandpass, Bandsperre, Allpass)? Begründen Sie! (2 P)

Niedrige Frequenzkomponenten ($|\omega| < \frac{7\pi}{T}$) werden durch das Filter mit einer Konstanten H_0 multipliziert (bzw. erfahren zusätzlich eine Phasenverschiebung), während höhere Frequenzkomponenten auf Null gedämpft werden. Daher handelt es sich um ein Tiefpassfilter.

(e) Wenden Sie nun das Filter auf $v(t)$ an, um $y(t)$ zu erhalten! Prüfen Sie dazu für jeden Term im Teilergebnis aus (a), welche Frequenzkomponenten enthalten sind und wie dieser durch den gegebenen Frequenzgang $H(j\omega)$ beeinflusst wird! (6 P)
Hinweis: Nutzen Sie die Definition $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und den Verschiebungssatz der Fouriertransformation.

$$v(t) = \overbrace{2}^{v_0(t)} + \overbrace{2\sin(\omega_0 t)}^{v_1(t)} - \overbrace{2\sin(3\omega_0 t)}^{v_2(t)} + \overbrace{2\sin(4\omega_0 t)}^{v_3(t)}.$$

Für den Gleichanteil $v_0(t)$ gilt $\omega = 0 < \frac{5\pi}{T}$, daher wird dieser nur mit der Konstanten H_0 gewichtet:

$$y_0(t) = S\{v_0(t)\} = S\{2\} = 2H_0.$$

Für $v_1(t)$ gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} < \frac{5\pi}{T}$, daher findet ebenfalls nur eine Gewichtung mit H_0 statt:

$$y_1(t) = S\{v_1(t)\} = S\{2\sin(\omega_0 t)\} = 2H_0 \sin(\omega_0 t).$$

Für $v_2(t)$ gilt $\frac{5\pi}{T} < 3\omega_0 = \frac{6\pi}{T} < \frac{7\pi}{T}$, daher wird mit H_0 gewichtet und zusätzlich eine Zeitverschiebung gemäß des Verschiebungssatzes der Fouriertransformation durchgeführt:

$$\begin{aligned}
y_2(t) = S\{v_2(t)\} &= S\{-2\sin(3\omega_0 t)\} \\
&= -2H_0 \sin(3\omega_0(t - \frac{T}{12})) \\
&= -2H_0 \sin(3\omega_0 t \; - \; 3\omega_0 \frac{T}{12}) \\
&= -2H_0 \sin(3\omega_0 t \; - \; 3\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12}) \\
&= -2H_0 \sin(3\omega_0 t \; - \; \frac{\pi}{2}) \\
&= 2H_0 \cos(3\omega_0 t).
\end{aligned}$$

Für $v_3(t)$ gilt $4\omega_0 = \frac{8\pi}{T} > \frac{7\pi}{T}$, daher wird dieser Frequenzanteil auf Null gedämpft:

$$y_3(t) = S\{v_3(t)\} = S\{2\sin(4\omega_0 t)\} = 0.$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$y(t) = 2H_0 + 2H_0 \cos(3\omega_0 t) + 2H_0 \sin(\omega_0 t).$$

(f) Markieren Sie jeden Term von $y(t)$ als gerade, ungerade oder als Gleichanteil! Geben Sie die resultierenden Fourier-Reihenkoeffizienten von $y(t)$ an! (3 P)

$$y(t) = \overbrace{2H_0}^{\text{Gleichanteil}} + \overbrace{2H_0\cos(3\omega_0 t)}^{\text{gerade}} + \overbrace{2H_0 \sin(\omega_0 t)}^{\text{ungerade}}.$$

Es gilt mit $\mu > 0$:

$$c_0 = 2H_0, \quad a_\mu = \begin{cases} 2H_0, & \mu = 3, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} 2H_0, & \mu = 1, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Teil 2 *Die Aufgaben in diesem Aufgabenteil können jede für sich gelöst werden.*

(g) Das Signal $u(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ wird mit $\omega_\mathrm{a} = \frac{\pi}{T}$ abgetastet. Welche Voraussetzungen gelten in diesem Fall allgemein und welche Folgen erwarten Sie für das konkrete Signal? (4 P)

Gemäß Abtasttheorem muss die Abtastfrequenz ω_a mindestens zweimal so groß sein wie die höchste vorkommende Frequenzkomponente ω_s.

Für $u(t)$ gilt mit $\omega_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{T}$:

$$\omega_\mathrm{a} = \frac{\pi}{T} < 2 \cdot \frac{2\pi}{T} = 2\omega_\mathrm{s}$$

Das Abtasttheorem wird verletzt und es kommt folglich zu einem Informationsverlust. Das abgetastete Signal kann unerwünschte Frequenzkomponenten enthalten, die im Ursprungssignal nicht enthalten sind (Aliasing).

(h) Bei der spektralen Darstellung von steilflankigen Signalen mit nur wenigen Fourier-Reihenkoeffizienten kommt es zu Fehlern. Geben Sie ein Beispiel für ein solches „problematisches“ Signal! Benennen Sie außerdem diesen Effekt und erklären Sie, wieso er zustande kommt! (5 P)

Bei bestimmten zeitkontinuierlichen Signalen (z.B. Rechteckfunktion, Vorzeichenfunktion) ergeben sich unendlich steile Übergänge zwischen positiver und negativer Halbwelle (Unstetigkeiten). Für die spektrale Darstellung folgt daraus eine unendlich große erforderliche Bandbreite, die bei der Fourier-Reihen-Darstellung mit einer endlichen Anzahl an Koeffizienten jedoch beschränkt ist. Die Konsequenz ist eine Tiefpassfilterung. Bei der Rücktransformation der endlichen Fourier-Reihe ergeben sich im Zeitsignal Überschwinger, was als Gibb'sches Phänomen bezeichnet wird.

Aufgabe 2 (36 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben seien die diskreten Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ bei der Länge $M = 3$:

$$v_1(n) = \begin{cases} 2 & , n = 0, \\ 2,5 & , n = 1, , \\ 5 & , n = 2, \end{cases} \qquad v_2(n) = \begin{cases} -3 & , n = 0, \\ 1 & , n = 1, \\ 4 & , n = 2. \end{cases}$$

(a) Wodurch unterscheiden sich die lineare und zyklische Faltung voneinander? Welche Länge hat jeweils das Ergebnis der linearen und zyklischen Faltung der Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$? (4 P)
Bei der zyklischen Faltung wird eine der beiden Folgen zyklisch wiederholt. Das führt dazu, dass das Ergebnis der zyklischen Faltung die gleiche Länge wie die Ursprungsfolgen hat. Bei der linearen Faltung werden die Folgen nicht wiederholt. Die so entstandene Folge hat die Länge $M_1 + M_2 - 1$. Durch Auffüllen der Folgen mit Nullen kann die zyklische Faltung in die lineare überführt werden.
Das Ergebnis der zyklischen Faltung von $v_1(n)$ und $v_2(n)$ hat die Länge $M_z = M = 3$.
Das Ergebnis der linaren Faltung von $v_1(n)$ und $v_2(n)$ hat die Länge $M_l = 2 \cdot M - 1 = 5$.

(b) Berechnen Sie die zyklische Faltung der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$. (4 P)

$$v_3(n) = v_1(n) \circledast v_2(n) = \sum_{k=0}^{M-1} v_1(k) v_2(n-k) \quad \text{mod } M$$
$$v_3(0) = 2 \cdot (-3) + 2,5 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 9$$
$$v_3(1) = 2 \cdot 1 + 2,5 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = 14,5$$
$$v_3(2) = 2 \cdot 4 + 2,5 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = -4,5$$

(c) Beschreiben Sie, wie man alternativ mit Hilfe der DFT die zyklische Faltung zweier diskreter Folgen berechnen kann. (3 P)

(i) Die beiden Folgen mithilfe der DFT in den Frequenzbereich überführen: $V_{1,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_1(n)\}$, $V_{2,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_2(n)\}$.

(ii) Da die zyklische Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation im Frequenzbereich entspricht werden die Spektren multipliziert: $V_{3,M}(\mu) = V_{1,M}(\mu) \cdot V_{2,M}(\mu)$

(iii) Das Ergebnis muss abschließend mithilfe der IDFT wieder in den Zeitbereich überführt werden: $v_3(n) = v_1(n) \circledast v_2(n) = \text{IDFT}\{V_{3,M}(\mu)\}$.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben seien die diskreten Fourier-Transformierte der $V_{1,M}(\mu)$ einer diskreten Folge $v_1(n)$ und die Folge $v_2(n)$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} -2 & , \mu = 0, \\ 2-4j & , \mu = 1, \\ 3 & , \mu = 2, \\ 2+4j & , \mu = 3, \end{cases} \qquad v_2(n) = \begin{cases} 2,75 & , n = 0, \\ -0,75 & , n = 1, \\ -2,25 & , n = 2, \\ -2,75 & , n = 3. \end{cases}$$

(d) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\mathrm{DFT}\{v_2(n)\}$ der Länge $M = 4$ für $\mu \in \{0,1,2,3\}$. (7 P)

$$\begin{aligned} V_{2,4}(\mu) &= \sum_{n=0}^{3} v_2(n) e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n}, \\ V_{2,4}(0) &= 2,75 \cdot 1 - 0,75 \cdot 1 - 2,25 \cdot 1 - 2,75 \cdot 1 \\ &= -3 \\ V_{2,4}(1) &= 2,75 \cdot 1 - 0,75 \cdot (-j) - 2,25 \cdot (-1) - 2,75 \cdot (j) \\ &= 5 - 2j \\ V_{2,4}(2) &= 2,75 \cdot 1 - 0,75 \cdot (-1) - 2,25 \cdot 1 - 2,75 \cdot (-1) \\ &= 4 \\ V_{2,4}(3) &= 2,75 \cdot 1 - 0,75 \cdot (j) - 2,25 \cdot (-1) - 2,75 \cdot (-j) \\ &= 5 + 2j \end{aligned}$$

(e) Die Folge $v_3(n)$ der Länge $M = 4$ sei das Ergebnis der zyklischen Faltung von $v_1(n)$ mit $v_2(n)$: $v_3(n) = v_1(n) \circledast v_2(n)$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $V_{3,4}(\mu) = \mathrm{DFT}\{v_3(n)\}$ der Länge $M = 4$ für $\mu \in \{0,1,2,3\}$. (5 P)

$$\begin{aligned} V_{3,4}(\mu) &= \mathrm{DFT}\{v_1(n) \circledast v_2(n)\} = \mathrm{DFT}\{v_1(n)\} \cdot \mathrm{DFT}\{v_2(n)\} \\ V_{3,4}(\mu) &= V_{1,4}(\mu) \cdot V_{2,4}(\mu) \\ V_{3,4}(\mu) &= \begin{cases} -2 \cdot (-3) = 6 & , \mu = 0, \\ (2-4j) \cdot (5-2j) = 2 - 24j & , \mu = 1, \\ 3 \cdot 4 = 12 & , \mu = 2, \\ (2+4j) \cdot (5+2j) = 2 + 24j & , \mu = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

(f) Berechnen sie den Mittelwert $\overline{v_3}$ der Folge $v_3(n)$. (2 P)

$$\overline{v_3} = \frac{1}{M} V_{3,M}(0) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{6}{4} = 1,5$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Es seien $v_1(n) \in \mathbb{R}$ eine diskrete Folge reeller Zahlen und $V_{1,M}(\mu) = \mathrm{DFT}\{v_1(n)\}$ dessen Spektrum, beide der Länge $M \in \mathbb{N}$.

(g) Beschreiben Sie welchen Einfluss die Multiplikation des Spektrums $V_{1,M}(\mu)$ mit einem komplexen Zeiger $e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n_0}$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$) im Frequenzbereich für die Folge $v_1(n)$ im Zeitbereich hat. (2 P)
Die Multiplikation eines Spektrums mit einem komplexen Zeiger im Frequenzbereich bewirkt eine zeitliche Verschiebung im Zeitbereich (Verschiebungssatz).

(h) Beschreiben Sie welchen Einfluss die Multiplikation von $v_1(n)$ mit einem komplexen Zeiger $e^{-j\mu_0\frac{2\pi}{M}n}$ ($\mu_0 \in \mathbb{Z}$) im Zeitbereich für das Spektrum $V_{1,M}(\mu)$ im Frequenzbereich hat. (2 P)
Die Multiplikation einer Folge mit einem komplexen Zeiger im zeitbereich bewirkt eine spektrale Verschiebung im Frequenzbereich (Modulationssatz).

(i) Welche Aussage können Sie über die Periodizität des Spektrums $V_{1,M}(\mu)$ treffen? (2 P)
Das Spektrum ist periodisch mit einer Periodendauer von M.

(j) Beweisen Sie, dass der folgende Zusammenhang gilt: $V_{1,M}(\mu) = V^*_{1,M}(-\mu)$. (5 P)

$$V_{1,M}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{-j2\pi\frac{\mu n}{M}}$$

$$V_{1,M}(-\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{j2\pi\frac{\mu n}{M}}$$

$$V^*_{1,M}(-\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v^*_1(n) (e^{j2\pi\frac{\mu n}{M}})^*$$

da $v_1(n)$ reellwertig ist, gilt $v_1(n) = v^*_1(n)$

$$(e^{j2\pi\frac{\mu n}{M}})^* = e^{-j2\pi\frac{\mu n}{M}}$$

$$V^*_{1,M}(-\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{-j2\pi\frac{\mu n}{M}} = V_{1,M}(\mu)$$

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $H_1(z)$ eines diskreten, zeitinvarianten Systems:

$$H_1(z) = \frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 + 1}$$

(a) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ des Systems $H_1(z)$. (8 P)
Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung ist zur Lösung dieser Aufgabe hilfreich!

Um die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ zu berechnen, muss die Übertragungsfunktion zunächst Partialbruchzerlegt werden.

$$\frac{H_1(z)}{z} = \frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z\,(z^2+1)} = \frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z(z-j)(z+j)}$$
$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-j} + \frac{C}{z+j}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten A, B, C:

$$A = \left.\frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2+1}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}$$
$$B = \left.\frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z\,(z+j)}\right|_{z=j} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}j$$
$$C = \left.\frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z\,(z-j)}\right|_{z=-j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}j$$

Damit folgt mit den Korrespondenzen $1 \bullet\!\!-\!\!\circ\, \gamma_0(n)$ und $\frac{z}{z-a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, a^n \gamma_{-1}(n)$:

$$H_1(z) = \frac{1}{2} + \frac{z\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}j\right)}{z-j} + \frac{z\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}j\right)}{z+j}$$
$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$
$$h_{0,1}(n) = \frac{1}{2}\gamma_0(n) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}j\right)(j)^n \gamma_{-1}(n) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}j\right)(-j)^n \gamma_{-1}(n)$$

(b) Zeichnen Sie die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ im Bereich $n \in \{-3, -2, ..., 3\}$. Denken Sie dabei an alle Achsenbeschriftungen! (4 P)

(c) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System ist kausal, da die Impulsantwort $h_{0,1}(n) = 0$ für $n < 0$ ist.

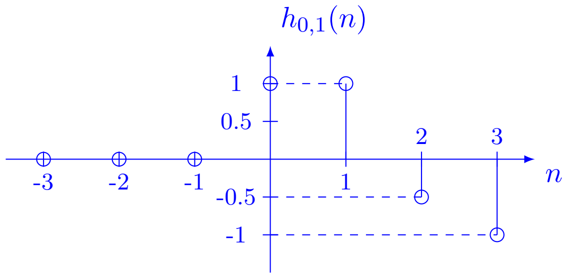

Abbildung 1: Impulsantwort $h_{0,1}(n)$.

(d) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System ist nicht stabil, da die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ nicht abklingt für $n \to \infty$. (Das System ist jedoch grenzstabil.)

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei das Pol-Nullstellen-Diagramm eines diskreten, zeitinvarianten Systems $H_2(z)$:

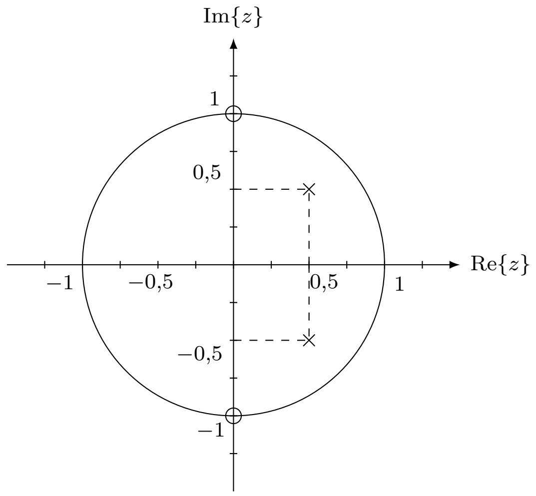

Abbildung 2: Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems $H_2(z)$.

(e) Untersuchen Sie anhand des Pol-Nullstellen-Diagramms, ob das System (8 P)

(i) reellwertig,

(ii) stabil,

(iii) minimalphasig und

(iv) rekursiv

ist. Begründen Sie Ihre Antworten!

Das System ist:

(i) reellwertig, da alle Pol- und Nullstellen in komplex konjugierten Paaren auftreten.

(ii) stabil, da sich die Polstellen innerhalb des Einheitskreises befinden, d.h. es gilt $|z_{\infty,i}| < 1 \quad \forall\, i \in \{1,2\}$.

(iii) minimalphasig, da sich die Nullstellen auf dem Einheitskreis befinden, d.h. es gilt $|z_{0,i}| \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1,2\}$.

(iv) rekursiv, da es Polstellen aufweist, die sich nicht im Nullpunkt befinden.

(f) Es gelte $H_2(z=2) = 6$. Geben Sie die Übertragungsfunktion $H_2(z)$ in Polynomdarstellung an! (5 P)

Das System kann über das Pol-Nullstellen-Diagramm abgelesen werden als:

$$\begin{aligned} H_2(z) &= K\,\frac{(z-j)(z+j)}{\left(z-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)\right)} \\ &= K\,\frac{z^2+1}{z^2-z+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Der Verstärkungsfaktor kann über die Bedingung $H_2(z=2) = 6$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} H_2(z=2) &= 6 \\ K\,\frac{2^2+1}{2^2-2+\frac{1}{2}} &= 6 \\ K\,\frac{5}{2.5} &= 6 \\ 2\,K &= 6 \\ K &= 3 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Übertragungsfunktion zu:

$$H_2(z) \;=\; 3\,\frac{z^2+1}{z^2-z+\frac{1}{2}}$$

Teil 3

Die beiden zuvor behandelten Systeme mit den Übertragungsfunktionen $H_1(z)$ und $H_2(z)$ werden entsprechend der nachfolgenden Abbildung zusammengeschaltet.

(g) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $H_3(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich! (3 P)

Für das System $H_3(z)$ ergibt sich:

$$H_3(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

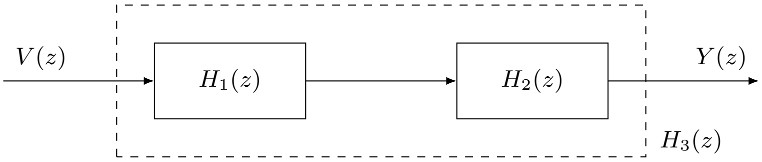

Abbildung 3: Reihenschaltung der Systeme $H_1(z)$ und $H_2(z)$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 + 1} \cdot 3\, \frac{z^2 + 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}} \\
&= 3\, \frac{z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 - z + \frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Dies ist eine leere Seite.