Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2022/2023

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	21.03.2023
Name:	______________________
Matrikelnummer:	______________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/34	/32	/34

Summe der Punkte: ______________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ______________ Unterschrift: ______________________

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2022/2023

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	CAP3 - Hörsaal 2
Datum:	21.03.2023
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten des zeitkontinuierlichen Signals $v(t) \in \mathbb{R}$ sind gegeben durch:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_\mu = \begin{cases} 2 & , \mu = 1, \\ \mu\, e^{j\mu\pi} & , \mu \in \{2,3\}, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \qquad b_\mu = \begin{cases} 6 & , \mu = 1, \\ \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) & , \mu = 2, \\ 0 & , \text{sonst}. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie aus den trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten die zugehörigen komplexen Fourier-Reihenkoeffizienten c_μ des Signals $v(t)$ für $\mu \in \mathbb{Z}$. (4 P)

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_\mu = \begin{cases} 2 & , \mu = 1, \\ 2 & , \mu = 2, \\ -3 & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \qquad b_\mu = \begin{cases} 6 & , \mu = 1, \\ -1 & , \mu = 2, \\ 0 & , \text{sonst}. \end{cases}$$

Mit $c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - jb_\mu)$ und $c_{-\mu} = c_\mu^*$ für $\mu \in \{1, \dots, \infty\}$ folgt:

$$c_\mu = \begin{cases} -1.5 & , \mu = -3, \\ 1 - 0.5j & , \mu = -2, \\ 1 + 3j & , \mu = -1, \\ \frac{1}{2} & , \mu = 0, \\ 1 - 3j & , \mu = 1, \\ 1 + 0.5j & , \mu = 2, \\ -1.5 & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst}. \end{cases}$$

(b) Geben Sie die Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe an und bestimmen Sie hiermit das Signal $v(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$. (3 P)

Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Daraus folgt für $v(t)$:

$$v(t) = \frac{1}{2} + 2\cos(\omega_0 t) + 2\cos(2\omega_0 t) - 3\cos(3\omega_0 t) + 6\sin(\omega_0 t) - \sin(2\omega_0 t).$$

(c) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal $v(t)$ jeweils die geraden und ungeraden Wechselanteile. (2 P)

$$v(t) = \frac{1}{2} + \underbrace{2\cos(\omega_0 t) + 2\cos(2\omega_0 t) - 3\cos(3\omega_0 t)}_{\text{gerade}} + \underbrace{6\sin(\omega_0 t) - \sin(2\omega_0 t)}_{\text{ungerade}}$$

(d) Wie lässt sich der Gleichanteil eines Zeitsignals anhand dessen Fourier-Reihenkoeffizienten bestimmen? Geben Sie den Gleichanteil des Signals $v(t)$ an. (2 P)

Der Fourier-Reihenkoeffizient c_0 entspricht dem Gleichanteil des Signals. Dementsprechend ergibt sich für $v(t)$ ein Gleichanteil von $c_0 = \frac{1}{2}$.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$x(t) = 3 - 2\sin(2\omega_0 t)^2 + 3\cos(3\omega_0 t).$$

(e) Bringen Sie das Signal $x(t)$ in eine Form, die für den Koeffizientenvergleich mit der trigonometrischen Fourier-Reihe geeignet ist. (1 P)

Mit $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$ folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 - 2\left(\frac{1}{2}\left[1 - \cos(2(2\omega_0 t))\right]\right) + 3\cos(3\omega_0 t) \\ &= 2 + 3\cos(3\omega_0 t) + \cos(4\omega_0 t). \end{aligned}$$

(f) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenkoeffizienten des Signals $x(t)$. (3 P)

$$c_0 = 2, \qquad a_\mu = \begin{cases} 3 & , \ \mu = 3, \\ 1 & , \ \mu = 4, \\ 0 & , \ \text{sonst}, \end{cases} \qquad b_\mu = 0.$$

(g) Geben Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$ an. (6 P)

Hinweis: Eine explizite Berechnung der Fourier-Transformation ist nicht notwendig!

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung des Spektrums $X(j\omega)$:

$$\begin{aligned} a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; a_1 V_1(j\omega) + a_2 V_2(j\omega) \\ \cos(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \pi\left[\delta_0(\omega+\omega_0) + \delta_0(\omega-\omega_0)\right] \\ e^{j\omega_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi\delta_0(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

$$X(j\omega) = 4\pi\,\delta_0(\omega) + 3\pi\left[\delta_0(\omega+3\omega_0) + \delta_0(\omega-3\omega_0)\right] + \pi\left[\delta_0(\omega+4\omega_0) + \delta_0(\omega-4\omega_0)\right].$$

(h) Skizzieren Sie das Spektrum $X(j\omega)$ im Bereich $\omega \in [-4\omega_0, 4\omega_0]$ mit allen Achsenbeschriftungen. (6 P)

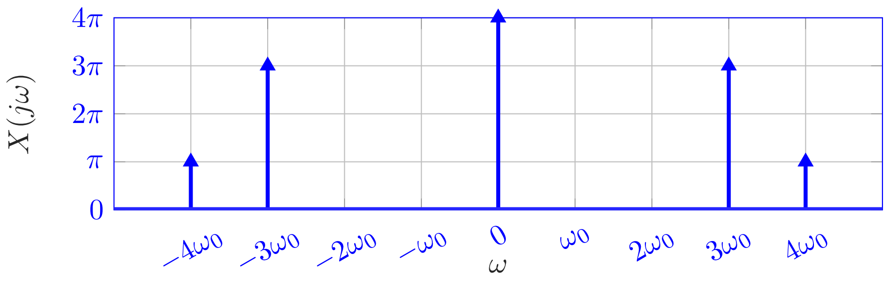


Abbildung 1: Signalgraph von $X(j\omega)$ im Bereich $\omega \in [-4\omega_0, 4\omega_0]$.

(i) Erläutern Sie, wie die Periodizität eines Zeitsignals bestimmt werden kann, welches die Summe mehrerer periodischer Teilfunktionen ist. Bestimmen Sie dementsprechend die Periode T_x des Signals $x(t)$. (4 P)

Die Summe mehrerer periodischer Teilfunktionen ist dann periodisch, wenn die Periodendauern aller Teilfunktionen ganzzahlige Vielfache voneinander sind. Es muss also gelten:

$$T_x = \lambda_a T_a = \lambda_b T_b, \quad \text{mit } \lambda_a, \lambda_b \in \mathbb{N}.$$

Mit den zeitabhängigen periodischen Signalanteilen $3\cos(3\omega_0 t)$ mit Periode $T_a = \frac{2\pi}{3\omega_0}$ und $\cos(4\omega_0 t)$ mit Periode $T_b = \frac{2\pi}{4\omega_0}$ folgt als Periode T_x für $x(t)$:

$$T_x = 3T_a = 4T_b = T.$$

Das Signal $x(t)$ wird nun mit der Abtastperiode $T_A = \frac{T}{6}$ abgetastet, woraus das zeitdiskrete Signal $x_A(n)$ resultiert.

(j) Wie lautet die Definition des Abtasttheorems? Wird das Abtasttheorem bei der Abtastung des Signals $x(t)$ mit der Abtastperiode T_A eingehalten? (3 P)

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Tiefpass-Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz ω_B (bzw. ein Bandpass-Signal mit der Bandbreite ω_B), dann exakt rekonstruierbar ist, wenn es mit der Abtastfrequenz ω_A abgetastet wurde:

$$\omega_A \geq 2\omega_B.$$

Bezogen auf die Periodendauer ergibt sich, dass die Abtastperiode höchstens halb so groß wie die kleinste vorkommende Periode sein darf:

$$T_A \leq \frac{T_{\text{min}}}{2}.$$

Somit gilt für die Abtastung von $x(t)$ mit $T_{\text{min}} = \frac{T}{4}$:

$$T_A = \frac{T}{6} \nleq \frac{T_{\text{min}}}{2} = \frac{1}{2}\frac{T}{4} = \frac{T}{8}.$$

Dementsprechend wird das Abtasttheorem hier verletzt.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben seien die diskreten Fourier-Transformierten der reellen Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$:

$$V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} -1 & , \mu = 0, \\ 2-5j & , \mu = 1, \\ 3 & , \mu = 2, \\ 2+5j & , \mu = 3, \end{cases} , \qquad V_{2,4}(\mu) = \begin{cases} 6 & , \mu = 0, \\ 1+3j & , \mu = 1, \\ -1 & , \mu = 2, \\ 1-3j & , \mu = 3. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformierte IDFT$\{V_{1,4}(\mu)\}$ für $n \in \{0, 1, ..., 6, 7\}$. (7 P)

$$\begin{aligned}
v_1(n) &= \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{3} V_{1,4}(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n} \\
v_1(0) &= \frac{1}{4} \left(-1 \cdot 1 + (2-5j) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (2+5j) \cdot 1\right) \\
&= \frac{1}{4}(-1 + 2 - 5j + 3 + 2 + 5j) \\
&= \frac{6}{4} = 1,5 \\
v_1(1) &= \frac{1}{4} \left(-1 \cdot 1 + (2-5j) \cdot j + 3 \cdot (-1) + (2+5j) \cdot (-j)\right) \\
&= \frac{1}{4} \left(-1 + 2j + 5 - 3 - 2j + 5\right) \\
&= \frac{6}{4} = 1,5 \\
v_1(2) &= \frac{1}{4} \left(-1 \cdot 1 + (2-5j) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (2+5j) \cdot (-1)\right) \\
&= \frac{1}{4} \left(-1 - 2 + 5j + 3 - 2 - 5j\right) \\
&= -\frac{2}{4} = -0,5 \\
v_1(3) &= \frac{1}{4} \left(-1 \cdot 1 + (2-5j) \cdot (-j) + 3 \cdot (-1) + (2+5j) \cdot (j)\right) \\
&= \frac{1}{4} \left(-1 - 2j - 5 - 3 + 2j - 5\right) \\
&= -\frac{14}{4} = -3,5
\end{aligned}$$

Da das Ergebnis einer IDFT M-periodisch ist, gilt:

$$\begin{aligned}
v_1(4) &= v_1(0) = 1,5 \\
v_1(5) &= v_1(1) = 1,5 \\
v_1(6) &= v_1(2) = -0,5
\end{aligned}$$

$$v_1(7) = v_1(3) = -3,5$$

(b) Die Folge $v_3(n)$ sei das Ergebnis der zyklischen Faltung $v_3(n) = v_1(n) \circledast v_2(n)$. Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformation $V_{3,4}(\mu) = \mathrm{DFT}\{v_3(n)\}$ für $\mu \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (6 P)

$$V_{3,4}(\mu) = V_{1,4}(\mu) \cdot V_{2,4}(\mu) = \begin{cases} 17+j & , \mu = -3, \\ -3 & , \mu = -2, \\ 17-j & , \mu = -1, \\ -6 & , \mu = 0, \\ 17+j & , \mu = 1, \\ -3 & , \mu = 2, \\ 17-j & , \mu = 3. \end{cases}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die DFT des reellen Signals $v(n)$ der Länge M mit dem Mittelwert π/M:

$$V_M(\mu) = \begin{cases} (2+j)\cdot j & , \mu = 1, \\ 2e^{\pi} & , \mu = 2, \\ re^{-j\phi} & , \mu = 3, \\ 8 & , \mu = 4, \\ 0 & , \mu = 5, 6, \ldots \frac{M}{2}, \\ \text{unbekannt} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie die fehlenden Werte der DFT $V_M(\mu)$. (6 P)

(i) Der Wert $V_M(0)$.

(ii) Die Werte $V_M(M-1)$, $V_M(M-2)$, $V_M(M-3)$ und $V_M(M-4)$.

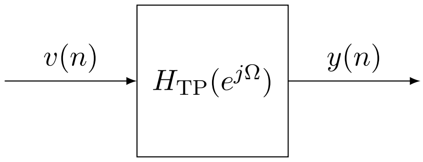
(iii) Die verbleibenden Werte von $V_M(\mu)$ für $\mu = \frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, \ldots, M-5$.

$$V_M(0) = \sum_{\mu=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n} = \sum_{\mu=0}^{M-1} v(n) = M \cdot \overline{v} = \pi$$

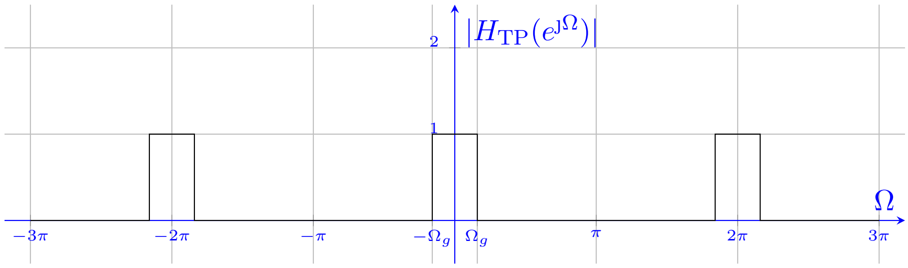
$$V_M(M-1) = V_M(1)^* = -1-2j$$
$$V_M(M-2) = V_M(2)^* = 2e^{\pi}$$
$$V_M(M-3) = V_M(3)^* = re^{j\phi}$$

$$V_M(M-4) = V_M(4)^* = 8$$
$$V_M(\mu) = 0, \forall \mu = \frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, \dots, M-5$$

Das Signal $v(n) = \text{IDFT}\{V_M(\mu)\}$ des oben gegebenen Spektrums, durchläuft die abgebildete Verarbeitungskette. Bei der Übertragungsfunktion handelt es sich um ein ideales, reelles Tiefpassfilter $H_{\text{TP}}(e^{j\Omega})$ mit der Grenzfrequenz $\Omega_{\text{g}} = 2\pi\frac{\mu_{\text{g}}}{M} = \frac{3\pi}{M}$.



(d) Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang eines idealen, reellen Tiefpassfilters $|H_{\text{TP}}(e^{j\Omega})|$ im Bereich $-3\pi \leqslant \Omega \leqslant 3\pi$ für die oben angegebene Grenzfrequenz. (4 P)



(e) Welche Werte nimmt das gefilterte Signal $Y_M(\mu) = \text{DFT}_M\{y(n)\}$ für $\mu \in \{0, 1, ..., M-1\}$ an. (6 P)

$$Y_M(\mu) = \begin{cases} \pi & , \mu = 0, \\ -1+2j & , \mu = 1, \\ 0 & , \mu = 2, \\ 0 & , \mu = 3, \\ 0 & , \mu = 4, \\ 0 & , \mu = 5, 6, \dots \frac{M}{2}, \\ 0 & , \mu = \frac{M}{2}+1, \frac{M}{2}+2, ..., M-5, \\ 0 & , \mu = M-4, \\ 0 & , \mu = M-3, \\ 0 & , \mu = M-2, \\ -1-2j & , \mu = M-1. \end{cases} .$$

(f) Welche Art der Filterung müssen Sie durchführen, um nur den Frequenzanteil an der Stelle $\mu = 2$ zu erhalten? Geben Sie die Grenzfrequenzen in gleicher Form an, wie sie für das Tiefpassfilter angegeben sind. (3 P)

Das Signal muss bandpassgefiltert werden $H_{\mathrm{BP}}(e^{j\Omega})$, mit den Grenzfrequenzen z.B.: $\Omega_l = \frac{2\pi}{M}\mu_l = \frac{2\pi}{M} \cdot 1.5 = \frac{3\pi}{M}$ und $\Omega_h = \frac{2\pi}{M}\mu_h = \frac{2\pi}{M} \cdot 2.5 = \frac{5\pi}{M}$.

Aufgabe 3 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System mit dem zugehörigen Pol-/Nullstellendiagramm aus Abbildung 2.

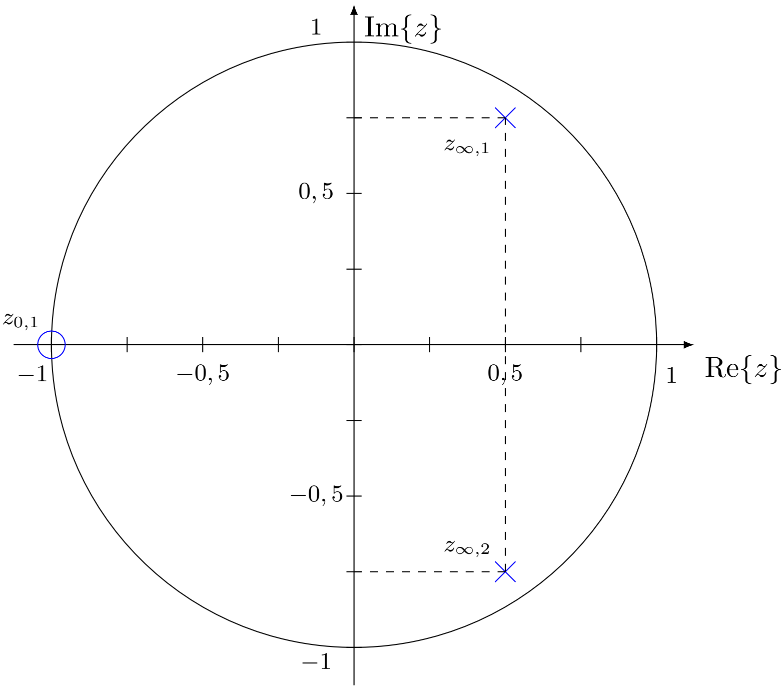


Abbildung 2: Pol-Nullstellendiagramm des Systems $H(z)$.

(a) Um welche Art von Filter (Hochpass, Tiefpass, Bandpass, Bandsperre, Allpass) handelt es sich bei diesem System? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Bei dem angegebenen System handelt es sich um ein Tiefpassfilter. Durch die Nullstelle $z_{0,1} = -1$ werden die hohen Frequenzen unterdrückt. Die Polstellen $z_{\infty,1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{4}j$ verstärken die tiefen Frequenzen.

(b) Ist das System stabil und minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Das System ist stabil, da für die Polstellen $|z_{\infty,1/2}| < 1$ gilt. Außerdem ist es minimalphasig, da für die Nullstelle $|z_{0,1}| \leq 1$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems in Polynomdarstellung. Es gelte $H(z = 1) = \frac{64}{13}$. (4 P)

$$\begin{aligned}
H(z) &= K\,\frac{z+1}{\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}j\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}j\right)\right)} \\
&= K\,\frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}j\right)\left(z-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}j\right)} \\
&= K\,\frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{16}} \\
&= K\,\frac{z+1}{z^2-z+\frac{13}{16}}
\end{aligned}$$

Mit $H(z=1)=\frac{64}{13}$ ergibt sich für den Verstärkungsfaktor K:

$$\begin{aligned}
H(1) &= K\,\frac{1+1}{1^2-1+\frac{13}{16}} = \frac{64}{13} \\
&= K\,\frac{2}{\frac{13}{16}} = \frac{64}{13} \\
&= K\,\frac{32}{13} = \frac{64}{13} \\
\rightarrow K &= \frac{64}{13}\cdot\frac{13}{32} = 2
\end{aligned}$$

Somit lautet die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = 2\,\frac{z+1}{z^2-z+\frac{13}{16}}.$$

(d) Bestimmen Sie aus der Übertragungsfunktion $H(z)$ die Differenzengleichung des Systems in der Form $y(n) = \ldots$. (6 P)

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{Y(z)}{V(z)} = 2\,\frac{z+1}{z^2-z+\frac{13}{16}} \\
\Leftrightarrow Y(z)\left(z^2-z+\frac{13}{16}\right) &= V(z)(2z+2) \\
\Leftrightarrow Y(z)\,z^2 - Y(z)\,z + \frac{13}{16}\,Y(z) &= 2\,V(z)\,z + 2\,V(z) \\
\Leftrightarrow Y(z)\,z^2 &= 2\,V(z)\,z + 2\,V(z) + Y(z)\,z - \frac{13}{16}\,Y(z)
\end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$y(m+2) = 2\,v(m+1) + 2\,v(m) + y(m+1) - \frac{13}{16}\,y(m)$$

Da der aktuelle Ausgangswert ohne Verschiebung dargestellt werden soll, wird die Substitution $n = m+2$ durchgeführt:

$$y(n) = 2\,v(n-1) + 2\,v(n-2) + y(n-1) - \frac{13}{16}\,y(n-2).$$

(e) Zeichnen Sie die Filterstruktur bzw. das Blockschaltbild für die eben berechnete Differenzengleichung. Um einen Filter welcher Ordnung handelt es sich dabei? (6 P)

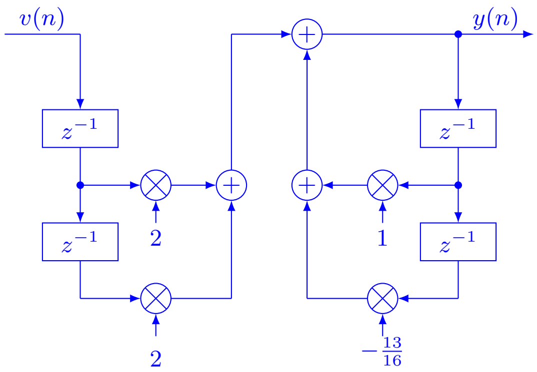


Abbildung 3: IIR-Filter 2. Ordnung.

Es handelt sich hierbei um ein Filter zweiter Ordnung, da zwei Speicherelemente vorhanden sind.

(f) Welche Länge hat die zur obigen Struktur gehörende Impulsantwort? (1 P)

Die Impulsantwort besitzt aufgrund der Rückkopplung des Ausgangssignals $y(n)$ eine unendliche Länge.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben sei die stückweise definierte Sprungantwort $h_{-1}(t)$ mit $T \in \mathbb{N}$ und $T > 0$:

$$h_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0, \\ \frac{3\,t^2}{2\,T} & , \ 0 \le t < T, \\ 8\,t - \frac{5\,t^2}{2\,T} - 4\,T & , \ T \le t < 2\,T, \\ -8\,t + \frac{3\,t^2}{2\,T} + 12\,T & , \ 2\,T \le t < 3\,T, \\ 4\,t - \frac{t^2}{2\,T} - 6\,T & , \ 3\,T \le t < 4\,T, \\ 2\,T & , \ t \ge 4\,T. \end{cases}$$

(g) Geben Sie die allgemeine Formel an, mit der die Impulsantwort $h_0(t)$ aus der Sprungantwort $h_{-1}(t)$ berechnet werden kann und bestimmen Sie anschließend die Impulsantwort $h_0(t)$ für das angegebene System. (5 P)

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort:

$$h_0(t) = \frac{d\,h_{-1}(t)}{dt}.$$

Somit erhält man als Impulsantwort:

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0, \\ 3\,\frac{t}{T} & , \ 0 \le t < T, \\ 8 - 5\,\frac{t}{T} & , \ T \le t < 2\,T, \\ -8 + 3\,\frac{t}{T} & , \ 2\,T \le t < 3\,T, \\ 4 - \frac{t}{T} & , \ 3\,T \le t < 4\,T, \\ 0 & , \ t \ge 4\,T. \end{cases}$$

(h) Zeichnen Sie die Impulsantwort $h_0(t)$ im Bereich $t \in [-2\,T, 6\,T]$ mit allen Achsenbeschriftungen. (5 P)

Hinweis: Es treten keine Sprungstellen auf.

(i) Untersuchen Sie das System auf Stabilität, Reellwertigkeit und Kausalität. (3 P)

Das System ist

- stabil, da die Impulsantwort finit ist,
- reellwertig, da die Impulsantwort reellwertig ist,
- kausal, da die Impulsantwort für $t < 0$ Null ist.

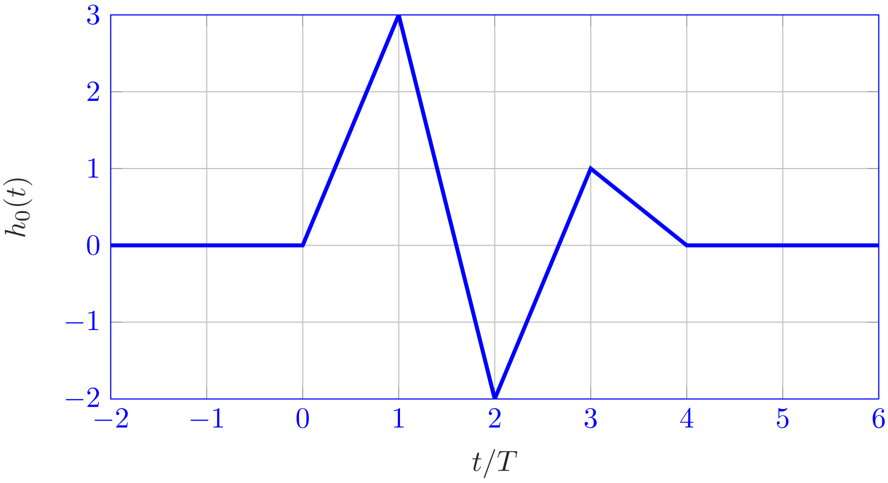


Abbildung 4: Impulsantwort $h_0(t)$ im Bereich $t \in [-2, 6]$.

Dies ist eine leere Seite.