

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2025

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 10.03.2026

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/34	/33

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2025

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: ES21 - Mildred-Dresselhaus-Hörsaal
Datum: 10.03.2026
Beginn: 09:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben ist das Signal $v(t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$v(t) = -4 \sin(3\omega_0 t) \cos(5\omega_0 t) + 12 \left(1 - \cos^2(6\omega_0 t)\right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{\omega_0} \sin(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \right).$$

(a) Geben Sie die Definition der trigonometrischen, sowie der komplexen Fourier-Reihe an! (3 P)

Definition der komplexen Fourier-Reihe:

$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}.$$

Definition der trigonometrischen Fourier-Reihe:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right).$$

(b) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten des Signals $v(t)$! (7 P)

Mit den trigonometrischen Zusammenhängen

$$I : -4 \sin(3\omega_0 t) \cos(5\omega_0 t) = 2 \sin(2\omega_0 t) - 2 \sin(8\omega_0 t),$$

$$II : 12 \left(1 - \cos^2(6\omega_0 t)\right) = 12 \left(\frac{1 - \cos(12\omega_0 t)}{2}\right) = 6 - 6 \cos(12\omega_0 t),$$

$$III : \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{\omega_0} \sin(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{4}{\omega_0} \cos(2\omega_0 t) \right) = 8 \sin(2\omega_0 t)$$

ergibt sich

$$v(t) = 6 + 10 \sin(2\omega_0 t) - 2 \sin(8\omega_0 t) - 6 \cos(12\omega_0 t).$$

Und damit die Koeffizienten

$$c_0 = 6,$$

$$a_{\mu} = \begin{cases} -6 & , \mu = 12 \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases}$$

$$b_{\mu} = \begin{cases} 10 & , \mu = 2 \\ -2 & , \mu = 8 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (c) Bestimmen Sie die Periodendauer des Signals $v(t)$. (2 P)
 Da die Frequenzen der Teilfunktionen ganzzahlige vielfache der Grundfrequenz ($2\omega_0$) sind, folgt $T_v = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{T}{2}$.
- (d) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum $|V(j\omega)|$ von $v(t)$ im Bereich $\omega \in [-12\omega_0, 12\omega_0]$ mit allen Achsenbeschriftungen. (5 P)

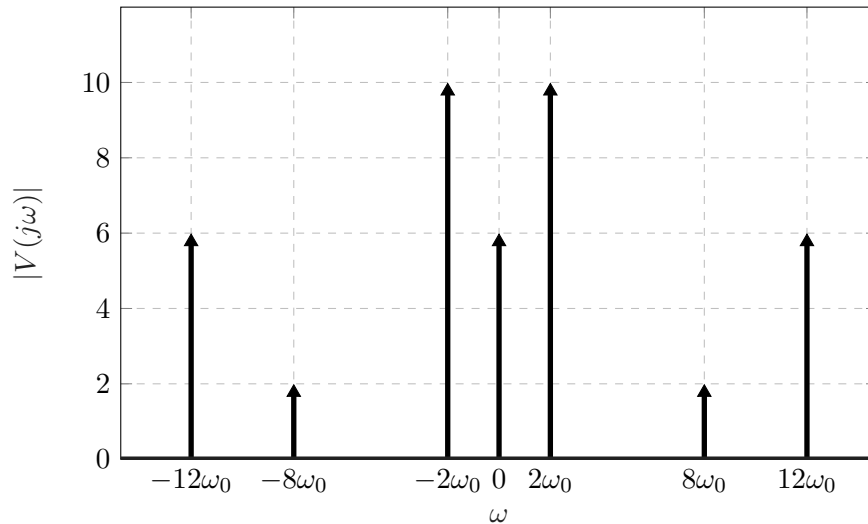


Abbildung 1: Amplitudenspektrum $|V(j\omega)|$.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben ist das in Abbildung 2 dargestellte Signal $x(t)$.

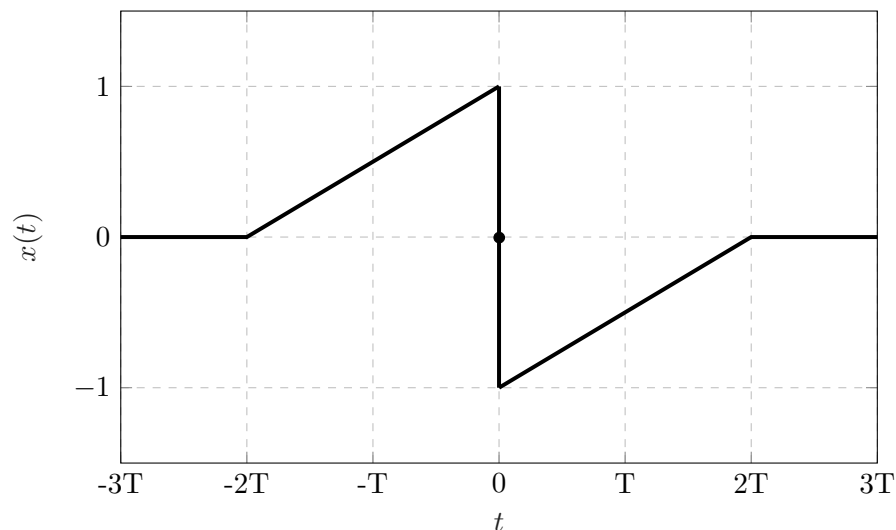


Abbildung 2: Graph von $x(t)$.

- (e) Bestimmen Sie das Signal $x(t)$ im Zeitbereich! Nehmen Sie dabei an, dass außerhalb des dargestellten Bereichs $x(t) = 0$ gilt. (4 P)

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{2T} & , -2T \leq t < 0 \\ -1 + \frac{t}{2T} & , 0 < t \leq 2T \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (f) Ist $x(t)$ gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)
 $x(t)$ ist ungerade, da überall $x(-t) = -x(t)$ gilt.

- (g) Geben Sie die Definition der Fourier-Transformation $X(j\omega)$ von $x(t)$ an! (1 P)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- (h) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ von $x(t)$! (9 P)
 Das Bestimmen von Sinus/Cosinus-Termen ist dabei nicht notwendig.

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-2T}^0 \left(1 + \frac{t}{2T}\right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{2T} \left(-1 + \frac{t}{2T}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-2T}^0 e^{-j\omega t} dt - \int_0^{2T} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2T} \left(\int_{-2T}^0 t e^{-j\omega t} dt + \int_0^{2T} t e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \left[-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-2T}^0 + \left[\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^{2T} - \frac{1}{2T\omega^2} \left(\left[(-j\omega t - 1) e^{-j\omega t} \right]_{-2T}^0 + \left[(-j\omega t - 1) e^{-j\omega t} \right]_0^{2T} \right) \\ &= -\frac{2}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} e^{j2\omega T} + \frac{1}{j\omega} e^{-j2\omega T} - \frac{1}{2T\omega^2} \left((-j2\omega T + 1) e^{j2\omega T} + (-j2\omega T - 1) e^{-j2\omega T} \right) \\ &= -\frac{2}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \left(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T} \right) - \frac{1}{j\omega} \left(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T} \right) - \frac{1}{2T\omega^2} \left(e^{j2\omega T} - e^{-j2\omega T} \right) \\ &= -\frac{2}{j\omega} - \frac{1}{2T\omega^2} \left(e^{j2\omega T} - e^{-j2\omega T} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

(a) Nennen Sie zwei grundlegende Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation (DFT). (4 P)

- **Periodizität:** Sowohl das abgetastete Signal als auch das DFT-Spektrum sind periodisch mit der Periodenlänge M .
- **Linearität:** Die DFT einer Linearkombination von Signalen ist die Linearkombination ihrer einzelnen DFTs.

$$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad a_1 V_{1M}(\mu) + a_2 V_{2M}(\mu)$$

- **Zeitverschiebung:** Eine Verschiebung im Zeitbereich führt zu einer Phasenverschiebung im Frequenzbereich, eine Frequenzverschiebung zu einer Verschiebung der DFT-Indizes.

$$v(n - n_0) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0}$$

(b) Beschreiben Sie kurz, was man unter einem LTI-System versteht. (3 P)

Ein LTI-System ist linear und zeitinvariant. Linearität bedeutet, dass das System das Superpositionsprinzip erfüllt, und Zeitinvarianz, dass eine zeitliche Verschiebung des Eingangssignals zu einer entsprechenden Verschiebung des Ausgangssignals führt.

(c) Welche Operation im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich bei Verwendung der DFT? (2 P)

Eine punktweise Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer zyklischen Faltung im Zeitbereich.

$$v_1(n) \otimes v_2(n) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad V_{1M}(\mu) \cdot V_{2M}(\mu)$$

Eine DFT $V_M(\mu)$ erfülle:

$$V_M(M - \mu) = V_M^*(\mu)$$

(d) Benennen Sie diese Eigenschaft. (2 P)

Die Eigenschaft $V_M(M - \mu) = V_M^*(\mu)$ wird als Hermitesymmetrie bezeichnet.

(e) Geben Sie an, welche Aussage sich daraus über die Zeitfolge $v(n)$ ergibt? (3 P)

Erfüllt das DFT-Spektrum die Hermitesymmetrie, so ist die zugehörige Zeitfolge $v(n)$ reellwertig.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sei die diskrete Folge $v(n)$ mit der Länge $M = 4$:

$$v(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 2 & , n = 1, \\ 0 & , n = 2, \\ -1 & , n = 3. \end{cases}$$

- (f) Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\}$ und geben Sie die entsprechende Formel für $M = 4$ an. (5 P)

Die DFT ist definiert als:

$$V_4(\mu) = \sum_{n=0}^3 v(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}\mu n}.$$

Für $\mu \in [0, 1, 2, 3]$ ergibt sich:

$$V_4(0) = 1 + 2 + 0 - 1 = 2$$

$$V_4(1) = 1 + 2e^{-j\pi/2} - e^{-j3\pi/2} = 1 - j2 - j = 1 - 3j$$

$$V_4(2) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$V_4(3) = V^*(1) = 1 + 3j$$

Somit gilt für $V_4(\mu)$:

$$V_4(\mu) = [2, 1 - 3j, 0, 1 + 3j]$$

- (g) Geben Sie an, ob die Folge $v(n)$ reellwertig ist, und begründen Sie Ihre Antwort anhand der DFT-Eigenschaften. (2 P)

Da das DFT-Spektrum die Hermitesymmetrie erfüllt,

$$V_4(3) = V_4^*(1),$$

ist die Zeitfolge $v(n)$ reellwertig.

- (h) Beschreiben Sie den Einfluss der komplexen Spektralanteile auf Phase und Signalform. (4 P)

Die komplexen Spektralanteile enthalten Phaseninformationen. Sie beeinflussen die zeitliche Form des Signals, insbesondere dessen Verschiebung und Symmetrie, ohne den Betrag des Spektrums zu verändern.

$|V(\mu)|$ = zeigt die Amplitude der Frequenzkomponente.

$\angle V(\mu)$ = beschreibt die zeitliche Lage bzw. Verschiebung der Frequenzanteile.

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

Ein digitales LTI-System hat die Impulsantwort $h(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 2 & , n = 1, \\ 1 & , n = 2, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

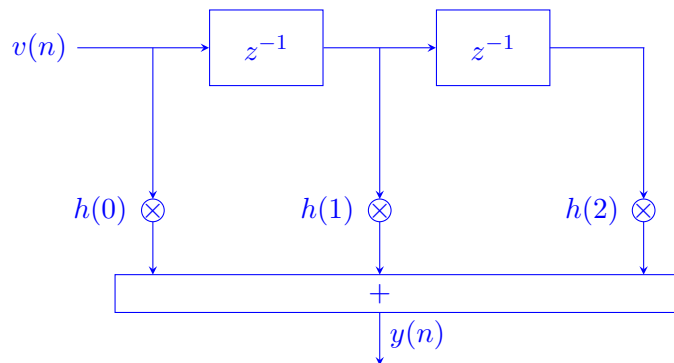
mit dem Eingangssignal $v(n)$:

$$v(n) = \begin{cases} 2 & , n = 0, \\ 1 & , n = 1, \\ 0 & , n = 2, \\ 1 & , n = 3, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Ausgangssignal des Systems ist definiert durch:

$$y(n) = v(n) * h(n).$$

- (i) Stellen Sie das digitale System als Blockdiagramm dar und kennzeichnen Sie alle Elemente (5 P)



- (j) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(n)$. (4 P)
Die lineare Faltung ist definiert als:

$$y(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=0}^2 h(k) v(n - k).$$

Für $n \in [0, 1, \dots, 5]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} y(-1) &= 0, \\ y(0) &= 2 \cdot 1 = 2, \\ y(1) &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5, \\ y(2) &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4, \\ y(3) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2, \\ y(4) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2, \\ y(5) &= 1 \cdot 1 = 1, \\ y(6) &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt für $y(n)$:

$$y(n) = \begin{cases} 2 & , n = 0, \\ 5 & , n = 1, \\ 4 & , n = 2, \\ 2 & , n = 3, \\ 2 & , n = 4, \\ 1 & , n = 5, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei ein diskretes, reellwertiges System mit der Impulsantwort $h(n)$:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n n \gamma_{-1}(n) - \frac{1}{40} \gamma_0(n-3)$$

- (a) Benennen Sie die Elementarsignale γ_0 und γ_{-1} . (1 P)
 $\gamma_0(n)$ ist eine Impulsfolge und $\gamma_{-1}(n)$ eine Sprungfolge.
- (b) Zeichnen Sie die Impulsantwort im Bereich $n \in [-1, 4]$. Denken Sie dabei an eine vollständige Beschriftung. (4 P)

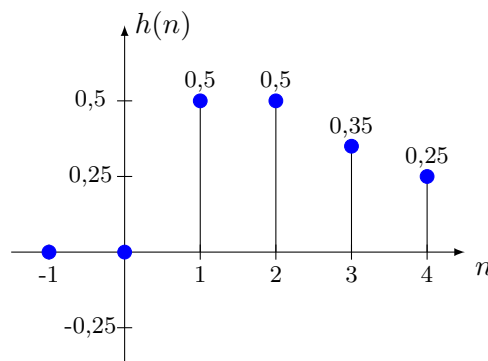


Abbildung 3: Impulsantwort $h(n)$ im Bereich $n \in [-1, 4]$.

- (c) Geben Sie die allgemeine Formel an, mit welcher eine Übertragungsfunktion $H(z)$ aus einer Impulsantwort $h(n)$ berechnet werden kann. (2 P)

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

- (d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ für das gegebene System. Eine explizite Anwendung der Formel aus (c) ist nicht notwendig. (2 P)
 Mit den Korrespondenzen $n a^n \gamma_{-1}(n) \leftrightarrow \frac{z^a}{(z-a)^2}$ und $\gamma_0(n) \leftrightarrow 1$ und der Eigenschaft $v(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} V(z)$ folgt:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{40} z^{-3}$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

(e) Nennen Sie die Kriterien für Stabilität und Reellwertigkeit von kontinuierlichen, linearen Systemen. (4 P)

- **Stabilität:** Ein kontinuierliches System ist stabil, wenn alle Polstellen in der linken Halbebene liegen und mindestens genauso viele Pol- wie Nullstellen vorhanden sind (Zählergrad $H(s) \leq$ Nennergrad $H(s)$).
- **Reellwertigkeit:** Ein kontinuierliches System ist reellwertig, wenn alle Pol- und Nullstellen reell sind oder als konjugiert-komplexes Paar vorliegen.

Gegeben sei nun das folgende Pol-Nullstellen-Diagramm des kontinuierlichen, linearen Systems $H(s)$.

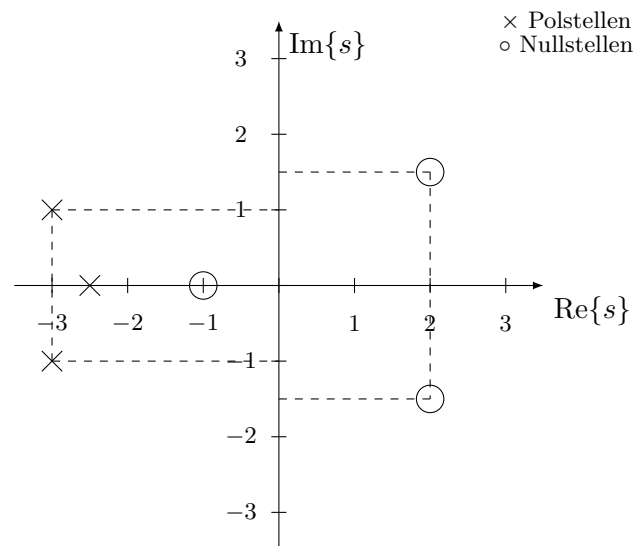


Abbildung 4: Pol-Nullstellen-Diagramm von $H(s)$.

(f) Überprüfen Sie anhand der Kriterien aus (e), ob das System $H(s)$ stabil und reellwertig ist. (2 P)

- **Stabilität:** Das System ist stabil, da beide Bedingungen erfüllt sind.
- **Reellwertigkeit:** Das System ist reellwertig, da ebenfalls beide Bedingungen erfüllt sind.

(g) Das gegebene System $H(s)$ ist gemischtphasig. Beschreiben Sie, woran man diese Eigenschaft erkennt. (2 P)

Das System ist gemischtphasig, da die Nullstellen sowohl in der linken als auch in der rechten Halbebene liegen.

(h) Nennen Sie die beiden Anteile, in welche gemischtphasige Systeme zerlegt werden können. (2 P)

Gemischtphasige Systeme können in einen minimalphasigen Anteil und einen Allpass-Anteil zerlegt werden.

- (i) Stellen Sie die Übertragungsfunktion $H(s)$ in Produktform auf. (3 P)

$$H(s) = \frac{(s+1)\left(s - \left(2 + j\frac{3}{2}\right)\right)\left(s - \left(2 - j\frac{3}{2}\right)\right)}{\left(s + \frac{5}{2}\right)\left(s - (-3 + j)\right)\left(s - (-3 - j)\right)}$$

- (j) Zerlegen Sie das System $H(s)$ in die zwei Anteile aus Aufgabenteil (h). Zeichnen Sie dafür die zugehörigen Pol-Nullstellen-Diagramme und geben Sie die Übertragungsfunktionen in Produktform an. (8 P)

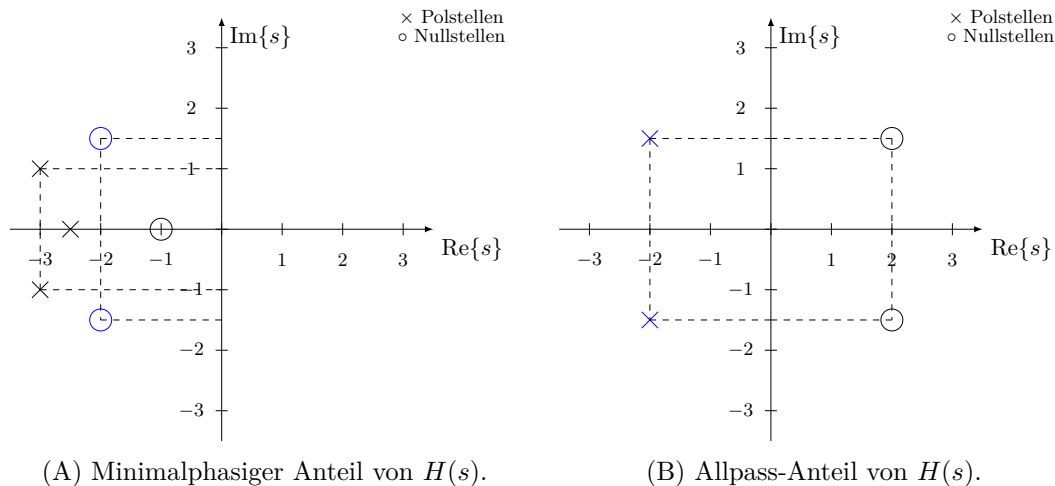


Abbildung 5: Zerlegung von $H(s)$ in einen minimalphasigen Anteil und einen Allpass-Anteil.

Übertragungsfunktionen:

$$H_{\min}(s) = \frac{(s+1)\left(s - \left(-2 + j\frac{3}{2}\right)\right)\left(s - \left(-2 - j\frac{3}{2}\right)\right)}{\left(s + \frac{5}{2}\right)\left(s - (-3 + j)\right)\left(s - (-3 - j)\right)},$$

$$H_{\text{all}}(s) = \frac{\left(s - \left(2 + j\frac{3}{2}\right)\right)\left(s - \left(2 - j\frac{3}{2}\right)\right)}{\left(s - \left(-2 + j\frac{3}{2}\right)\right)\left(s - \left(-2 - j\frac{3}{2}\right)\right)}$$

- (k) Diskutieren Sie, weshalb eine solche Aufteilung sinnvoll ist. (3 P)

Die Zerlegung eines gemischtphasigen Systems in einen minimalphasigen und einen Allpass-Anteil ist sinnvoll, da sie eine Trennung von Amplituden- und Phaseneffekten ermöglicht. Der Allpass-Anteil weist einen konstanten Betragsfrequenzgang auf, sodass der Betragsfrequenzgang des minimalphasigen Anteils dem des gemischtphasigen Systems entspricht. Zusätzliche Phasenverzerrungen sind im Allpass-Anteil enthalten, da der minimalphasige Anteil eine geringstmögliche Phasenverzerrung aufweist. Somit kann der Phasenfrequenzgang durch Multiplikation weiterer Allpass-Systeme verändert werden, ohne den Betragsfrequenzgang zu beeinflussen.

Dies ist eine leere Seite.