

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2023

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 19.03.2024

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/31	/36

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2023

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: F-SR III - Gebäude F
Datum: 19.03.2024
Beginn: 08:30 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Die komplexen Fourier-Reihenoeffizienten c_μ des zeitkontinuierlichen Signals $v(t) \in \mathbb{R}$ sind gegeben durch:

$$c_\mu = \begin{cases} -\frac{1}{4} + j3 & , \mu = -5, \\ -j & , \mu = -4, \\ \frac{1}{2} & , \mu = -1, \\ 2e^{-j\pi(\mu+1)} & , \mu = 0, \\ \frac{1}{2} & , \mu = 1, \\ j & , \mu = 4, \\ -\frac{1}{4} - j3 & , \mu = 5, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$.

- (a) Bestimmen Sie aus den komplexen Fourier-Reihenoeffizienten die zugehörigen trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten c_0 , a_μ und b_μ des Signals $v(t)$ für $\mu \in \mathbb{N}$. (4 P)

Mit $a_\mu = 2 \operatorname{Re} \{c_\mu\}$ und $b_\mu = -2 \operatorname{Im} \{c_\mu\}$ folgt:

$$c_0 = 2e^{-j\pi} = -2, \quad a_\mu = \begin{cases} 1 & , \mu = 1, \\ -\frac{1}{2} & , \mu = 5, \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} -2 & , \mu = 4, \\ 6 & , \mu = 5, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Geben Sie die Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe an und bestimmen Sie (3 P) das Signal $v(t)$ anhand der zuvor bestimmten trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten.

Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Daraus folgt für $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= -2 + \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{2} \cos\left(5 \frac{2\pi}{T} t\right) - 2 \sin\left(4 \frac{2\pi}{T} t\right) + 6 \sin\left(5 \frac{2\pi}{T} t\right), \\ &= -2 + \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \cos(5\omega_0 t) - 2 \sin(4\omega_0 t) + 6 \sin(5\omega_0 t). \end{aligned}$$

- (c) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal $v(t)$ den Gleichanteil sowie die geraden und ungeraden Wechselanteile. (3 P)

$$v(t) = \underbrace{-2}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \cos(5\omega_0 t)}_{\text{gerade}} - \underbrace{2 \sin(4\omega_0 t) + 6 \sin(5\omega_0 t)}_{\text{ungerade}}.$$

Das Signal $v(t)$ wird nun mit der Abtastfrequenz $\omega_A = 6\omega_0$ abgetastet, woraus das zeitdiskrete Signal $v_A(n)$ resultiert.

- (d) Begründen Sie, ob das Abtasttheorem bei der Abtastung des Signals $v(t)$ mit der Abtastfrequenz ω_A eingehalten wird. Welche Folgen hätte die Verletzung des Abtasttheorems? (4 P)

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Tiefpass-Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz ω_B (bzw. ein Bandpass-Signal mit der Bandbreite ω_B), dann exakt rekonstruierbar ist, wenn es mit der Abtastfrequenz ω_A abgetastet wurde:

$$\omega_A \geq 2\omega_B.$$

Somit gilt für die Abtastung von $v(t)$ mit $\omega_B = 5\omega_0$:

$$2\omega_B = 10\omega_0 \not\geq 6\omega_0 = \omega_A.$$

Dementsprechend wird das Abtasttheorem hier verletzt.

Bei einer Verletzung des Abtasttheorems können unerwünschte Signalkomponenten (**Aliasing**) im diskretisierten Signal auftreten. Dadurch kann es zur Maskierung von erwünschten Signalkomponenten kommen, was zu einem Informationsverlust führt und das ursprüngliche Zeitsignal $v(t)$ nicht mehr vollständig aus dem diskretisierten Signal $v_A(n)$ rekonstruiert werden kann.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei das Spektrum $X(j\omega)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T > 0$ und $X(j\omega) = 0, \forall |\omega| > 3\omega_0$, welches in der folgenden Abbildung dargestellt ist:

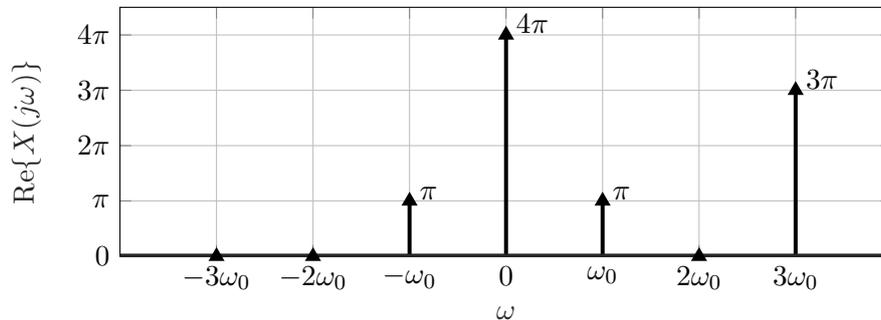


Abbildung 1: Realteil des Spektrums $X(j\omega)$.

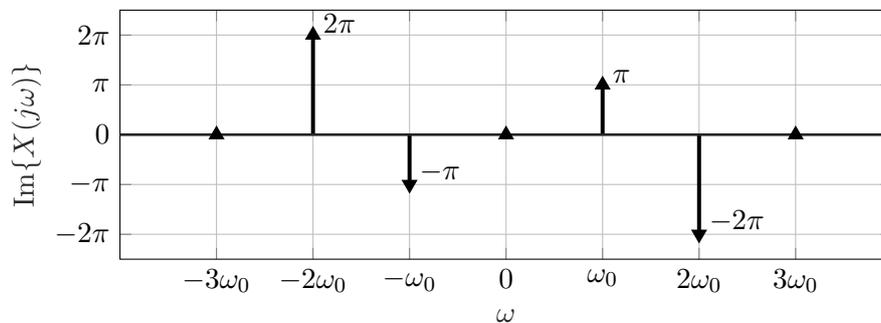


Abbildung 2: Imaginärteil des Spektrums $X(j\omega)$.

- (e) Geben Sie einen Ausdruck für das Spektrum $X(j\omega)$ mit allen vorkommenden Spektralanteilen an. (5 P)

$$X(j\omega) = \pi \left[4\delta_0(\omega) + \left[\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0) \right] + 3\delta_0(\omega - 3\omega_0) \right] - j\pi \left[\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0) \right] + j2\pi \left[\delta_0(\omega + 2\omega_0) - \delta_0(\omega - 2\omega_0) \right].$$

- (f) Bestimmen Sie die inverse Fourier-Transformierte $x(t)$ des Spektrums $X(j\omega)$. (5 P)

Hinweis: Die explizite Berechnung der inversen Fourier-Transformation ist nicht notwendig!

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung des Zeitsignals:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &\circ \bullet \pi [\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)], \\ \sin(\omega_0 t) &\circ \bullet j\pi [\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0)], \\ e^{j\omega_0 t} &\circ \bullet 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$x(t) = 2 + \cos(\omega_0 t) + \frac{3}{2} e^{j3\omega_0 t} - \sin(\omega_0 t) + 2 \sin(2\omega_0 t).$$

- (g) Markieren Sie vorhandene reelle gerade/ungerade Wechselanteile und imaginäre gerade/ungerade Wechselanteile des Zeitsignals $x(t)$. (4 P)

Hinweis: Formen Sie mögliche komplexe Wechselanteile in ihre reellen und imaginären Anteile um!

Mit der Euler-Formel $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$ folgt:

$$\frac{3}{2} e^{j3\omega_0 t} = \frac{3}{2} \left[\cos(3\omega_0 t) + j \sin(3\omega_0 t) \right].$$

Somit folgt:

$$x(t) = 2 + \underbrace{\cos(\omega_0 t) + \frac{3}{2} \cos(3\omega_0 t)}_{\text{reell, gerade}} \underbrace{- \sin(\omega_0 t) + 2 \sin(2\omega_0 t)}_{\text{reell, ungerade}} + j \underbrace{\frac{3}{2} \sin(3\omega_0 t)}_{\text{imaginär, ungerade}}.$$

- (h) Ist das Spektrum $X(j\omega)$ hermite-symmetrisch? Argumentieren Sie anhand der vorkommenden Spektral- und/oder Signalanteile. (3 P)

Ein hermite-symmetrisches Spektrum muss einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil aufweisen.

Das Spektrum $X(j\omega)$ weist zwar einen ungeraden Imaginärteil auf:

$$X(j\omega)_{\text{im,un}} = -\pi \left[\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0) \right] + 2\pi \left[\delta_0(\omega + 2\omega_0) - \delta_0(\omega - 2\omega_0) \right],$$

aber der Realteil $\text{Re}\{X(j\omega)\}$ weist durch den Term $3\pi\delta_0(\omega - 3\omega_0)$ keine gerade Symmetrie auf.

Alternativ: Im Zeitbereich entspricht der Term

$$\frac{3}{2} e^{j3\omega_0 t} = \frac{3}{2} \left[\cos(3\omega_0 t) + j \sin(3\omega_0 t) \right],$$

einem reellen geraden Kosinus- und einem imaginären ungeraden Sinusanteil. Diese Signalanteile entsprechen im Spektrum einem reellen geraden und einem reellen ungeraden Spektralanteil, sodass der Realteil $\text{Re}\{X(j\omega)\}$ keine einheitliche gerade Symmetrie aufweist.

Somit ist das Spektrum $X(j\omega)$ nicht hermite-symmetrisch.

- (i) Ist das Spektrum $X(j\omega)$ bandbegrenzt? Begründen Sie Ihre Aussage. (2 P)

Das Spektrum $X(j\omega)$ weist seine maximale Frequenzkomponente bei $\omega_B = 3\omega_0$ auf und hat außerhalb dieser maximalen Frequenz keine Spektralanteile, gemäß

$$X(j\omega) = 0, \forall |\omega| > 3\omega_0.$$

Somit ist das Spektrum $X(j\omega)$ bandbegrenzt.

Aufgabe 2 (31 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben ist die diskrete Fourier-Transformierte $V_{a,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_a(n)\}$ und die diskrete Folge $v_b(n) = \text{IDFT}\{V_{b,M}(\mu)\}$, beide der Länge $M = 4$:

$$V_{a,M}(\mu) = \begin{cases} 10, & \mu = 0, \\ 5 + j12, & \mu = 1, \\ 2, & \mu = 2, \\ 5 - j12, & \mu = 3, \end{cases} \quad v_b(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 5, & n = 3. \end{cases}$$

- (a) Sie möchten das Ergebnis der zyklischen Faltung von $v_c(n) = v_a(n) \otimes v_b(n)$ aus den oben gegebenen Signalen bestimmen. Beschreiben Sie zwei mögliche Vorgehensweisen! (5 P)

erste Möglichkeit:

- i) Diskrete Fourier-Transformierte $V_{b,M}(\mu) = \text{DFT}\{v_b(n)\}$ durch DFT bestimmen
- ii) Ergebnis der zyklischen Faltung $V_{c,M}(\mu) = V_{a,M}(\mu) \cdot V_{b,M}(\mu)$ im Frequenzbereich bestimmen
- iii) diskrete Folge $v_c(n) = \text{IDFT}\{V_{c,M}(\mu)\}$ durch inverse DFT bestimmen

zweite Möglichkeit:

- i) diskrete Folge $v_a(n) = \text{IDFT}\{V_{a,M}(\mu)\}$ durch inverse DFT bestimmen
- ii) diskrete Folge $v_c(n) = v_a(n) \otimes v_b(n)$ durch zyklische Faltung bestimmen

- (b) Gegeben seien zwei Folgen der Länge M . Welche Faltungs-Arten kennen Sie für die Faltung dieser Folgen? Nennen Sie den Hauptunterschied zwischen den Faltungs-Arten! (3 P)

Es gibt zwei Faltungs-Arten, die zyklische und die lineare Faltung. Bei der zyklischen Faltung wird eine der beiden Folgen zyklisch wiederholt. Das führt dazu, dass das Ergebnis der Faltung die gleiche Länge wie die Ursprungsfolgen hat. Bei der linearen Faltung werden die Folgen nicht wiederholt. Die so entstandene Folge hat die Länge $M_1 + M_2 - 1 |_{M_1=M_2} = 2M - 1$. Durch Auffüllen der Folgen mit Nullen kann die zyklische Faltung in die lineare überführt werden.

- (c) Nehmen Sie an, dass die Folge $v_a(n) = v_b(n) \otimes h(n)$ das Ergebnis einer zyklischen Faltung mit einer Folge $h(n)$ ist. Wie würden Sie die Diskrete Fourier-Transformierte $H_M(\mu) = \text{DFT}\{h(n)\}$ bestimmen? Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise! (3 P)

Um die diskrete Fourier-Transformierte $H_M(\mu) = \text{DFT}\{h(n)\}$ bestimmen zu können, wird die Folge $v_b(n)$ in den Frequenzbereich überführt. Im Frequenzbereich entspricht zyklische Faltung einer Multiplikation $V_{a,M}(\mu) = V_{b,M}(\mu) \cdot H_M(\mu)$. Stellt man die Gleichung nach $H_M(\mu) = \frac{V_{a,M}(\mu)}{V_{b,M}(\mu)}$ um, so lässt sich die Diskrete Fourier-Transformierte durch komplexe Division bestimmen.

- (d) Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $H_M(\mu) = \text{DFT}\{h(n)\}$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Vereinfachen Sie soweit es geht! (10 P)

$$V_{b,M}(\mu) = \sum_{n=0}^3 v_b(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

$$V_{b,M}(0) = (1 + 2 + 3 + 5) = 11,$$

$$\begin{aligned} V_{b,M}(1) &= \left(1 + 2 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{4}} + 3 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 5 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) \\ &= (1 - j2 - 3 + j5) = -2 + j3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{b,M}(2) &= \left(1 + 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4}} + 3 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 5 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) \\ &= (1 - 2 + 3 - 5) = -3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{b,M}(3) &= \left(1 + 2 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4}} + 3 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2} + 5 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3}\right) \\ &= (1 + j2 - 3 - j5) = -2 - j3. \end{aligned}$$

$$H_M(\mu) = \frac{V_{a,M}(\mu)}{V_{b,M}(\mu)}$$

$$H_M(0) = \frac{10}{11},$$

$$H_M(1) = \frac{5 + j12}{-2 + j3} = 2 - j3,$$

$$H_M(2) = -\frac{2}{3},$$

$$H_M(3) = \frac{5 - j12}{-2 - j3} = 2 + j3.$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

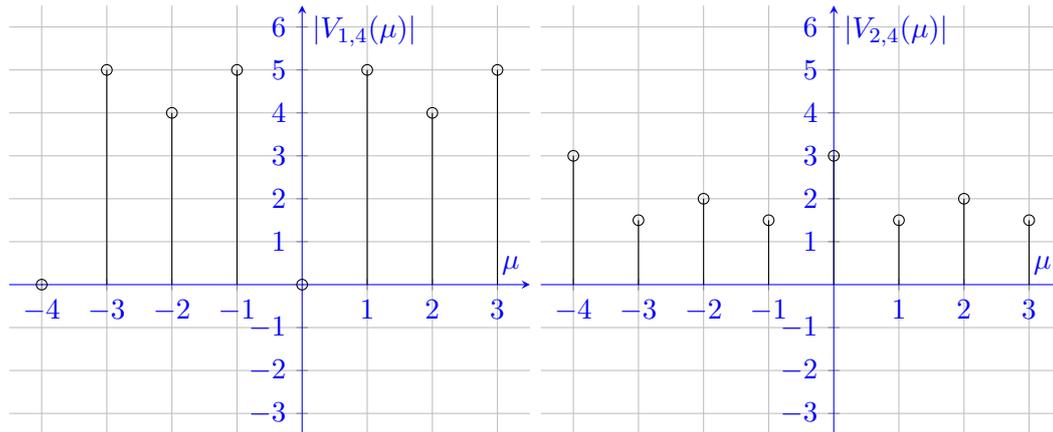
Alle Teilaufgaben in diesem Aufgabenteil können unabhängig von einander gelöst werden.

Gegeben seien die diskreten Fourier-Transformierten der Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$:

$$V_{1,4}(\mu) = \begin{cases} 0 & , \mu = 0 \\ -3 + j4 & , \mu = 1 \\ 4 & , \mu = 2 \\ -3 - j4 & , \mu = 3 \end{cases}, \quad V_{2,4}(\mu) = \begin{cases} 3 & , \mu = 0 \\ 1,5e^{-j \cdot \cos(\frac{3}{7}) \cdot \sin(e)} & , \mu = 1 \\ -2 & , \mu = 2 \\ 1,5e^{+j \cdot \cos(\frac{3}{7}) \cdot \sin(e)} & , \mu = 3 \end{cases}.$$

(e) Skizzieren Sie den Betrag der diskreten Folgen $V_{1,4}(\mu)$ und $V_{2,4}(\mu)$ mit allen Achsenbeschriftungen für $\mu \in \{-4, -3, \dots, 2, 3\}$. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (4 P)

$$|V_{1,4}(\mu)| = \begin{cases} 0 & , \mu = 0 \\ \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 & , \mu = 1 \\ 4 & , \mu = 2 \\ \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 & , \mu = 3 \end{cases}, \quad |V_{2,4}(\mu)| = \begin{cases} 3 & , \mu = 0 \\ 1,5 & , \mu = 1 \\ -2 & , \mu = 2 \\ 1,5 & , \mu = 3 \end{cases}.$$



- (f) Aus der Vorlesung Signale und Systeme I ist Ihnen bekannt, dass die diskrete Fourier-Transformation $V_M(\mu)$ einer Folge $v(n)$ M-periodisch ist. Beweisen Sie diese Eigenschaft durch eine Rechnung, ohne die Zahlen für M und $v(n)$ einzusetzen. (6 P)

$$V_M(\mu + \lambda M) = V_M(\mu).$$

$$\begin{aligned} V_M(\mu + \lambda M) &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j(\mu + \lambda M)\frac{2\pi}{M}n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n} \cdot e^{-j\lambda M\frac{2\pi}{M}n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n} \cdot e^{-j\lambda 2\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \cdot e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n} = V_M(\mu). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (36 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche System $S_1\{v_1(t)\}$ mit der folgenden Systemantwort $y_1(t)$:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^t \alpha v_1(\tau) e^{\pi \alpha t + \tau} d\tau,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte.

(a) Bestimmen Sie die Antwort des Systems $y_{0,1}(t)$ auf die Anregung mit $v_1(t) = \delta_0(t)$. (5 P)

$$y_{0,1}(t) = \int_{-\infty}^t \alpha \delta_0(\tau) e^{\pi \alpha t + \tau} d\tau$$

... mit der Ausblendeigenschaft des Impulses folgt ...

$$= \alpha e^{\pi \alpha t} \int_{-\infty}^t \delta_0(\tau) d\tau$$

$$= \alpha e^{\pi \alpha t} [\delta_{-1}(\tau)]_{-\infty}^t$$

$$= \alpha e^{\pi \alpha t} \left[\delta_{-1}(t) - \underbrace{\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \delta_{-1}(\tau)}_{=0} \right]$$

$$= \alpha e^{\pi \alpha t} \delta_{-1}(t)$$

(b) Bestimmen Sie die Antwort des Systems $y_{-1,1}(t)$ auf die Anregung mit $v_1(t) = \delta_{-1}(t)$. (5 P)

$$y_{-1,1}(t) = \int_{-\infty}^t \alpha \delta_{-1}(\tau) e^{\pi \alpha t + \tau} d\tau$$

$$= \alpha e^{\pi \alpha t} \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) e^{\tau} d\tau$$

$$= \begin{cases} \alpha e^{\pi \alpha t} \int_0^t e^{\tau} d\tau, & t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha e^{\pi \alpha t} [e^{\tau}]_0^t, & t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha e^{\pi \alpha t} (e^t - 1), & t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
 y_{-1,1}(t) &= \int_{-\infty}^t \alpha \delta_{-1}(\tau) e^{\pi \alpha t + \tau} d\tau \\
 &= \alpha e^{\pi \alpha t} \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) e^{\tau} d\tau \\
 &= \alpha e^{\pi \alpha t} \delta_{-1}(t) \int_0^t e^{\tau} d\tau \\
 &= \alpha e^{\pi \alpha t} \delta_{-1}(t) \left[e^{\tau} \right]_0^t \\
 &= \alpha e^{\pi \alpha t} \delta_{-1}(t) (e^t - 1)
 \end{aligned}$$

(c) Was muss für α gelten, damit das System stabil ist? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

Stabilität liegt vor, wenn das System auf ein beschränktes Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal reagiert (BIBO-Stabilität). Dies ist für $\alpha \leq 0$ der Fall, da dann $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t)| = 0$ gilt.

(d) Ist das System reellwertig und kausal? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

- Das System ist reellwertig, da $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben ist und das System somit auf reelle Eingangssignale mit reellen Ausgangssignalen reagiert.
- Das System ist kausal, weil das Ausgangssignal zum Zeitpunkt t_0 nur von Werten $t \leq t_0$ abhängt.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben seien zwei diskrete Systeme. Das eine System besitzt die Übertragungsfunktion

$$H_2(z) = \frac{1}{2} \frac{(z - (-1 + j))(z - (-1 - j))}{(z - (-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}))(z - (-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}))}$$

und das andere System die Impulsantwort

$$h_{0,3}(n) = -\frac{1}{3} \gamma_0(n) + \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{-1}(n).$$

(e) Was lässt sich anhand der Symmetrie der Pol- und Nullstellen über den Verlauf des Betragsfrequenzgangs $|H_2(e^{j\Omega})|$ sagen? (2 P)

Es handelt sich um ein Allpass-System, da die hohen und tiefen Frequenzen gleichermaßen verstärkt werden. Es gilt $z_0 = \frac{1}{z_\infty^*}$. Daher hat der Betragsfrequenzgang einen konstanten Verlauf.

- (f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_3(z) = \mathcal{Z}\{h_{0,3}(n)\}$ in Polynomdarstellung. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. (5 P)

Mit den Korrespondenzen $\gamma_0(n) \circ \bullet 1$ und $a^n \gamma_{-1}(n) \circ \bullet \frac{z}{z-a}$ ergibt sich:

$$h_{0,3}(n) = -\frac{1}{3} \gamma_0(n) + \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

$$\begin{aligned} H_3(z) &= -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{z}{z - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{-z + \frac{3}{4}}{3(z - \frac{3}{4})} + \frac{4z}{3(z - \frac{3}{4})} \\ &= \frac{3z + \frac{3}{4}}{3(z - \frac{3}{4})} = \frac{z + \frac{1}{4}}{z - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

- (g) Die beiden Systeme mit den Übertragungsfunktionen $H_2(z)$ und $H_3(z)$ werden entsprechend Abbildung 3 hintereinandergeschaltet. Geben Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $H_{\text{ges}}(z)$ in Produktdarstellung an. Welchen Einfluss hat $H_2(z)$ auf $|H_{\text{ges}}(e^{j\Omega})|$? (3 P)

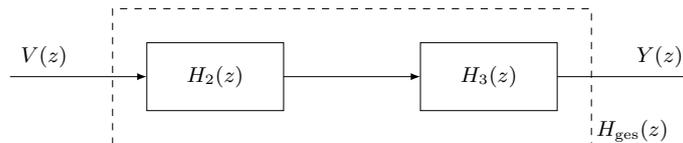


Abbildung 3: Reihenschaltung der Systeme $H_2(z)$ und $H_3(z)$.

$$\begin{aligned} H_{\text{ges}}(z) &= H_2(z) \cdot H_3(z) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(z - (-1 + j))(z - (-1 - j))(z + \frac{1}{4})}{(z - (-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}))(z - (-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}))(z - \frac{3}{4})} \end{aligned}$$

$|H_{\text{ges}}(e^{j\Omega})|$ hat denselben Verlauf wie $|H_3(e^{j\Omega})|$, da $H_2(z)$ ein Allpass-System ist und daher den Verlauf von $|H_{\text{ges}}(e^{j\Omega})|$ nicht beeinflusst.

- (h) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H_{\text{ges}}(z)$ in Polynomdarstellung. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. (5 P)

$$\begin{aligned} H_{\text{ges}}(z) &= \frac{1}{2} \frac{(z - (-1 + j))(z - (-1 - j))(z + \frac{1}{4})}{(z - (-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}))(z - (-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}))(z - \frac{3}{4})} \\ &= \frac{(z^2 + 2z + 2)(z + \frac{1}{4})}{(2(z^2 + z + \frac{1}{2}))(z - \frac{3}{4})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z^3 + \frac{1}{4}z^2 + 2z^2 + \frac{1}{2}z + 2z + \frac{1}{2}}{2z^3 - \frac{3}{2}z^2 + 2z^2 - \frac{3}{2}z + z - \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{z^3 + \frac{9}{4}z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{1}{2}}{2z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Gegeben sei ein diskretes System mit der Impulsantwort $h_{0,4}(n)$ aus Abbildung 4.

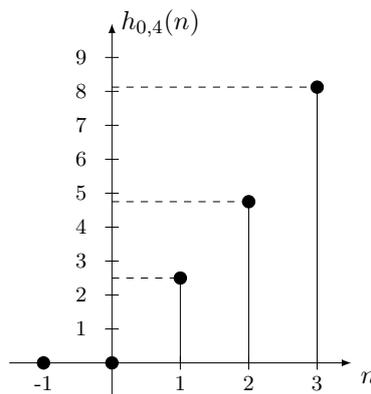


Abbildung 4: Impulsantwort $h_{0,4}(n)$ im Bereich $n \in [-1, 3]$.

(i) Ordnen Sie die richtige Impulsantwort der abgebildeten Impulsantwort zu. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

(A) $h_{0,4,A}(n) = -\gamma_0(n) - \gamma_{-1}(n) + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n)$

(B) $h_{0,4,B}(n) = -2\gamma_{-1}(n) + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n)$

(C) $h_{0,4,C}(n) = -\gamma_0(n) - 2\gamma_{-1}(n) + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n)$

Impulsantwort (C) ist die zugehörige Impulsantwort. Die Impulsfunktion $\gamma_0(n)$ ist nur an der Stelle $n = 0$ gleich 1 und ansonsten 0. Die Sprungfolge ist 1 für $n \geq 0$ und 0 für $n < 0$. Durch Einsetzen kann man erkennen, dass (C) zur dargestellten Impulsantwort gehört.

(j) Nennen Sie zwei Systemeigenschaften, mit denen eindeutig überprüft werden kann, welches Pol-Nullstellen-Diagramm aus Abbildung 5 zum gegebenen System gehört. Geben Sie für jedes Pol-Nullstellen-Diagramm mit Hilfe dieser Eigenschaften an, ob dieses zum gegebenen System gehört. (4 P)

Anhand der Reellwertigkeit und der Stabilität lässt sich eindeutig überprüfen, welches Pol-Nullstellen-Diagramm zum gegebenen System gehört. Aus der Impulsantwort ist ersichtlich, dass das System reellwertig ist. Außerdem ist es nicht stabil, da die Impulsantwort nicht absolut summierbar ist.

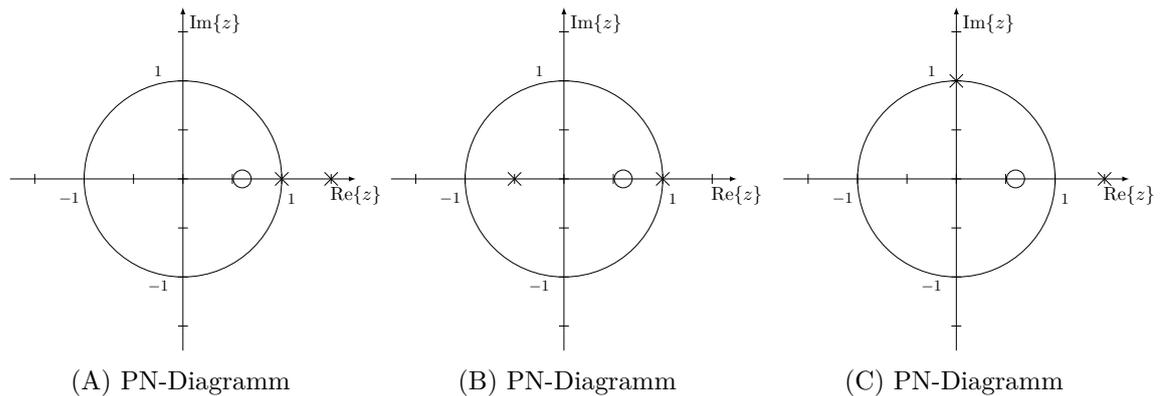


Abbildung 5: Pol-/Nullstellen-Diagramme diskreter Systeme.

- (A) ist das gesuchte Pol-Nullstellen-Diagramm. Alle Pol- und Nullstellen sind reellwertig, wodurch das System reellwertig ist. Außerdem liegt eine Polstelle außerhalb des Einheitskreises, weshalb das System nicht stabil ist.
- (B) kann nicht das gesuchte Pol-Nullstellen-Diagramm sein. Es sind zwar alle Pol- und Nullstellen – und somit auch das System – reellwertig, allerdings liegen alle Polstellen im bzw. auf dem Einheitskreis, wodurch das System grenzstabil ist.
- (C) kann nicht das gesuchte Pol-Nullstellen-Diagramm sein. Das System ist zwar nicht stabil, da eine Polstelle außerhalb des Einheitskreises liegt, allerdings ist eine Polstelle komplexwertig und liegt nicht als konjugiert-komplexes Paar vor, weshalb das System komplexwertig ist.

Die Kausalität kann hier nicht als Kriterium verwendet werden, da sowohl das zur Impulsantwort gehörige System als auch alle zu den jeweiligen Pol-Nullstellen-Diagrammen gehörenden Systeme kausal sind.

(k) Ist das System aus Abbildung 5 (B) minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 P)

Das System ist minimalphasig, da die Nullstelle innerhalb des Einheitskreises liegt.

Dies ist eine leere Seite.