

Sommersemester 2022

Signale und Systeme I

Lösung zu den Übungsaufgaben

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben	3
1	Signalleistung und -energie, Variablenormierung	3
2	Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme	4
3	Systemeigenschaften zeitdiskreter Systeme	6
4	Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme	6
5	Periodizität kontinuierlicher Signale	7
6	Abtastung, Periodizität diskreter Signale	9
7	Periodizität diskreter Signale	9
8	Periodizität diskreter Signale	10
9	Fourier-Reihe	11
10	Fourier-Reihe	13
11	Diskrete Fourier-Transformation	16
12	Fourier-Reihe, Abtastung, diskrete Fourier-Transformation	17
13	Diskrete Fourier-Transformation	20
14	Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale	21
15	Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale	23
16	Fourier-Transformation	24
17	Diskrete Fourier-Transformation	26
18	Faltung kontinuierlicher Signale	28
19	Faltung diskreter Signale	30
20	Fourier-Transformation	31
21	Lineare und zyklische Faltung	32
22	Faltung kontinuierlicher Signale	33
23	Laplace-Transformation	34
24	Laplace-Transformation	35
25	Symmetriebeziehungen von z- und Laplace-Transformation	36
26	z-Transformation	37
27	Inverse z-Transformation	38
28	Inverse z-Transformation, Partialbruchzerlegung	39
29	Laplace-Transformation, Impuls- und Sprungantwort	40
30	Impuls- und Sprungantwort	43
31	Laplace-Transformation, Pol-/Nullstellendiagramm	43
32	Impuls- und Sprungantwort	45
33	Pol-/Nullstellendiagramm	45
A	Übersicht zu Fourier-Reihe und Fourier-Transformation	48

1 Aufgaben

1 Signalleistung und -energie, Variablenormierung

An einen ohmschen Widerstand von $R = 2 \Omega$ wird die Spannung

$$u(t) = \begin{cases} 1 \frac{V}{s} t & , \quad 0 \leq t \leq 3s \\ 0 V & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

angelegt. Berechnen Sie sowohl die Leistung als auch Energie, die in diesem Widerstand umgesetzt wird

- (a) ohne Variablenormierung
- (b) mit Variablenormierung.

1.1 Lösungsansatz

Energie und Leistung, die in einem ohmschen Widerstand R umgesetzt werden, sind wie folgt definiert:

$$\text{Leistung: } p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t) \cdot R$$

$$\text{Energie: } w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$$

- (a) Lösung ohne Variablenormierung:

Die gegebene Spannung $u(t)$ in obige Gleichungen einsetzen und diese auflösen. Dabei müssen alle Einheiten „mitgenommen“ werden!

- (b) Lösung mit Variablenormierung:

Die Größen in einen dimensionslosen Teil und einen Teil, der die Dimension trägt zerlegen, z.B. für die Zeit $t = t_0 \cdot \tau$ (t_0 beinhaltet hier die Dimension, τ den Zahlenwert). So lassen sich normierte Darstellungen für Spannung, Leistung und Energie finden und die normierte Energie kann berechnet werden. Zuletzt muss die Normierung rückgängig gemacht werden, um ein Ergebnis in physikalischen Größen zu erhalten.

1.2 Ergebnis

Unabhängig von der Vorgehensweise erhält man:

$$\text{Leistung: } p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 \frac{\text{VA}}{\text{s}^2}, & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \text{ s} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\text{Energie: } w(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \text{ s} \\ \frac{1}{6} t^3 \frac{\text{VA}}{\text{s}^2}, & \text{für } 0 \leq t \leq 3 \text{ s} \\ \frac{9}{2} \text{ VAs}, & \text{für } t > 3 \text{ s}. \end{cases}$$

2 Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme

Nachfolgend sind mehrere zeitkontinuierliche Systeme, beschrieben durch die Reaktion $y(t)$ auf die Eingangsfunktion $v(t)$, gegeben. Überprüfen Sie jeweils, ob diese Systeme linear, verschiebungsinvariant, kausal und stabil sind.

(a) $y(t) = v^2(t)$

(b) $y(t) = \frac{d}{dt} v(t)$

(c) $y(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$

(d) $y(t) = v(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$

(e) $y(t) = v(t) \cdot r_p(t)$, mit $r_p(t)$ siehe Abbildung 1.

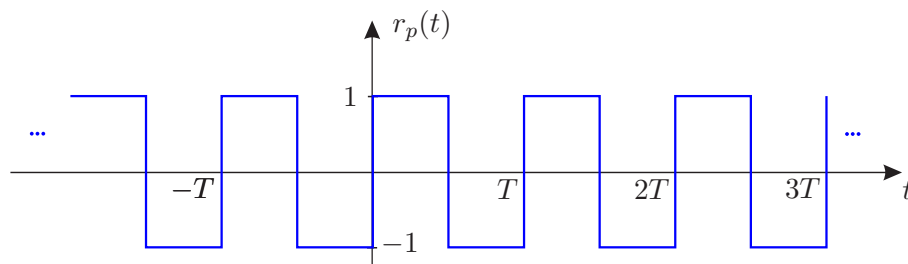


Abbildung 1: Signal zu Aufgabe 2 (e).

(f) $y(t) = |v(t)|$

(g) $y(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$

2.1 Lösungsansatz

Ein System mit Eingangssignal $v(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ kann mit Hilfe des Systemoperators $S\{\dots\}$ durch die Gleichung

$$y(t) = S\{v(t)\}$$

beschrieben werden. Dabei können für das System (und somit auch für den Systemoperator) gewisse Eigenschaften gelten:

Linearität: Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz gilt:

$$S\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l v_l(t)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l S\{v_l(t)\}.$$

Verschiebungsinvarianz: Ein System ist verschiebungsinvariant, wenn es in der Reihenfolge mit einer Signalverschiebung vertauscht werden darf:

$$S\{v(t - \tau)\} = y(t - \tau).$$

Kausalität: Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal $y(t)$ nur von vergangenen Werten des Eingangssignals $v(t)$ abhängt:

$$y(t_0) \text{ wird nur aus Werten } v(t \leq t_0) \text{ berechnet.}$$

Das System heißt gedächtnisbehaftet, wenn dazu Werte $v(t < t_0)$ nötig sind. Sind nur Eingangswerte zum Zeitpunkt t_0 nötig, heißt das System gedächtnislos.

Stabilität: Ein System ist stabil, wenn es auf beschränkte Eingangssignale mit beschränkten Ausgangssignalen reagiert. Daraus folgt die Definition der *bounded input/bounded output* (BIBO) Stabilität:

$$\text{Für } |v(t)| \leq M_1 < \infty, \forall t \text{ muss gelten } |y(t)| \leq M_2 < \infty, \forall t.$$

2.2 Ergebnis

Aufgabe	Linear	Verschiebungsinvariant	Kausal	Stabil
(a)		✓	✓ (gedächtnislos)	✓
(b)	✓	✓	(gedächtnisbehaftet)	
(c)	✓		(gedächtnisbehaftet)	
(d)	✓		✓ (gedächtnislos)	✓
(e)	✓		✓ (gedächtnislos)	✓
(f)		✓	✓ (gedächtnislos)	✓
(g)	✓	✓	✓ (gedächtnisbehaftet)	

✓ Eigenschaft erfüllt.

3 Systemeigenschaften zeitdiskreter Systeme

Nachfolgend sind mehrere zeitdiskrete Systeme, beschrieben durch die Reaktion $y(n)$ auf die Eingangsfunktion $v(n)$, gegeben. Überprüfen Sie jeweils, ob diese Systeme linear, verschiebungsinvariant, kausal und stabil sind.

$$(a) \quad y(n) = v^2(n)$$

$$(b) \quad y(n) = v(n) \cdot \sin(\Omega_0 n)$$

$$(c) \quad y(n) = \sum_{\mu=0}^n v(\mu), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$(d) \quad y(n) = v(n - N), \quad N \in \mathbb{Z}$$

3.1 Lösungsansatz

Gleicher Lösungsansatz wie zu Aufgabe 2. Die Definitionen von Linearität, Verschiebungsinvarianz, Kausalität und Stabilität für zeitkontinuierliche Systeme können auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden.

3.2 Ergebnis

Aufgabe	Linear	Verschiebungsinvariant	Kausal	Stabil
(a)		✓	✓ (gedächtnislos)	✓
(b)	✓		✓ (gedächtnislos)	✓
(c)	✓		✓ (gedächtnisbehaftet)	
(d)	✓	✓	✓ (für $N \geq 0$)	✓

✓ Eigenschaft erfüllt.

4 Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme

Gegeben ist ein System, beschrieben durch die Reaktion $y(t)$ auf das Eingangssignal $v(t)$:

$$y(t) = \cos(\omega_0 \cdot v(t)).$$

Untersuchen Sie, ob das System linear, verschiebungsinvariant, kausal und stabil ist.

4.1 Lösungsansatz

Gleicher Lösungsansatz wie zu Aufgabe 2.

4.2 Ergebnis

Linearität: Annahme: $v(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t)$. Auf dieses Signal reagiert das System mit

$$\begin{aligned} y(t) &= S\{v(t)\} = \cos[\omega_0(\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t))] \\ &\neq \alpha_1 \cos(\omega_0 v_1(t)) + \alpha_2 \cos(\omega_0 v_2(t)). \end{aligned}$$

Für ein lineares System müsste die letzte Zeile gelten.

⇒ Das System ist *nicht* linear.

Verschiebungsinvarianz: Auf ein verschobenes Signal reagiert das System mit

$$\begin{aligned} S\{v(t - \tau)\} &= \cos(\omega_0 v(t - \tau)) \\ &= y(t - \tau). \end{aligned}$$

⇒ Das System ist verschiebungsinvariant.

Kausalität: Das Ausgangssignal zum Zeitpunkt t_0

$$y(t_0) = \cos(\omega_0 t_0)$$

hängt nur vom Eingangssignal zum Zeitpunkt t_0 ab.

⇒ Das System ist kausal und gedächtnislos.

Stabilität: Für den Betrag des Ausgangssignals gilt

$$|y(t)| = |\cos(\omega_0 v(t))| \leq 1 < \infty$$

⇒ Das System ist stabil.

5 Periodizität kontinuierlicher Signale

Überprüfen Sie die folgenden Zeitsignale auf Periodizität.

(a) $v(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\sqrt{2} \omega_0 t)$

(b) $v(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) - \frac{\tan(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \omega_0 t)}{1 + \tan^2(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \omega_0 t)}$

(c) $v(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) \cdot \sin(\sqrt{2} \omega_0 t)$

(d) $v(t) = \sum_{n=1}^5 \sin(\sqrt{n} \omega_0 t)$

5.1 Lösungsansatz

- Ein kontinuierliches Signal $v(t)$ ist periodisch, wenn

$$v(t) = v(t + \lambda T)$$

mit Periodendauer $T \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ gilt.

- Multiplikationen von Sinustermen sollten in Additionen überführt werden. Hierbei können folgende Additionstheoreme hilfreich sein:

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

- Die Summe zweier periodischer Funktionen ist periodisch, wenn die Periodendauern T_1 und T_2 der beiden Funktionen ganzzahlige Vielfache voneinander sind. Für die Periodendauer T der Summe gilt dann

$$T = \lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}.$$

Für das Verhältnis der Periodendauern muss also

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}$$

gelten. Dies kann auch auf die Summation beliebig vieler periodischer Funktionen übertragen werden: Die Summe ist nur dann periodisch wenn alle Periodendauern ganzzahlige Vielfache voneinander sind.

5.2 Ergebnis

(a) Nicht periodisch.

(b) Periodisch mit Periodendauer $T = \frac{T_0}{1-\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{(1-\sqrt{2})\omega_0}$

(c) Periodisch mit Periodendauer $T = \frac{T_0}{1+\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{2})\omega_0}$

(d) Nicht periodisch.

6 Abtastung, Periodizität diskreter Signale

Ein mit T_0 periodisches Signal $v_0(t)$ werde mit der Rate $f_A = 1/T_A$ abgetastet. Welchen Bedingungen muss $\alpha = T_0/T_A$ genügen, damit auch die Folge $v(n)$ periodisch ist?

6.1 Lösungsansatz

- Die Abtastung eines kontinuierlichen Signals $v_0(t)$ mit Abtastintervall $T_A = 1/f_A$ wird beschrieben durch

$$v(n) = v_0(t)|_{t=nT_A} = v_0(nT_A) \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}.$$

- Eine Folge $v(n)$ ist periodisch, wenn

$$v(n) = v(n + \lambda K)$$

mit Periodendauer $K \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ gilt.

- Verknüpft man nun die Periodizität von $v(t)$ mit der Abtastung und der Forderung $\alpha = T_0/T_A$ erhält man folgende Aussagen
 - $v(n)$ ist nur dann periodisch, wenn ein $l \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $l\alpha \in \mathbb{Z}$.
 - Die Periodendauer ist dann $K = \min \{l\alpha \mid l\alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } l\alpha > 0\}$

6.2 Ergebnis

Es muss $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ gelten.

7 Periodizität diskreter Signale

Das Signal $v_0(t) = \sin(\omega_0 t)$ mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$ werde mit $T_A = T_0/\alpha$ abgetastet. Überprüfen Sie für die folgenden Fälle, ob $v(n)$ periodisch ist, und geben Sie gegebenenfalls die Periodendauer K an.

(a) $\alpha = 5$

(b) $\alpha = 5.5$

(c) $\alpha = \frac{16}{3}$

(d) $\alpha = \pi$

(e) $\alpha = 1$

7.1 Lösungsansatz

Die Erkenntnisse aus Aufgabe 6 anwenden.

7.2 Ergebnis

- (a) Periodisch mit $K = 5$.
- (b) Periodisch mit $K = 11$.
- (c) Periodisch mit $K = 16$.
- (d) Nicht periodisch.
- (e) Periodisch mit $K = 1$.

8 Periodizität diskreter Signale

Gegeben ist das mit T periodische Signal $v_0(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(2\omega_0 t)$. Durch Abtastung mit der Abtastperiode $T_A = \frac{T}{4}$ entsteht die Folge $v(n) = v_0(n \cdot T_A)$.

- (a) Geben Sie die Periode T von $v_0(t)$ an.
- (b) Geben Sie die Periode K der Folge $v(n)$ an.

Geben Sie jeweils eine Herleitung/Begründung an.

8.1 Lösungsansatz

Vorgehensweise wie in Aufgabe 5 und Aufgabe 6.

8.2 Ergebnis

- (a)

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(2\omega_0 t) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cos(\omega_0 t)}_{\text{Periode } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t)}_{\text{Periode } T_1 = \frac{2\pi}{3\omega_0}} \end{aligned}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache von Periode T_1 und Periode T_2 ist

$$T = T_1 = 3T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

- (b) Nach Aufgabe 2 gilt für die Periode K der Folge $v(n)$

$$K = \min \{l\alpha \mid l\alpha \in \mathbb{Z} \text{ und } l\alpha > 0\}$$

mit $l \in \mathbb{Z}$ und $\alpha = T/T_A = 4$.

Somit gilt $l_{\min} = 1$ und $K = 4$.

9 Fourier-Reihe

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_μ der folgenden Signale:

$$(a) v_D(t) = \begin{cases} -\frac{2}{T} t, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ \frac{2}{T} t, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad \text{mit } v_D(t) = v_D(t + \lambda T), \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$(b) v_R(t) = \begin{cases} k, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -k, & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases} \quad \text{mit } v_R(t) = v_R(t + \lambda T), k \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

(c) $v(t)$ siehe Abbildung 2:

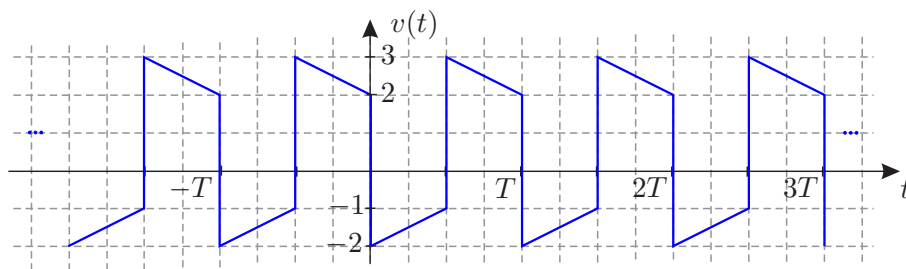


Abbildung 2: Signal zu Aufgabe 9.

9.1 Lösungsansatz

Ein periodisches Signal $v(t) = v(t + \lambda T)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ kann durch die Fourier-Reihe

$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

dargestellt werden. Dabei gilt für die Gewichtungsfaktoren der exponentiellen Basissignale

$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Das Integral kann also über einen beliebigen Abschnitt des Signals ausgewertet werden, muss sich jedoch über die Periodendauer T erstrecken.

Für reellwertige Signale wird oft auch die etwas anschaulichere trigonometrische Fourier-

Reihe (Fourier-Cosinus-/Sinus-Reihe) verwendet:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right)$$
$$a_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$
$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt$$
$$b_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt.$$

Die Berechnung der Gewichtsfaktoren kann unter Umständen vereinfacht werden, da

- für gerade Signale $v(t) = v(-t)$ gilt:

$$b_{\mu} = 0$$

- für ungerade Signale $v(t) = -v(-t)$ gilt:

$$a_{\mu} = 0, \forall \mu \neq 0.$$

Der Gleichanteil eines Signals wird durch den Koeffizienten c_0 (bzw. a_0) beschrieben.

- (a) Die Fourier-Koeffizienten c_{μ} können direkt nach obiger Definition berechnet werden. Hierbei ist der Koeffizient c_0 gesondert zu betrachten, um eine Division durch 0 zu umgehen. Die Auswertung des Integals kann durch partielle Integration oder mit Hilfe einer Integraltabelle (z.B. Bronstein) durch

$$\int t e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2} (\alpha t - 1)$$

vorgenommen werden.

- (b) Es gibt mindestens drei verschiedene Ansätze:

- Wie in (a) der Definitionsgleichung der c_{μ} auswerten.
- Da $v_{\text{R}}(t) \in \mathbb{R}$, kann auch die Form der trigonometrischen Fourier-Reihe verwendet werden. Dabei können Symmetrieeigenschaften des Signals ausgenutzt werden.
- Anwendung des Differentiationsatzes der Fourier-Reihe: Da $\frac{d}{dt}v_{\text{R}}(t)$ nur eine skalierte Form von $v_{\text{D}}(t)$ ist, kann das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) genutzt werden.

- (c) Das skizzierte Signal $v(t)$ kann aus den beiden Teilfunktionen $v_{\text{D}}(t)$ und $v_{\text{R}}(t)$ zusammengesetzt werden, wenn der Parameter k passend gewählt wird:

$$v(t) = v_{\text{D}}(t) + v_{\text{R}}(t).$$

Aufgrund der Linearität der Fourier-Reihe, können die Teilergebnisse aus (a) und (b) genutzt werden, um die Fourierkoeffizienten c_μ von $v(t)$ zu bestimmen.

9.2 Ergebnis

(a)

$$c_\mu = -\frac{1}{(\mu\pi)^2} [1 - \cos(\mu\pi)]$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{(\mu\pi)^2}, & \mu = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}, & \mu = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der obere Fall gilt also für alle ungeraden μ , der untere für alle geraden μ . Abbildung 3 zeigt Beispiele dafür, wie das Signal $v(t)$ immer besser angehäert wird, je mehr gewichtete Basisfunktionen werden.

(b)

$$c_\mu = \begin{cases} -j\frac{2k}{\mu\pi}, & \mu = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die äquivalente Darstellung als trigonometrische Fourier-Reihe gilt

$$a_\mu = 0, \forall \mu$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = 0$$

$$b_\mu = \begin{cases} \frac{4k}{\mu\pi}, & \mu = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$c_\mu = \begin{cases} -\frac{2}{(\mu\pi)^2} + j\frac{4}{\mu\pi}, & \mu = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}, & \mu = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

10 Fourier-Reihe

Gegeben ist das periodische Signal $v(t)$ wie in Abbildung 4 skizziert.

Bestimmen Sie die Fourier-Reihenoeffizienten c_μ des Signals $v(t)$ einschließlich des Gleichanteils c_0 .

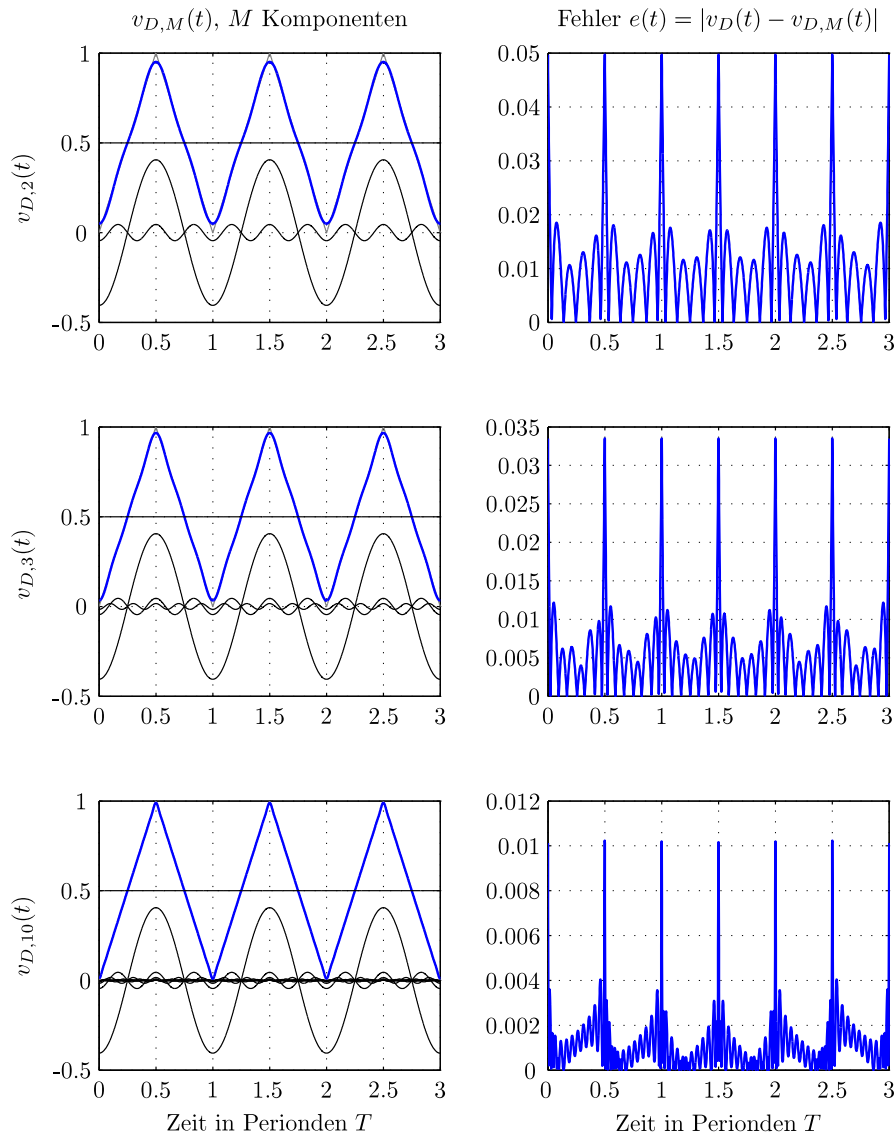


Abbildung 3: Fourier-Reihe des Dreieckssignals $v_D(t)$ aus Aufgabe 9 (a). Je mehr Komponenten (gewichtete Basisfunktionen) hinzugenommen werden, desto geringer wird der Fehler der Approximation.

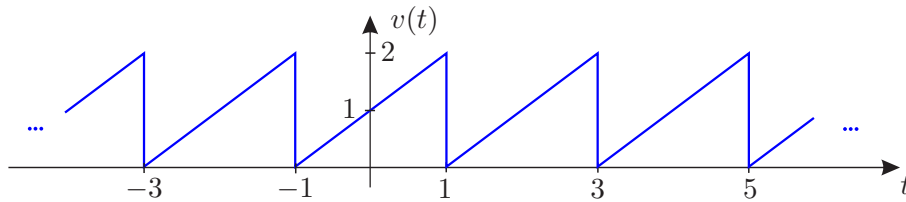


Abbildung 4: Signal zu Aufgabe 10.

10.1 Lösungsansatz

Gleicher Lösungsansatz wie in Aufgabe 9: in Definitionsgleichung der c_μ einsetzen und auflösen.

10.2 Ergebnis

Das Signal $v(t)$ formelmäßig ausdrücken:

$$v(t) = t + 1 \quad \text{für } -1 \leq t < 1 \quad \text{und } v(t) = v(t + \lambda T), \text{ mit Periode } T \text{ und } \lambda \in \mathbb{Z}$$

Einsetzen in die Definitionsgleichung:

$$\begin{aligned} c_\mu &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (t+1) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} t \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt}_A + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt}_B \right] \end{aligned}$$

Bestimmung des Ausdrucks A mit partieller Integration: $\int u'v = uv - \int uv'$ (hier also $u' = e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t}$ und $v = t$)

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt &= -\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}} \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} \cdot t \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \left(-\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}} \right) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= -\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}} \cdot \frac{T}{2} [e^{-j\mu\pi} + e^{j\mu\pi}] - \left(\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}} \right)^2 \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \left\{ \text{mit } T = 2 \text{ (kann aus der Skizze für } v(t) \text{ abgelesen werden)} \right\} \\ &= -\frac{2}{j\mu\pi} \cdot \cos(\mu\pi) - \left(\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{2}} \right)^2 \cdot \underbrace{[e^{-j\mu\pi} - e^{j\mu\pi}]}_{=0} \\ &= -\frac{2}{j\mu\pi} \cdot \cos(\mu\pi) = \frac{j2}{\mu\pi} \cdot \cos(\mu\pi) \end{aligned}$$

Bestimmung des Ausdrucks B:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt = -\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}} \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = -\frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}} [e^{-j\mu\pi} - e^{j\mu\pi}] = 0$$

Oben eingesetzt mit $T = 2$:

$$c_\mu = \frac{1}{T} \cdot \frac{j}{\mu\pi} \cdot \cos(\mu\pi) = \frac{j}{\mu\pi} \cdot \cos(\mu\pi) = \frac{j}{\mu\pi} \cdot (-1)^\mu$$

Gleichanteil/Mittelwert:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (t+1) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} t^2 + t \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left[\frac{T^2}{8} + \frac{T}{2} - \frac{T^2}{8} + \frac{T}{2} \right] = 1 \end{aligned}$$

11 Diskrete Fourier-Transformation

Berechnen Sie die DFT (Diskrete Fourier-Transformation) der unten angegebenen Folgen $v(n)$ der Länge M :

(a) $v(n) = \gamma_0(n - \kappa) \quad \kappa \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

(b) $v(n) = \cos(\Omega_0 n) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{M}\mu_0, \quad \mu_0 \in \{1, 2, \dots, M-1\}$

(c) $v(n) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq n \leq l-1 \\ 0 & , \quad l \leq n \leq M-1 \end{cases} \quad l \in \{1, 2, \dots, M-1\}$

11.1 Lösungsansatz

Ein diskretes Signal $v(n)$ kann durch die diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$v(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}, \quad \text{für } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

dargestellt werden. Das Signal (die Folge) ist dabei entweder periodisch mit Periode M oder begrenzt auf die Länge M . In letzterem Fall wird das Signal bei der Berechnung der DFT implizit periodisch fortgesetzt. Dabei gilt für die Koeffizienten

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}, \quad \text{für } \mu \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

Es werden also jeweils M Werte aus dem Zeitbereich auf M Werte aus dem Frequenzbereich abgebildet (oder umgekehrt). Die zweite Gleichung wird als diskrete Fourier-Transformation (DFT) bezeichnet, die erste als inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT).

- (a) In die Definition der DFT einsetzen und losrechnen.
 (b) Es ist sinnvoll, den Zusammenhang

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx})$$

zu nutzen. Zur weiteren Vereinfachung kann die Summenorthogonalität der komplexen Exponentialfunktion

$$\sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}n(\mu-\mu_0)} = M \gamma_0(\mu - \mu_0) = \begin{cases} M, & \text{für } \mu = \mu_0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

verwendet werden.

- (c) Benötigt wird die endliche geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}, \quad \text{für } q \neq 1.$$

Ein weiterer „Trick“ ist es, in folgendem Fall das halbe Argument auszuklammern:

$$1 - e^{-jx} = e^{-jx/2} (e^{jx/2} - e^{-jx/2}) = 2j e^{-jx/2} \sin(x/2).$$

11.2 Ergebnis

- (a) $V_M(\mu) = e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}l}$
 (b) $V_M(\mu) = \frac{M}{2} [\gamma_0(\mu - \mu_0) + \gamma_0(\mu + \mu_0)]$
 (c) $V_M(\mu) = \begin{cases} e^{-j\mu\frac{\pi(l-1)}{M}} \cdot \frac{\sin(\frac{\mu\pi l}{M})}{\sin(\frac{\mu\pi}{M})} & , \text{für } \mu \in \{1, 2, \dots, M-1\} \\ l & , \text{für } \mu = 0. \end{cases}$

12 Fourier-Reihe, Abtastung, diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist das kontinuierliche Signal $v_0(t) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

- (a) Geben Sie die Fourierreihen-Koeffizienten von $v_0(t)$ an.

Die Folge $v(n)$ entsteht nun durch Abtastung des Signals $v_0(t)$. Die Abtastperiode ist dabei $T_A = T/4$.

- (b) Ist das Abtasttheorem erfüllt?
 (c) Geben Sie die DFT $V_M(\mu)$ der Folge $v(n)$ an. Benutzen Sie dabei die Definitionsgleichung der DFT mit der Größe $M = 4$.
 (d) Bestimmen Sie jetzt die DFT anhand des Überlagerungssatzes der DFT.

12.1 Lösungsansatz

- (a) Das Signal $v(t)$ so umformen, dass die Fourier-Koeffizienten c_μ direkt durch Koeffizientenvergleich mit der Definition der Fourier-Reihe abgelesen werden können. Der Koeffizientenvergleich kann auch mit der trigonometrischen Fourier-Reihe vorgenommen werden.
- (b) Das Abtasttheorem ist erfüllt, wenn

$$\omega_A \geq 2\omega_g$$

gilt, wobei $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$ die Abtastfrequenz und ω_g die höchste im Signal enthaltene Frequenz ist.

Die Abtastung wird durch

$$v(n) = v_0(t)|_{t=nT_A} = v_0(nT_A),$$

ausgedrückt, wobei T_A die Abtastperiode ist.

- (c) Definitionsgleichung der DFT für $M = 4$ und $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ auswerten.
- (d) Überlagerungssatz der DFT

$$V_M(\mu) = M \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{\mu-\lambda M}.$$

12.2 Ergebnis

- (a) Zuerst das Signal so umformen, dass die Koeffizienten direkt abgelesen werden können.

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^{j2\frac{2\pi}{T}t} + e^{-j2\frac{2\pi}{T}t} \right) \quad (2)$$

Lösung 1: Koeffizientenvergleich von (1) mit

$$v_0(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T}t\right)$$

liefert $c_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_\mu = 0 \forall \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}$, $b_\mu = 0 \forall \mu$.

Lösung 2: Koeffizientenvergleich von (2) mit

$$v_0(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T}t}$$

liefert $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_{-2} = \frac{1}{4}$, $c_\mu = 0 \forall \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

(b) Überprüfen des Abtasttheorems:

$$\begin{aligned}\omega_A &= \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{T/4} \geq 2\omega_g = 2 \cdot 2 \frac{2\pi}{T} \\ &\frac{4}{T} \geq \frac{4}{T}\end{aligned}$$

Das Abtasttheorem ist also (gerade noch) erfüllt. Für das abgetastete Signal gilt:

$$\begin{aligned}v(n) &= v_0(nT_A) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}nT_A\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{4}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi n)] \\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

(c) Auswerten der DFT der Ordnung $M = 4$

$$V_4(\mu) = \sum_{n=0}^3 v(n)e^{-j\mu\frac{2\pi}{4}n}$$

für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}V_4(0) &= v(0) \cdot e^{-j0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0} + v(1) \cdot e^{-j0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1} + v(2) \cdot e^{-j0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2} + v(3) \cdot e^{-j0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3} \\ &= 1 + 0 + 1 + 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_4(1) &= v(0) \cdot e^{-j1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0} + v(1) \cdot e^{-j1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1} + v(2) \cdot e^{-j1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2} + v(3) \cdot e^{-j1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3} \\ &= 1 + 0 + (-1) + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_4(2) &= v(0) \cdot e^{-j2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0} + v(1) \cdot e^{-j2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1} + v(2) \cdot e^{-j2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2} + v(3) \cdot e^{-j2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3} \\ &= 1 + 0 + 1 + 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_4(3) &= v(0) \cdot e^{-j3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0} + v(1) \cdot e^{-j3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1} + v(2) \cdot e^{-j3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2} + v(3) \cdot e^{-j3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3} \\ &= 1 + 0 + (-1) + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

(d) Berechnung der DFT mit dem Überlagerungssatz

$$V_M(\mu) = M \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{\mu-\lambda M}$$

und den in Teilaufgabe (a) bestimmten Fourier-Reihenkoeffizienten c_μ :

$$V_4(0) = 4(\dots + c_{-4} + c_0 + c_4 + c_8 + \dots) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$V_4(1) = 4(\dots + c_{-3} + c_1 + c_5 + c_9 + \dots) = 0$$

$$V_4(2) = 4(\dots + c_{-2} + c_2 + c_6 + c_{10} + \dots) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$V_4(3) = 4(\dots + c_{-5} + c_{-1} + c_3 + c_7 + \dots) = 0$$

13 Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die Folge

$$v(n) = 3 \cos(\Omega_0 n) + 2 \sin(\Omega_0 n),$$

wobei $\Omega_0 = \frac{2\pi}{M}\mu_0$ und $\mu_0 \in \{1, 2, \dots, M-1\}$. Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformation $V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\}$ der Länge M .

13.1 Lösungsansatz

Definitionsgleichung der DFT auswerten.

13.2 Ergebnis

Aufgrund der Linearität der DFT können die beiden Summanden von $v(n)$ einzeln transformiert werden

$$\text{DFT}\{v(n)\} = V_M(\mu) = \text{DFT}\{3 \cos(\Omega_0 n)\} + \text{DFT}\{2 \sin(\Omega_0 n)\}.$$

Wie bereits in Aufgabe 11 berechnet, gilt dabei

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{3 \cos(\Omega_0 n)\} &= \frac{3M}{2} [\gamma_0(\mu - \mu_0) + \gamma_0(\mu + \mu_0)] \\ &= \frac{3M}{2} [\gamma_0(\mu - \mu_0) + \gamma_0(\mu - (M - \mu_0))]. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise kann der zweite Summand transformiert werden

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{2 \sin(\Omega_0 n)\} &= \text{DFT}\left\{\frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{2\pi}{M}\mu_0} - e^{-j\frac{2\pi}{M}\mu_0}\right)\right\} \\ &= \frac{M}{j} [\gamma_0(\mu - \mu_0) - \gamma_0(\mu + \mu_0)] \\ &= \frac{M}{j} [\gamma_0(\mu - \mu_0) - \gamma_0(\mu - (M - \mu_0))]. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} V_M(\mu) &= \frac{3M}{2} [\gamma_0(\mu - \mu_0) + \gamma_0(\mu + \mu_0)] + \frac{M}{j} [\gamma_0(\mu - \mu_0) - \gamma_0(\mu + \mu_0)]. \\ &= \frac{3M}{2} [\gamma_0(\mu - \mu_0) + \gamma_0(\mu - (M - \mu_0))] + \frac{M}{j} [\gamma_0(\mu - \mu_0) - \gamma_0(\mu - (M - \mu_0))]. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt für $\mu_0 \in \{1, 2, \dots, M-1\}$. Dafür musste das Argument von $\gamma_0(\mu + \mu_0)$ angepasst werden, was aufgrund der Periodizität der DFT $V_M(\mu)$ zulässig ist.

14 Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden kontinuierlichen Signale.

(a) $v(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $v(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$

(c) $v(t) = e^{-\alpha t} \cdot \delta_{-1}(t)$

(d) $v(t) = \cos(\omega_0 t)$

(e) $v(t)$ wie in der Abbildung 5 gegeben.

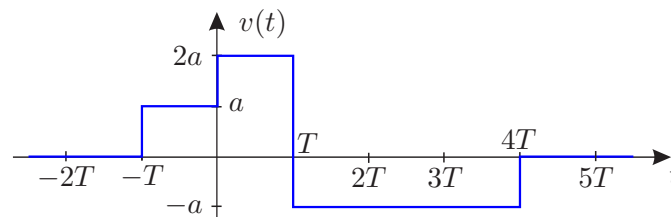


Abbildung 5: Signal zu Aufgabe 14 (e)

Hinweis: Verwenden Sie für (b) den Symmetriesatz, für (d) den Modulationssatz und für (e) den Differentiationssatz.

14.1 Lösungsansatz

Ein kontinuierliches Signal $v(t)$ kann durch die Fourier-Transformierte

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

dargestellt werden. Diese Gleichung wird manchmal auch als *Hintransformation* bezeichnet, durch die entsprechende *Rücktransformation*

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

kann aus einer Fourier-Transformierten (aus einem Spektrum) $V(j\omega)$ das zugehörige Zeitsignal $v(t)$ berechnet werden.

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Fourier-Transformierte existiert, ist die absolute Integrierbarkeit des Signals $v(t)$, d. h. es muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt \leq M < \infty$$

gelten. Sie ist jedoch keine notwendige Bedingung, z.B. existiert ja $\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\}$.

Folgende Schreibweisen sind in Verbindung mit der Fourier-Transformation üblich:

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}, \quad v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(j\omega)\}, \quad V(j\omega) \bullet \circ v(t)$$

- (a) In die Definitionsgleichung der Fourier-Reihe einsetzen und losrechnen. Dabei auftretende komplexe Exponentialfunktionen zu sin- bzw. cos-Termen zusammenfassen und Terme der Art $\sin(x)/x = \text{si}(x)$ finden.
- (b) Symmetriesatz mit dem Ergebnis aus (a) verwenden. Um Verwirrungen zu minimieren ist es bei der Anwendung des Symmetriesatzes immer sinnvoll, sich den Symmetriesatz, die zu transformierende Funktion sowie die dazu passende Korrespondenz (hier das Ergebnis aus (a)) übersichtlich nebeneinander zu schreiben.
- (c) In die Definitionsgleichung der Fourier-Reihe einsetzen und losrechnen. Zwei Fälle für den Faktor α untersuchen: Für welche Werte von α existiert die Fourier-Reihe überhaupt?

- (d) Modulationssatz

$$v(t) e^{j\omega_0 t} \circ \bullet V(j(\omega - \omega_0))$$

auf die Korrespondenz

$$v(t) = 1 \circ \bullet V(j\omega) = 2\pi\delta_0(\omega)$$

anwenden.

- (e) Die Ableitung des Signals $v(t)$ „grafisch“ bilden. Sprünge werden dabei zu Diracstößen, die mit der Sprunghöhe gewichtet werden. Darauf den Verschiebungssatz

$$v(t - t_0) \circ \bullet V(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

zusammen mit dem Differentiationssatz

$$\frac{d}{dt} v(t) \circ \bullet j\omega V(j\omega)$$

auf die Korrespondenz

$$\delta_0(t) \circ \bullet 1$$

anwenden.

14.2 Ergebnis

$$(a) V(j\omega) = 2T \operatorname{si}(\omega T)$$

$$(b) V(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0}, & \text{für } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(c) V(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \forall \alpha > 0$$

Keine Konvergenz für $\alpha < 0$, für $\alpha = 0$ gilt $V(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta_0(\omega)$ (aber das musste hier nicht berechnet werden).

$$(d) V(j\omega) = \pi [\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)]$$

$$(e) V(j\omega) = \frac{a}{j\omega} (e^{jT\omega} + 1 - 3e^{-jT\omega} + e^{-j4T\omega})$$

15 Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden zeitdiskreten Signale.

$$(a) v(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) v(n) = e^{-\alpha n} \cdot \gamma_{-1}(n)$$

$$(c) v(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| \leq N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

15.1 Lösungsansatz

Ein zeitdiskretes Signal $v(n)$ kann durch die Fourier-Transformierte

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n}$$

dargestellt werden. Dabei gilt für die Frequenzvariable $\Omega \in [-\pi, \pi]$. Das Spektrum $V(e^{j\Omega})$ ist 2π -periodisch, was durch die Schreibweise $e^{j\Omega}$ des Arguments ausgedrückt werden soll. Die Folge $v(n)$ kann aus der Fourier-Transformierten durch

$$v(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

bestimmt werden. Es wird also ein zeitdiskretes Signal auf ein periodisches Spektrum abgebildet.

Bei der Berechnung von $V(e^{j\Omega})$ ist oftmals die geometrische Reihe hilfreich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1.$$

- (a) In die Definitionsgleichung der Fourier-Reihe einsetzen und die Summe so aufteilen, dass die geometrische Reihe angewendet werden kann. Die entstehenden Brüche geschickt so erweitern, dass Exponentialfunktionen zu sin-Termen zusammengefasst werden können.
- (b) Summe wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe umformen. Dabei überprüfen, für welche Werte von α sie überhaupt angewendet werden darf.
- (c) Am einfachsten ist die Fourier-Transformierte zu mit Hilfe des Satzes zur Signaldifferenz

$$v(n) - v(n-1) \circ \bullet V(e^{j\Omega}) [1 - e^{-j\Omega}]$$

zu berechnen. Dazu am besten zuerst $v(n) - v(n-1)$ skizzieren und dann die Fourier-Transformierte davon bestimmen. Summen wieder durch die geometrische Reihe umformen.

Hilfreich ist noch die Gaußsche Summenformel

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

15.2 Ergebnis

$$(a) V(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{\sin(\Omega(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\Omega}{2})} & , \text{für } \Omega \neq 2\pi\lambda \\ 2N+1 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) V(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - e^{-\alpha}} \text{ für } \alpha > 0. \text{ Für } \alpha \leq 0 \text{ konvergiert die Summe nicht, d.h., die Fourier-Transformierte existiert nicht.}$$

$$(c) V(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \left[\frac{1-e^{j\Omega N}}{1-e^{j\Omega}} - \frac{1-e^{-j\Omega(N+1)}}{1-e^{-j\Omega}} + 1 \right] & , \text{für } \Omega \neq 2\pi\lambda \\ N & , \text{sonst} \end{cases}$$

16 Fourier-Transformation

Das Wahrzeichen Darmstadts ist der in Abbildung 6 dargestellte Hochzeitsturm. Aufgrund seiner Form wird der 48 Meter hohe Backsteinturm auch Fünffingerturm genannt und eignet sich zudem hervorragend dazu, einer mathematischen Umformung unterzogen zu werden.

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $V(j\omega)$ der Frontansicht dieses imposanten Bau-

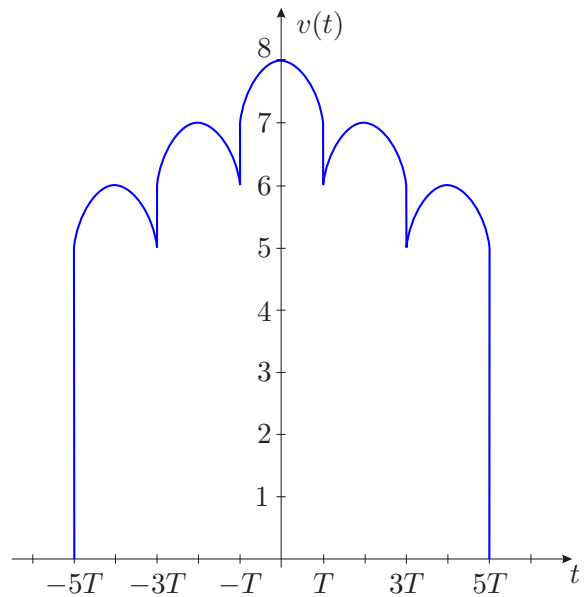


Abbildung 6: Der Darmstädter Hochzeitsturm zu Aufgabe 16.

werks, indem Sie $v(t)$ aus geeigneten Teilfunktionen zusammensetzen und Sätze der Fourier-Transformation anwenden. Die Spitzen werden dabei als parabelförmig angenommen.

16.1 Lösungsansatz

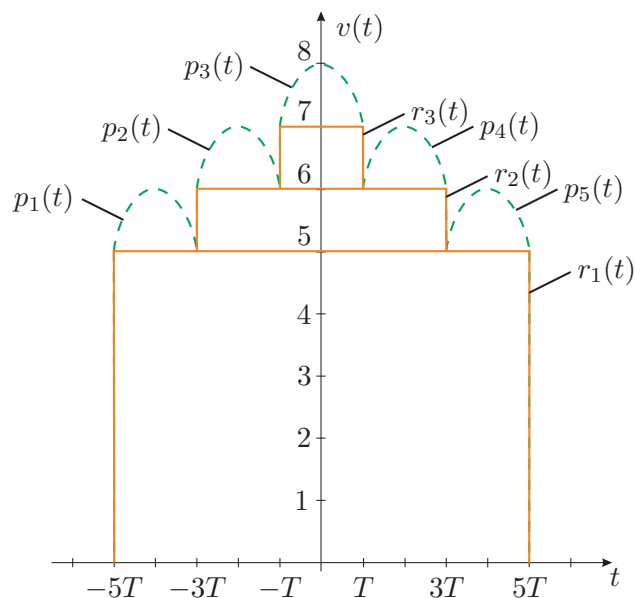


Abbildung 7: Zerlegung des Darmstädter Hochzeitsturms zu Aufgabe 16.

Aufgrund der Linearität der Fourier-Transformation kann die Funktion $v(t)$, wie in Abbildung 7 gezeigt, in additive Teilkomponenten zerlegt und diese einzeln Fourier-transformiert

werden:

$$v(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) + \sum_{i=1}^5 p_i(t)$$

$$\downarrow$$

$$V(j\omega) = \sum_{i=1}^3 R_i(j\omega) + \sum_{i=1}^5 P_i(j\omega)$$

Die Korrespondenz für die Rechtecke $r_i(t)$ wurde in Aufgabe 14 (a) hergeleitet. Da die Parabelbögen $p_i(t)$ jeweils nur verschobene Varianten der Funktion $p(t) = 1 - (t/T)^2$ darstellen, genügt es, diese Funktion zu transformieren und den Verschiebungssatz anzuwenden. Dabei ist das Integral (Bronstein 449.)

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right)$$

hilfreich.

16.2 Ergebnis

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= \sum_{i=1}^3 R_i(j\omega) + \sum_{i=1}^5 P_i(j\omega) \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i(j\omega) + \sum_{l=-2}^2 P(j\omega) e^{-j\omega 2lT} \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i(j\omega) + P(j\omega) [2 \cos(\omega 4T) + 2 \cos(\omega 2T) + 1] \\ &= 50T \operatorname{si}(\omega 5T) + 6T \operatorname{si}(\omega 3T) + 2T \operatorname{si}(\omega T) \\ &\quad + \frac{4}{\omega^2 T} (\operatorname{si}(\omega T) - \cos(\omega T)) [2 \cos(\omega 4T) + 2 \cos(\omega 2T) + 1] \end{aligned}$$

17 Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die DFT

$$V_M(\mu) = \{1, 2, 0, 2, 0, 1\}$$

mit $M = 6$. Bestimmen Sie die inverse DFT $v(n) = \text{IDFT}\{V_M(\mu)\}$.

Hinweis: $e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{j\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

17.1 Lösungsansatz

Die für $V_M(\mu)$ gegebene Folge in die IDFT-Gleichung

$$v(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n}, \quad \text{für } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

mit $M = 6$ einsetzen und vereinfachen. Dabei die Exponentialfunktionen mit Hilfe des Hinweises umformen.

17.2 Ergebnis

Mit $M = 6$ gilt

$$v(n) = \frac{1}{6} \sum_{\mu=0}^5 V_M(\mu) e^{j\mu\frac{2\pi}{6}n}, \quad \text{für } n \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

Hier die Werte $n \in \{0, 1, \dots, 5\}$ einsetzen und vereinfachen:

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{6} \left[V_M(0) e^{j0\frac{2\pi}{6}0} + V_M(1) e^{j1\frac{2\pi}{6}0} + V_M(2) e^{j2\frac{2\pi}{6}0} + V_M(3) e^{j3\frac{2\pi}{6}0} + V_M(4) e^{j4\frac{2\pi}{6}0} + V_M(5) e^{j5\frac{2\pi}{6}0} \right] \\ &= \frac{1}{6} [1 + 2 + 0 + 2 + 0 + 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(1) &= \frac{1}{6} \left[V_M(0) e^{j0\frac{2\pi}{6}1} + V_M(1) e^{j1\frac{2\pi}{6}1} + V_M(2) e^{j2\frac{2\pi}{6}1} + V_M(3) e^{j3\frac{2\pi}{6}1} + V_M(4) e^{j4\frac{2\pi}{6}1} + V_M(5) e^{j5\frac{2\pi}{6}1} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0 + 2 \cdot (-1) + 0 + 1 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{12} + j\frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(2) &= \frac{1}{6} \left[V_M(0) e^{j0\frac{2\pi}{6}2} + V_M(1) e^{j1\frac{2\pi}{6}2} + V_M(2) e^{j2\frac{2\pi}{6}2} + V_M(3) e^{j3\frac{2\pi}{6}2} + V_M(4) e^{j4\frac{2\pi}{6}2} + V_M(5) e^{j5\frac{2\pi}{6}2} \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[1 + 2 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0 + 2 \cdot 1 + 0 + 1 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(3) &= \frac{1}{6} \left[V_M(0) e^{j0\frac{2\pi}{6}3} + V_M(1) e^{j1\frac{2\pi}{6}3} + V_M(2) e^{j2\frac{2\pi}{6}3} + V_M(3) e^{j3\frac{2\pi}{6}3} + V_M(4) e^{j4\frac{2\pi}{6}3} + V_M(5) e^{j5\frac{2\pi}{6}3} \right] \\
&= \frac{1}{6} [1 + 2 \cdot (-1) + 0 + 2 \cdot (-1) + 0 + 1 \cdot (-1)] \\
&= -\frac{4}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(4) &= \frac{1}{6} \left[V_M(0) e^{j0\frac{2\pi}{6}4} + V_M(1) e^{j1\frac{2\pi}{6}4} + V_M(2) e^{j2\frac{2\pi}{6}4} + V_M(3) e^{j3\frac{2\pi}{6}4} + V_M(4) e^{j4\frac{2\pi}{6}4} + V_M(5) e^{j5\frac{2\pi}{6}4} \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[1 + 2 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0 + 2 \cdot 1 + 0 + 1 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(5) &= \frac{1}{6} \left[V_M(0) e^{j0\frac{2\pi}{6}5} + V_M(1) e^{j1\frac{2\pi}{6}5} + V_M(2) e^{j2\frac{2\pi}{6}5} + V_M(3) e^{j3\frac{2\pi}{6}5} + V_M(4) e^{j4\frac{2\pi}{6}5} + V_M(5) e^{j5\frac{2\pi}{6}5} \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0 + 2 \cdot (-1) + 0 + 1 \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= \frac{1}{12} - j\frac{\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt für die Folge $v(n)$ also

$$v(n) = \left\{ 1, \frac{1}{12} + j\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{12}, -\frac{4}{6}, \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{12} - j\frac{\sqrt{3}}{12} \right\}.$$

18 Faltung kontinuierlicher Signale

Berechnen Sie die Faltungsintegrale $v(t) = v_1(t) * v_2(t)$ der folgenden Funktionen:

$$(a) \quad v_1(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -T_1 \leq t \leq T_1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -T_2 \leq t \leq T_2 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (T_1 \geq T_2)$$

$$(b) \quad v_1(t) = e^{-at} \cdot \delta_{-1}(t) \quad , \quad \text{mit } a > 0$$

$$v_2(t) = e^{-bt} \cdot \delta_{-1}(t) \quad , \quad \text{mit } b > 0$$

$$(c) \quad v_1(t) = \delta_0(t - t_0)$$

$$v_2(t) = x(t) \quad (\text{eine beliebige Funktion})$$

18.1 Lösungsansatz

Die Faltung zweier kontinuierlicher Signale $v_1(t)$ und $v_2(t)$ ist durch das Faltungsintegral

$$\begin{aligned} v_1(t) * v_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau) v_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t - \tau) v_2(\tau) d\tau = v_2(t) * v_1(t) \end{aligned}$$

definiert. Betrachtet man die beiden Funktionen innerhalb des Integrals, so fällt auf, dass jeweils eine *gespiegelt* ($-\tau$) und um t *verschoben* wird. Da die Faltung eine kommutative Operation ist ($v_1(t) * v_2(t) = v_2(t) * v_1(t)$), ist es also unerheblich, welche der Funktionen gespiegelt und verschoben wird.

Sind beide Funktionen nur in einem begrenzten Bereich von Null verschieden und evtl. sogar abschnittsweise definiert, kann zum Lösen des Integralausdrucks eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Verschiebung t vorgenommen werden. Hierbei ist es eigentlich *immer* hilfreich, sich für die verschiedenen Fälle Skizzen anzufertigen.

Der „erste Faltungssatz“ der Fourier-Transformation macht deutlich, warum die Faltung eine wichtige Operation ist:

$$\mathcal{F}\{v_1(t) * v_2(t)\} = V_1(j\omega) \cdot V_2(j\omega).$$

(a) Es werden zwei Rechtecke unterschiedlicher Breite miteinander gefaltet. Dabei ergeben sich fünf Fälle:

Fall 1: $t < -(T_1 + T_2)$

Fall 2: $-(T_1 + T_2) \leq t < T_2 - T_1$

Fall 3: $T_2 - T_1 \leq t < T_1 - T_2$

Fall 4: $T_1 - T_2 \leq t < T_1 + T_2$

Fall 5: $t \geq T_1 + T_2$

(b) Es ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1: $t < 0$

Fall 2: $t \geq 0$

- (c) Das Faltungsintegral kann mit Hilfe der Ausblendeigenschaft der Diracdistribution vereinfacht werden. Wird diese angewendet, hängt die Funktion x nicht mehr von der Integrationsvariablen τ ab und kann aus dem Integral herausgezogen werden. Das verbleibende Integral über einen (verschobenen) Diracimpuls ist definitionsgemäß gleich 1.

18.2 Ergebnis

$$(a) v(t) = \begin{cases} T_1 + T_2 + t & , -(T_1 + T_2) \leq t < T_2 - T_1 \\ 2T_2 & , T_2 - T_1 \leq t < T_1 - T_2 \\ T_1 + T_2 - t & , T_1 - T_2 \leq t < T_1 + T_2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Merke: Rechteck * Rechteck ergibt ein Trapez (sind beide Rechtecke gleich breit, ergibt sein ein Dreieck als Sonderfall).

$$(b) v(t) = \begin{cases} \frac{1}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(c) v(t) = x(t - t_0)$$

Merke: Wird eine beliebige Funktion mit einem Diracimpuls gefaltet, so wird diese Funktion an die Stelle des Diracs verschoben.

19 Faltung diskreter Signale

Berechnen Sie das Faltungsprodukt $v(n) = v_1(n) * v_2(n)$ der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$:

$$v_1(n) = \rho_1^n \cdot \gamma_{-1}(n) \quad , \text{ mit } 0 < \rho_1 < 1$$

$$v_2(n) = \rho_2^n \cdot \gamma_{-1}(n) \quad , \text{ mit } 0 < \rho_2 < 1$$

19.1 Lösungsansatz

Die lineare Faltung zweier diskreter Signale $v_1(n)$ und $v_2(n)$ ist durch die Summe

$$\begin{aligned} v_1(n) * v_2(n) &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa) v_2(n - \kappa) \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(n - \kappa) v_2(\kappa) = v_2(n) * v_1(n) \end{aligned}$$

definiert. Wie bei der kontinuierlichen Faltung kann man sich die Berechnung durch „spiegeln und verschieben“ der Signale veranschaulichen. Seien M_1 und M_2 die Längen der

Folgen $v_1(n)$ bzw. $v_2(n)$, so hat das Faltungsergebnis $v_1(n)$ die Länge

$$M = M_1 + M_2 - 1.$$

Zum Lösen der Aufgabe kann eine Fallunterscheidung für den Wertebereich der Verschiebung vorgenommen werden. Wie viele Fälle gibt es, was sind die Grenzen? Für jeden Fall die Faltungssumme aufstellen und mit Hilfe der geometrischen Reihe vereinfachen.

19.2 Ergebnis

$$v(n) = \begin{cases} \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_1^{n+1}}{\rho_2 - \rho_1} \gamma_{-1}(n) & , \rho_1 \neq \rho_2 \\ (n+1) \rho^n \gamma_{-1}(n) & , \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases}$$

20 Fourier-Transformation

Gegeben ist das Signal $v(t)$ wie in Abbildung 8 skizziert. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $V(j\omega)$ des Signals $v(t)$.

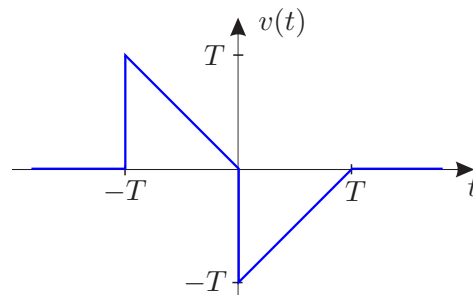


Abbildung 8: Signal zu Aufgabe 20.

20.1 Lösungsansatz

Verschiedene, mehr oder weniger aufwändige Ansätze sind möglich, z.B.

- Das Fourierintegral direkt lösen.
- Das Signal $v(t)$ in passende Teilsignale zerlegen, z.B. das linke Dreieck über das Fourierintegral transformieren, das rechte mit einem passenden Faktor multiplizieren und mit Hilfe des Verschiebungssatzes an die richtige Stelle verschieben.
- Differentiationssatz anwenden.

20.2 Ergebnis

In diesem Lösungsweg wird das Signal $v(t)$ in Teilsignale zerlegt:

$$v(t) = v_0(t) - v_0(t - T)$$

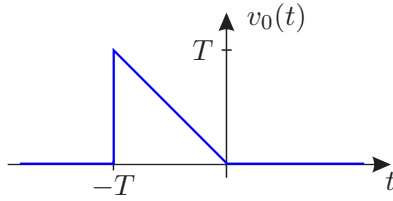


Abbildung 9: Teilsignal zur Fourier-Transformation von Aufgabe 20.

mit $v_0(t)$ wie in Abbildung 9 als das linke Dreieck definiert. Mit Hilfe der Definitionsgleichung der Fourier-Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} V_0(j\omega) &= \int_{-T}^0 -t \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_{-T}^0 \\ &= \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega T} (1 - j\omega T) - 1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes folgt daraus

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= V_0(j\omega) \cdot (1 - e^{-j\omega T}) \\ &= \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega T} (1 - j\omega T) - 1) (1 - e^{-j\omega T}). \end{aligned}$$

21 Lineare und zyklische Faltung

Gegeben sind die zwei auf $M = 5$ Werte beschränkten Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ mit

$$\begin{aligned} v_1(n) &= \{5, 4, 3, 2, 1\} \\ v_2(n) &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die **lineare Faltung** $v_1(n)$ der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$.
- Berechnen Sie die **zyklische Faltung** $v_z(n)$ der Länge 5 der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$.
- Wie kann die lineare Faltung mit Hilfe der zyklischen Faltung berechnet werden?
- Wie kann die zyklische Faltung effizient berechnet werden?

21.1 Lösungsansatz

Die zyklische Faltung der Länge M zweier diskreter Signale $v_1(n)$ und $v_2(n)$ ist durch die Summe

$$\begin{aligned}v_z(n) &= v_1(n) \circledast v_2(n) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_1(\kappa) v_2(n - \kappa)_{\text{mod } M} \\ &= \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_1(n - \kappa)_{\text{mod } M} v_2(\kappa) = v_2(n) \circledast v_1(n)\end{aligned}$$

definiert. Das Faltungsergebnis $v_z(n)$ hat die Länge M . Die Modulo-Operation bewirkt eine periodische Fortsetzung der Funktion, auf dessen Index $n - \kappa$ sie angewendet wird.

- (a) Was sind die Längen M_1 und M_2 der beiden Folgen, welche Länge folgt daraus für $v_1(n)$? Die Folgen für verschiedene Verschiebungen skizzieren hilft dabei, die Summation richtig auszuführen.
- (b) Wie lang ist die Folge $v_z(n)$? Wieder hilft es, die Folgen für verschiedene Verschiebungen zu skizzieren, besonders um die durch die Modulo-Operation bedingte periodische Wiederholung richtig umzusetzen.
- (c) Gegenfrage: Wie kann die zyklische Faltung aus der linearen Faltung bestimmt werden? Wie müssen die Ausgangsfolgen verändert werden, damit die zyklische und lineare Faltung das gleiche Ergebnis liefern?
- (d) Den Faltungssatz der DFT anwenden.

21.2 Ergebnis

- (a) $v_1(n) = \{5, 14, 26, 40, 55, 40, 26, 14, 5\}$
- (b) $v_z(n) = \{45, 40, 40, 45, 55\}$
- (c) Mindestens eine der Folgen muss mit einer ausreichenden Anzahl an Nullen aufgefüllt werden (sog. *zero padding*), z.B. $v_2(n)$ mit $M_1 - 1$ Nullen auffüllen.
- (d) Mit Hilfe des Faltungssatzes der DFT kann gezeigt werden, dass

$$v_1(n) \circledast v_2(n) = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{v_1(n)\} \cdot \text{DFT}\{v_2(n)\}\}$$

gilt. Wird entsprechendes *zero padding* im Zeitbereich durchgeführt, kann so auch die lineare Faltung berechnet werden.

22 Faltung kontinuierlicher Signale

Gegeben sind die beiden in Abbildung 10 dargestellten Signale $v_1(t)$ und $v_2(t)$. Bestimmen Sie die Faltung $y(t) = v_1(t) * v_2(t)$ und skizzieren Sie $y(t)$.

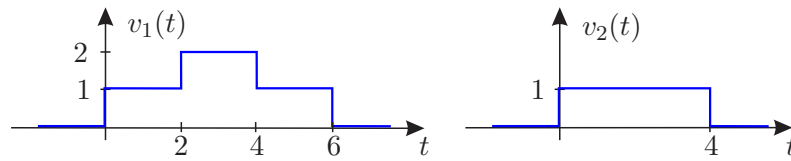


Abbildung 10: Signale zu Aufgabe 22.

22.1 Lösungsansatz

Gleiche Vorgehensweise wie in Aufgabe 18:

- Funktionen aufzeichnen, eine umklappen und verschieben.
- Wie viele Fälle gibt es in der Fallunterscheidung zur Lösung des Integrals? Was sind die Grenzen?
- Faltungsintegral für diese Fälle bestimmen.

22.2 Ergebnis

$$y(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t < 2 \\ 2t - 2 & , 2 \leq t < 4 \\ 6 & , 4 \leq t < 6 \\ -2t + 18 & , 6 \leq t < 8 \\ -t + 10 & , 8 \leq t < 10 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

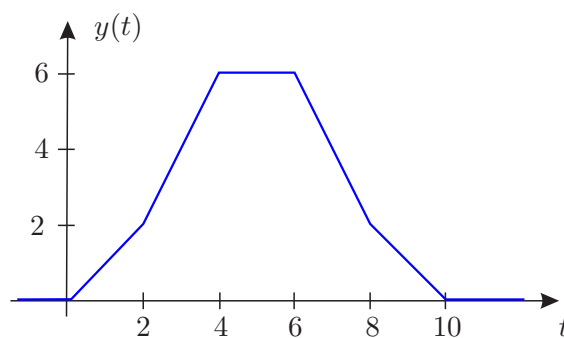


Abbildung 11: Ergebnis der Faltung aus Aufgabe 22.

23 Laplace-Transformation

Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ der folgenden Signale und geben Sie jeweils das Konvergenzgebiet an:

$$(a) v(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) v(t) = \begin{cases} e^{at} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$(c) v(t) = \begin{cases} t e^{at} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

23.1 Lösungsansatz

Die Laplace-Transformation für ein kontinuierliches Signal $v(t)$ ist definiert durch

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt \quad \text{mit } s = \sigma + j\omega.$$

Das Zeitsignal kann aus dem Bildbereich (Laplace-Bereich) durch

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{s=\sigma+j\omega \\ \omega=-\infty \\ \omega=\infty}}^{\infty} V(s) e^{st} ds$$

zurückgewonnen werden. Durch die „Dämpfung“ σ konvergiert die Laplace-Transformation für eine weitere Klasse von Funktionen als die Fourier-Transformation. Es wird stets der Konvergenzbereich (also, für welche Werte von s die Laplace-Transformierte existiert) angegeben, für $\sigma = 0$ geht die Laplace-Transformation in die Fourier-Transformation über.

Folgende Schreibweisen sind in Verbindung mit der Laplace-Transformation üblich:

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}, \quad v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}, \quad v(t) \circ \bullet V(s).$$

Zum Lösen der Aufgaben obige Integrale lösen, dabei auch auf den Konvergenzbereich achten!

23.2 Ergebnis

$$(a) \frac{e^{sT} - e^{-sT}}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

$$(b) \frac{1}{s-a} \quad \forall \operatorname{Re}\{s\} = \sigma > a$$

$$(c) \frac{1}{(a-s)^2} \quad \forall \operatorname{Re}\{s\} = \sigma > a$$

24 Laplace-Transformation

Gegeben ist folgendes Signal:

$$v(t) = e^{a|t|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $v(t)$. Betrachten Sie dazu die Konvergenz für die beiden Fälle:

(a) $a < 0$

(b) $a > 0$

Skizzieren Sie das Konvergenzgebiet in der s -Ebene falls Konvergenz vorliegt.

24.1 Lösungsansatz

Laplace-Integral lösen und dabei auf Konvergenzbereich achten.

24.2 Ergebnis

$$\begin{aligned} V(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{a|t|} \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-at} \cdot e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-(a+\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t} dt}_A + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t} dt}_B \end{aligned}$$

Konvergenz des Integrals A für: $a + \sigma < 0$

Konvergenz des Integrals B für: $a - \sigma < 0$

⇒ Gemeinsamer Konvergenzbereich für $a < \sigma < -a$

Für a ergeben sich zwei Fälle:

(a) $a < 0$: Konvergenz vorhanden.

(b) $a > 0$: keine Konvergenz da $0 < a < \sigma < -a$ einen Widerspruch darstellt.

Für $a < 0$ gilt dann:

$$V(s) = -\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{-2a}{a^2 - s^2} = \frac{2a}{s^2 - a^2}$$

25 Symmetriebeziehungen von z- und Laplace-Transformation

Gegeben sei die Folge $v(n)$ mit ihrer z-Transformierten $V(z)$. Berechnen Sie die z-Transformierte der folgenden Folgen in Abhängigkeit von $V(z)$:

(a) $v_1(n) = v(-n)$

(b) $v_2(n) = v^*(n)$

(c) $v_3(n) = \frac{1}{2}[v(n) + v(-n)]$

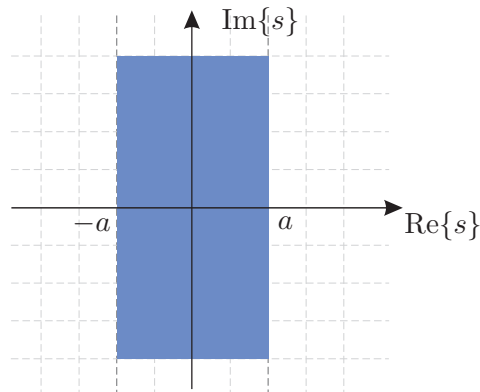


Abbildung 12: Konvergenzgebiet (farbige Fläche) zu Aufgabe 24.

Setzen Sie die Ergebnisse in Zusammenhang mit den bekannten Symmetriebeziehungen der Laplacetransformation.

25.1 Lösungsansatz

Die gegebenen Folgen $v_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ in die Summenformel der z-Transformation einsetzen (siehe Hinweise zu Aufgabe 26) und so weit vereinfachen, bis $V_i(z)$ durch $V(z)$ ausgedrückt wird. Gelten die so hergeleiteten Symmetriebeziehungen in analoger Weise auch für die Laplace-Transformation?

25.2 Ergebnis

$$(a) V_1(z) = V\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\text{Laplace-Transformation: } \mathcal{L}\{v(-t)\} = V(s) \neq V(-s)$$

$$(b) V_2(z) = V^*(z^*)$$

$$\text{Laplace-Transformation: } \mathcal{L}\{v^*(t)\} = V^*(s^*)$$

$$(c) V_3(z) = \frac{1}{2} [V(z) + V(z^{-1})] = V_3(z^{-1})$$

$$\text{Laplace-Transformation: } V_3(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}[v(t) + v(-t)]\right\} = \frac{1}{2}[V(s) + V(-s)] = V_3(-s)$$

26 z-Transformation

Bestimmen Sie die z-Transformierten der Folgen

$$(a) v(n) = \begin{cases} 1 & , |n| \leq N \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) v(n) \text{ wie in der Abbildung 13 definiert.}$$

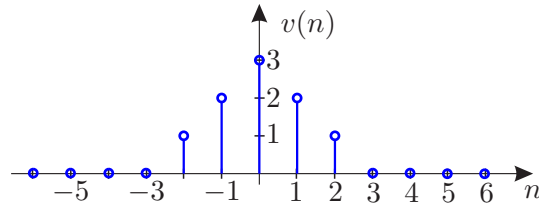


Abbildung 13: Signal zu Aufgabe 26.

26.1 Lösungsansatz

Die z-Transformation ist für zeitdiskrete Signale $v(n)$ durch

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n} \text{ mit } z = \rho e^{j\Omega}$$

definiert. Das Zeitsignal kann aus dem Bildbereich (z-Bereich) durch

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{Geschl. Weg um } 0} V(z) z^n \frac{dz}{z}$$

zurückgewonnen werden. Die z-Transformation kann damit als Verallgemeinerung der Fourier-Transformation für Folgen aufgefasst werden (ähnlich der Verwandtschaft von Fourier- und Laplace-Transformation für kontinuierliche Signale). Der Konvergenzbereich ist immer anzugeben.

Folgen Schreibweisen sind in Verbindung mit der z-Transformation üblich:

$$V(z) = \mathcal{Z} \{v(n)\}, \quad v(n) = \mathcal{Z}^{-1} \{V(z)\}, \quad v(n) \circ \bullet V(z).$$

Zum Lösen der Aufgaben die obigen Definitionen anwenden und ggf. durch Anwenden der geometrischen Reihe vereinfachen. Die Konvergenzbereiche angeben.

26.2 Ergebnis

$$(a) \quad V(z) = \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} \quad \forall z \neq 1$$

$$(b) \quad V(z) = z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2} \quad \forall z$$

27 Inverse z-Transformation

Bestimmen Sie die Rücktransformierten $v_\kappa(n)$ der z-Transformierten

$$V_\kappa(z) = \frac{z^\lambda}{(z - z_\infty)^{\kappa+1}}$$

explizit für $\lambda = 1$ und $\kappa \in \{0, 1, 2\}$. Verwenden Sie dazu die aus der Vorlesung bekannte Korrespondenz

$$\binom{n + \lambda - 1}{\kappa} z_{\infty}^{n+\lambda-\kappa-1} \cdot \gamma_{-1}(n + \lambda - \kappa - 1) \bullet \circ \frac{z^{\lambda}}{(z - z_{\infty})^{\kappa+1}} \quad , \quad |z| > |z_{\infty}|.$$

27.1 Lösungsansatz

Wie bereits in der Aufgabenstellung erwähnt, kann die Korrespondenz

$$\binom{n + \lambda - 1}{\kappa} z_{\infty}^{n+\lambda-\kappa-1} \cdot \gamma_{-1}(n + \lambda - \kappa - 1) \bullet \circ \frac{z^{\lambda}}{(z - z_{\infty})^{\kappa+1}} \quad , \quad |z| > |z_{\infty}|.$$

benutzt werden. Für $n \geq k$ gilt für den darin auftretenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n - \kappa)!}.$$

27.2 Ergebnis

Fall 1 ($\kappa = 0$): $v_0(n) = z_{\infty}^n \gamma_{-1}(n)$

Fall 2 ($\kappa = 1$): $v_1(n) = n z_{\infty}^{n-1} \gamma_{-1}(n - 1) = n z_{\infty}^{n-1} \gamma_{-1}(n)$

Fall 3 ($\kappa = 2$): $v_2(n) = \frac{(n - 1)n}{2} z_{\infty}^{n-2} \gamma_{-1}(n - 2) = \frac{(n - 1)n}{2} z_{\infty}^{n-2} \gamma_{-1}(n)$

28 Inverse z-Transformation, Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{23z^3 - 34z^2 - 28z + 56}{z^5 - 5z^4 + 6z^3 + 4z^2 - 8z}.$$

eines zeitdiskreten LTI-Systems. Hierbei sind $V(z)$ und $Y(z)$ die z -Transformierten der Eingangs- bzw. Ausgangsfolgen des Systems.

- Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Folgen $y(n)$ und $v(n)$ im Zeitbereich?
- Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

28.1 Lösungsansatz

- Mit Hilfe des Verschiebungssatzes $Y(z)/V(z)$ in den Zeitbereich transformieren und die so erhaltene Differenzengleichung nach dem neuesten Ausgangswert umstellen.
- Für den Ansatz der Partialbruchzerlegung müssen zuerst die Polstellen (also die Nullstellen des Nenners) von $H(z)$ bestimmt werden. Dazu müssen einige durch geschick-

tes Ausprobieren (andere Ausdrücke dafür sind „scharfes Hinschauen“, „Raten“ oder Ähnliches...) herausgefunden werden. Anschließend helfen eine Polynomdivision und die pq -Formel, um die restlichen Polstellen zu berechnen.

Die Rücktransformation besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten

- Partialbruchzerlegung durchführen und die Faktoren $B_{\nu,\kappa}$ bestimmen.
- Diese Faktoren für folgende Korrespondenz nutzen:

$$V(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} \frac{z}{(z - z_{\infty,\nu})^\kappa}$$

$$\downarrow$$

$$v(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} z_{\infty,\nu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n - \kappa + 1)$$

für $|z| > \max\{|z_{\infty,\nu}|\}$.

28.2 Ergebnis

(a)

$$y(n+5) = 23v(n+3) - 34v(n+2) - 28v(n+1) + 56v(n) \\ + 5y(n+4) - 6y(n+3) - 4y(n+2) + 8y(n+1)$$

Für gewöhnlich wird der aktuellste Ausgangswert ohne Verschiebung dargestellt, was durch die Substitution $m = n + 5$ erreicht werden kann:

$$y(m) = 23v(m-2) - 34v(m-3) - 28v(m-4) + 56v(m-5) \\ + 5y(m-1) - 6y(m-2) - 4y(m-3) + 8y(m-4).$$

In Abbildung 14 ist diese Differenzgleichung als Blockschaltbild veranschaulicht.

(b) $h_0(n) = -7\gamma_0(n-1) + [(-1)^{n+1} + 2^n + 4n \cdot 2^{n-1} + 2n(n-1) \cdot 2^{n-2}] \gamma_{-1}(n)$

29 Laplace-Transformation, Impuls- und Sprungantwort

Gegeben sei ein System mit der Impulsantwort

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{t}{T} & , 0 \leq t < T \\ 2 - \frac{t}{T} & , T \leq t < 2T \\ 0 & , t \geq 2T. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $H_0(s) = \mathcal{L}\{h_0(t)\}$ der Impulsantwort.

(b) Bestimmen Sie die Sprungantwort $h_{-1}(t)$.

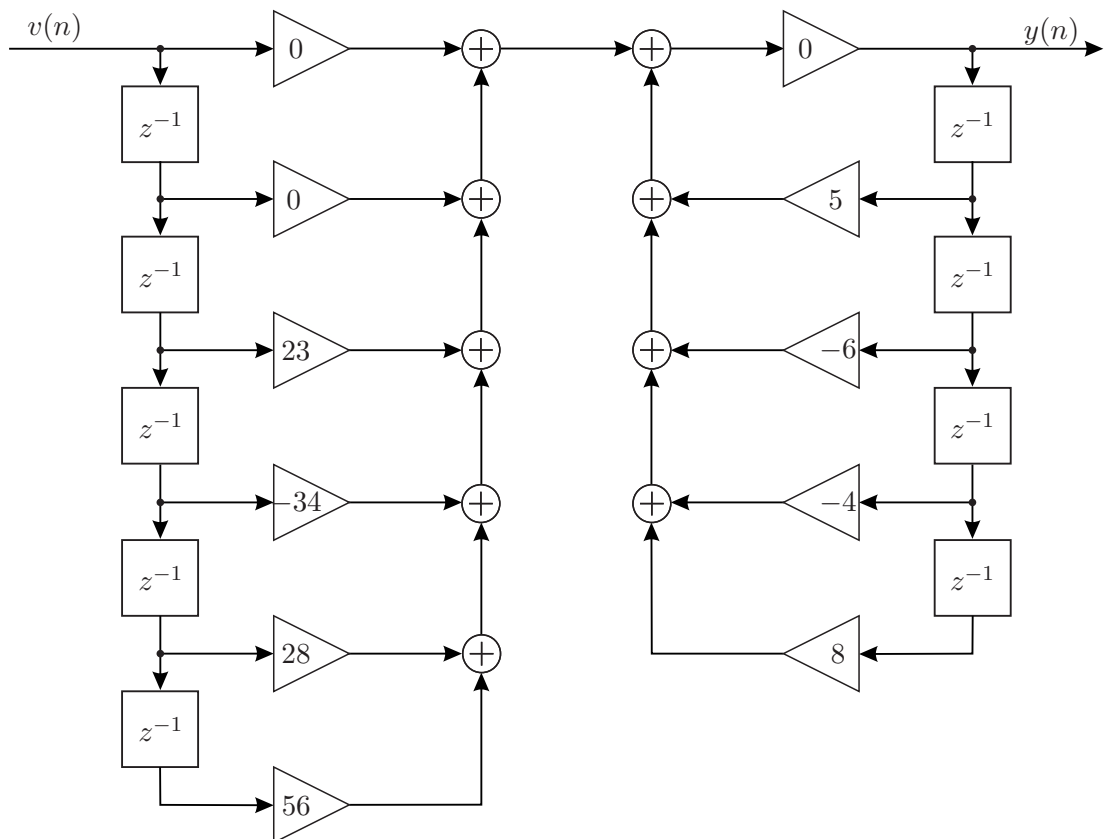


Abbildung 14: Veranschaulichung der Differenzgleichung aus Aufgabe 28 (a) als Blockdiagramm (IIR-Filter in Direktform I).

(c) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $H_{-1}(s) = \mathcal{L}\{h_{-1}(t)\}$ der Sprungantwort.

29.1 Lösungsansatz

(a) Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort ist die Übertragungsfunktion. Sie kann – wie so häufig – über verschiedene Wege mit mehr oder weniger Aufwand bestimmt werden:

- Direkter Lösungsweg: Die Impulsantwort $h_0(t)$ in das Laplace-Integral einsetzen. Nach dem Einsetzen der Integrationsgrenzen treten hierbei recht viele Terme auf, und man verhaspelt sich leicht bei den Vorzeichen.
- Die Impulsantwort ist ein Dreieck und kann also durch die Faltung eines Rechtecks $r(t)$ mit sich selbst ausgedrückt werden:

$$h_0(t) = r(t) * r(t).$$

Wie breit und wie hoch muss das Rechteck sein? Anschließend das so spezifizierte Rechteck transformieren und den Faltungssatz der Laplace-Transformation anwenden.

(b) Zwischen der Impulsantwort $h_0(t)$ und der Sprungantwort $h_{-1}(t)$ besteht der Zusammenhang

$$h_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t h_0(\tau) d\tau$$

Entsprechend der abschnittswisen Definition von $h_0(t)$ muss für die Integration eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

(c) Die Laplace-Transformierte $H_{-1}(s)$ kann entweder aus $h_{-1}(t)$ oder durch den Zusammenhang mit der bereits bekannten Übertragungsfunktion $H_0(s)$ bestimmt werden.

29.2 Ergebnis

$$(a) H_0(s) = \frac{1}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2$$

$$(b) h_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{t^2}{2T} & , 0 \leq t < T \\ 2t - \frac{t^2}{2T} - T & , T \leq t < 2T \\ T & , t \geq 2T \end{cases}$$

$$(c) H_{-1}(s) = \frac{1}{sT} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2$$

30 Impuls- und Sprungantwort

Gegeben ist das folgende System, beschrieben durch die Systemantwort $y(t)$ auf die Systemanregung $v(t)$:

$$y(t) = S\{v(t)\} = \int_{-\infty}^t v(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau,$$

wobei $\alpha > 0$ gelte.

- Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(t) = S\{\delta_0(t)\}$ des Systems und skizzieren Sie diese.
- Bestimmen Sie die Sprungantwort $h_{-1}(t) = S\{\delta_{-1}(t)\}$ des Systems und skizzieren Sie diese.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Laplace-Transformierten $H_0(s)$ und $H_{-1}(s)$ von Impuls- und Sprungantwort?

30.1 Lösungsansatz

- Um die Impulsantwort zu bestimmen, als Eingangssignal $v(t) = \delta_0(t)$ einsetzen und das Integral mit Hilfe der Ausblendeigenschaft der Dirac-Distribution

$$x(t) \cdot \delta_0(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta_0(t - t_0)$$

und dem Zusammenhang

$$\int \delta_0(t) dt = 1$$

vereinfachen.

- Siehe Hinweis zu Aufgabe 29 (b).
- Siehe Hinweis zu Aufgabe 29 (c).

30.2 Ergebnis

- $h_0(t) = e^{-\alpha t} \cdot \delta_{-1}(t)$
- $h_{-1}(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \delta_{-1}(t)$
- $H_{-1}(s) = \frac{1}{s} H_0(s)$

31 Laplace-Transformation, Pol-/Nullstellendiagramm

Bekannt seien die Pol- und Nullstellen des Systems mit der Übertragungsfunktion $H_1(s)$ wie in Abbildung 15 dargestellt.

- Ergänzen Sie (eine minimale Anzahl) Polstellen (\times) und Nullstellen (\circ), so dass $H_1(s)$ reellwertig ist und zeichnen Sie das resultierende Pol-/Nullstellendiagramm.

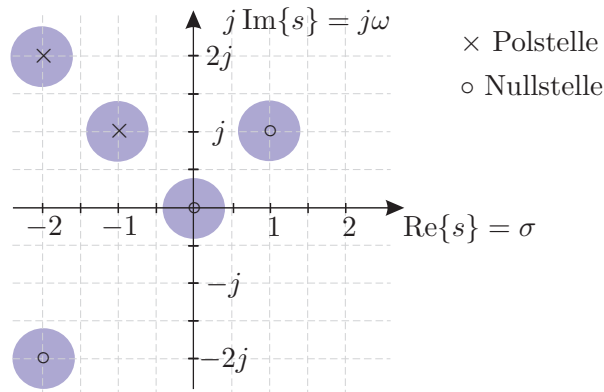


Abbildung 15: Pol-/Nullstellendiagramm zu Aufgabe 31.

- (b) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H_1(s)$ des reellwertigen Systems?
 Es gelte: $H_1(s = 1) = 1$.
- (c) Ist das so bestimmte System stabil (Begründung)?

Das System werde nun in Reihe geschaltet mit einem zweiten System mit der Übertragungsfunktion $H_2(s)$, dessen Sprungantwort

$$h_{-1,2}(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$$

bekannt sei. Das Blockdiagramm des auf diese Weise erzeugten Systems ist in Abbildung 16 dargestellt.

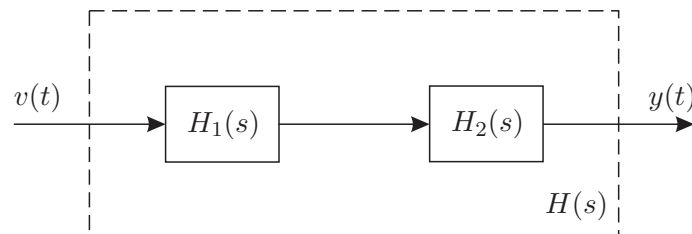


Abbildung 16: Blockschaltbild zu Aufgabe 31 (d) und (e).

- (d) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(s)$ des Gesamtsystems?
- (e) Was für ein System stellt $H(s)$ dar? Geben Sie seinen Betragsfrequenzgang $|H(j\omega)|$ ohne zu rechnen an.

31.1 Lösungsansatz

- (a) Ein reellwertiges System reagiert auf ein Eingangssignal $v(t) \in \mathbb{R}$ mit einem reellwertigen Ausgangssignal $y(t) = v(t) * h_0(t) \in \mathbb{R}$. Folglich muss für die Impulsantwort $h_0(t) \in \mathbb{R}$ gelten. Über die Eigenschaften der Fourier-Transformation lässt sich herleiten, dass dies nur der Fall ist, wenn Pole und Nullstellen von $H_0(j\omega)$ in komplex konjugierten Paaren auftreten.

(b) Aus dem Pol-/Nullstellendiagramm aus (a) kann die Übertragungsfunktion bis auf einen konstanten Verstärkungsfaktor abgelesen werden. Diesen so bestimmen, dass $H_1(s = 1) = 1$ gilt.

(c) Stabilität liegt vor wenn *beide* der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle Pole liegen in der linken s -Halbebene, d.h. $Re\{s_{\infty,i}\} < 0 \forall i$.
2. Der Zählergrad von $H(s)$ ist kleiner dem Nennergrad. Sonst liegen nämlich Pole für $s \rightarrow \infty$ vor.

(d) Die Übertragungsfunktion zweier kaskadierter (hintereinander geschalteter) Systeme $H_1(s)$ und $H_2(s)$ ist

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s).$$

(e) Das Pol-/Nullstellendiagramm von $H(s)$ aufzeichnen. Was bedeutet die Symmetrie der Pol- und Nullstellen?

31.2 Ergebnis

(a) Zu ergänzen sind die Nullstellen $s_{01}^* = 1 - j$ und $s_{02}^* = -2 + 2j$
 Polstellen $s_{\infty 1}^* = -1 - j$ und $s_{\infty 2}^* = -2 - 2j$.

(b)
$$H_1(s) = 5 \cdot \frac{s(s - (1 + j))(s - (1 - j))}{(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))}$$

(c) Das System ist nicht stabil.

(d)
$$H(s) = 5 \cdot \frac{(s - (1 + j))(s - (1 - j))}{(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))}$$

(e) Das System $H(s)$ stellt ein Allpassfilter dar. Es gilt $|H(s)| = 5$.

32 Impuls- und Sprungantwort

Geben Sie zu den beiden folgenden Systemen jeweils die Impuls- und die Sprungantwort an!

(a)
$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(n - k)$$

(b)
$$y(t) = \int_{t-T}^t v(\tau) d\tau$$

33 Pol-/Nullstellendiagramm

Die Impulsantwort $h_0(t)$ und die Sprungantwort $h_{-1}(t)$ eines Systems mit der Übertragungsfunktion $H(s)$ sind bekannt, siehe Abbildung 17.

Welche der in Abbildung 18 angegebenen Pol-/Nullstellendiagramme können prinzipiell zu $H(s)$ gehören, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation.

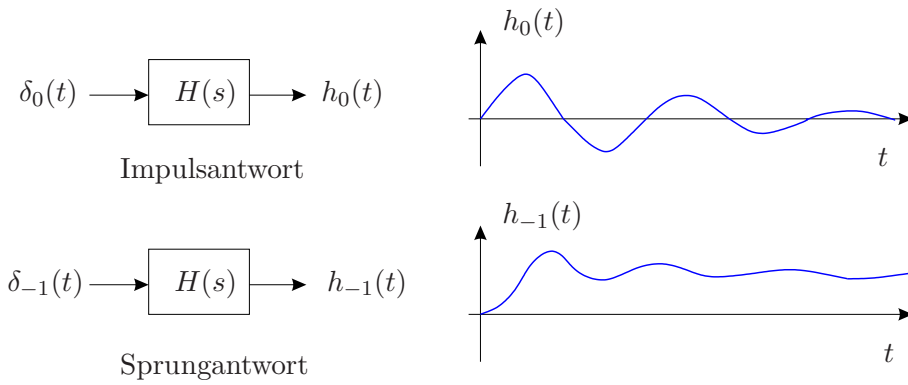


Abbildung 17: Impulsantwort und Sprungantwort des Systems aus Aufgabe 33.

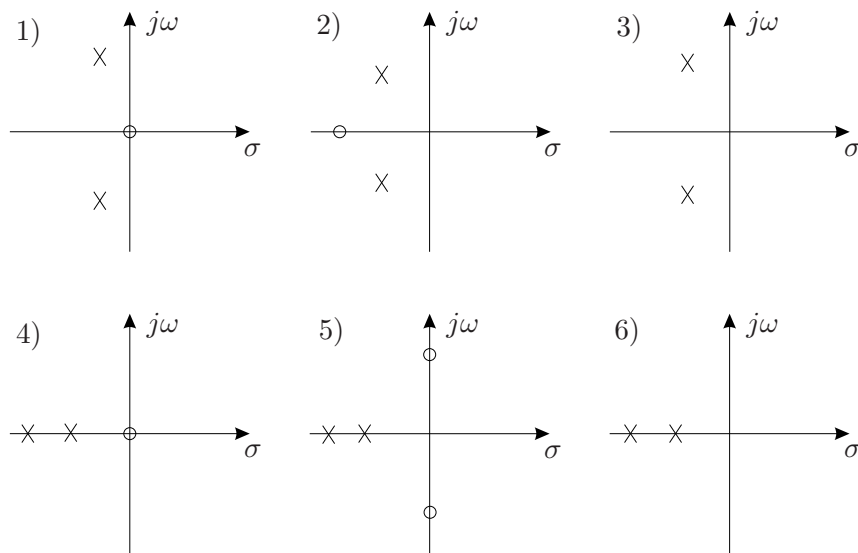


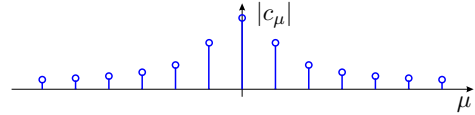
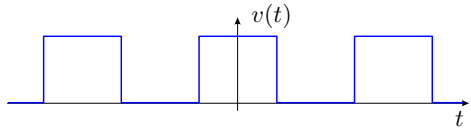
Abbildung 18: Pol-Nullstellen-Diagramme (s-Ebene) zu Aufgabe 33.

A Übersicht zu Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

Fourier-Reihe

$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

$$c_{\mu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt$$



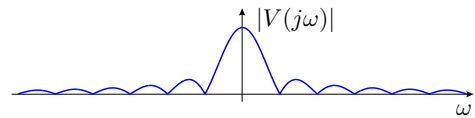
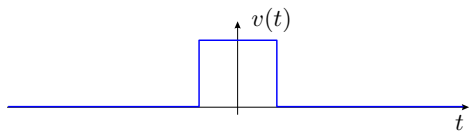
kontinuierlich
periodisch

nicht periodisch
diskret

Fourier-Transformation

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$



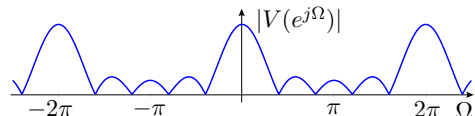
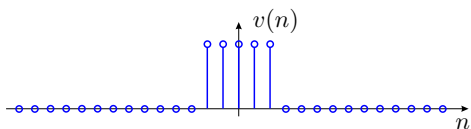
kontinuierlich
nicht periodisch

nicht periodisch
kontinuierlich

Fourier-Transformation von Folgen

$$v(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n}$$



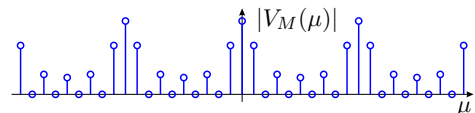
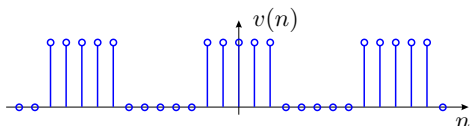
diskret
nicht periodisch

periodisch
kontinuierlich

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$v(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$



diskret
periodisch

periodisch
diskret