# Signale und Systeme – Einführung

**Gerhard Schmidt**

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Technische Fakultät
Elektrotechnik und Informationstechnik
Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

## Gesamtübersicht – Teil 1

- Signale und Systeme – Einführung
  - Vorlesungsdetails
  - Einführung und Begriffserklärung
  - Signale
  - Systeme
- Signale
  - Elementarsignale
  - Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
  - Signalzerlegung in Elementarsignale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
  - Fourier-Reihe, diskrete Fourier-Transformation
  - Fourier-Transformation
  - Laplace- und z-Transformation

## Gesamtübersicht – Teil 2

- Lineare Systeme
  - Reaktionen auf Elementarsignale
  - Reaktionen auf beliebige Signale
  - Zusammenhänge zwischen Systemkenngrößen
  - Stabilität linearer Systeme
  - Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen
- Modulation
  - Grundlagen
  - Lineare Modulations- und Demodulationsverfahren
  - Abtasttheorem

## Literatur

### *Vorlage dieser Folien:*

Die folgenden Folien beruhen größtenteils auf den Vorlesungsunterlagen von Prof. Dr.-Ing. Ulrich Heute. Ich bedanke mich für die prima Vorlage und die Erlaubnis zur Verwendung seiner Unterlagen zu dieser Vorlesung.

Prof. Dr.-Ing. Ulrich Heute

### *Weiterführende Literatur (Auswahl):*

- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, J. T. Young: *Signale und Systeme*, Lehr- bzw. Arbeitsbuch, Wiley-VCH-Verlag, 2. Auflage, 1992 (auch als englische Ausgabe verfügbar)
- A. V. Oppenheim, R. W. Schafer: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, Oldenbourg-Verlag, 3. Auflage, 1999 (auch als englische Ausgabe verfügbar)
- R. Unbehauen: *Systemtheorie 1: Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich*, Oldenbourg-Verlag, 2002
- … und viele, viele mehr … (es empfiehlt sich auch mal in ein englisches Buch zu schauen)

## Übersicht des nächsten Abschnitts

## Vorlesungsdetails – Teil 1

- Vorlesungstermine
  - Vorlesung:  Vortragender: Gerhard Schmidt
  - Übung:   Vortragende: Ralf Burgardt und Konstantinos Karatziotis
- Übung
  - Vorrechenübung
- Klausur
  - Modulklausur in der Prüfungszeit (100 %)
  - Keine Zulassungsvoraussetzungen

## Vorlesungsdetails – Teil 2

- ECTS-Punkte: 7
- Vorlesungsunterlagen
  - Im Internet unter ***www.dss-kiel.de***, dort dann in der *teaching*-Sektion als pdf-Dateien
  - Außerdem ist ein Skript vorhanden – ebenfalls auf der o.g. Webseite zu finden
- Wen kann man bei Problemen ansprechen:
  - Natürlich die Vorlesungsbetreuenden ….

Gerhard Schmidt
(Prof.)

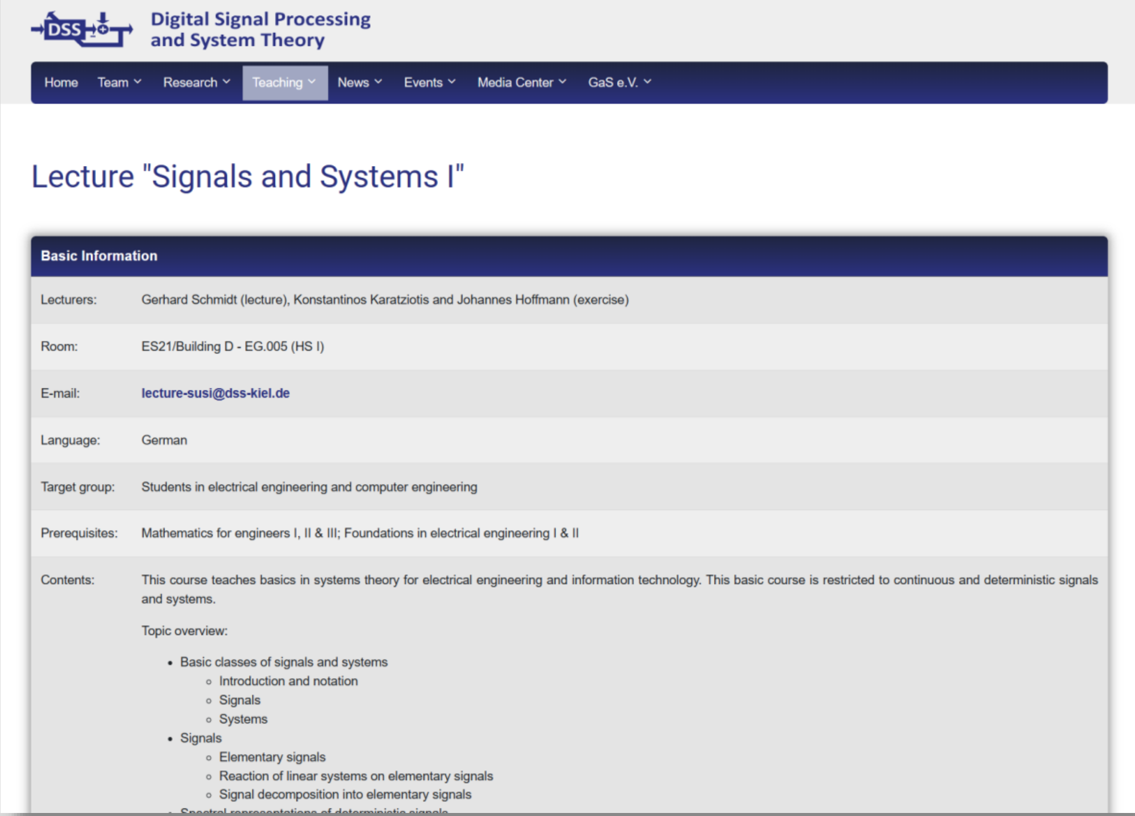
Ralf Burgardt
(Assistent)

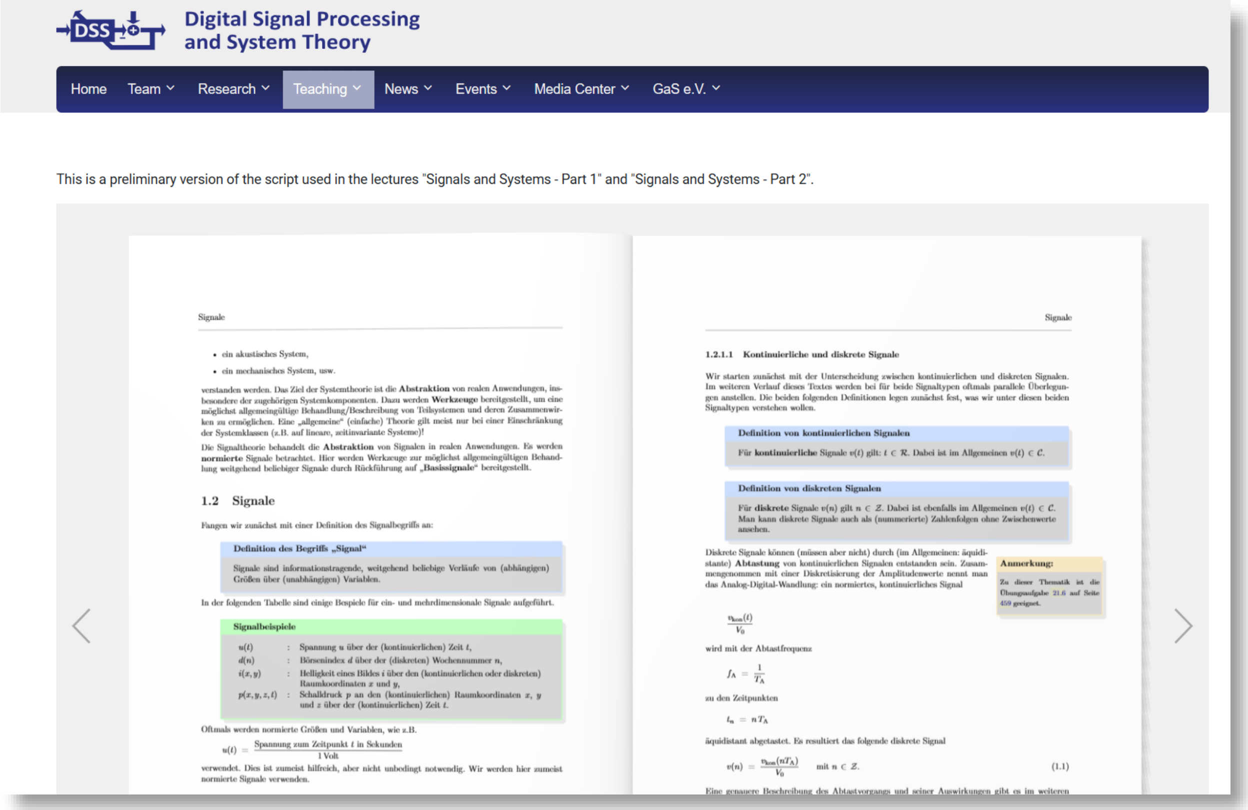
Konstantinos Karatziotis
(Assistent)

… aber auch den Rest
vom DSS-Team:

# Webseite

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel




- ❑ Aktuelle Informationen
- ❑ Vorlesungsfolien
- ❑ Videos (YouTube)

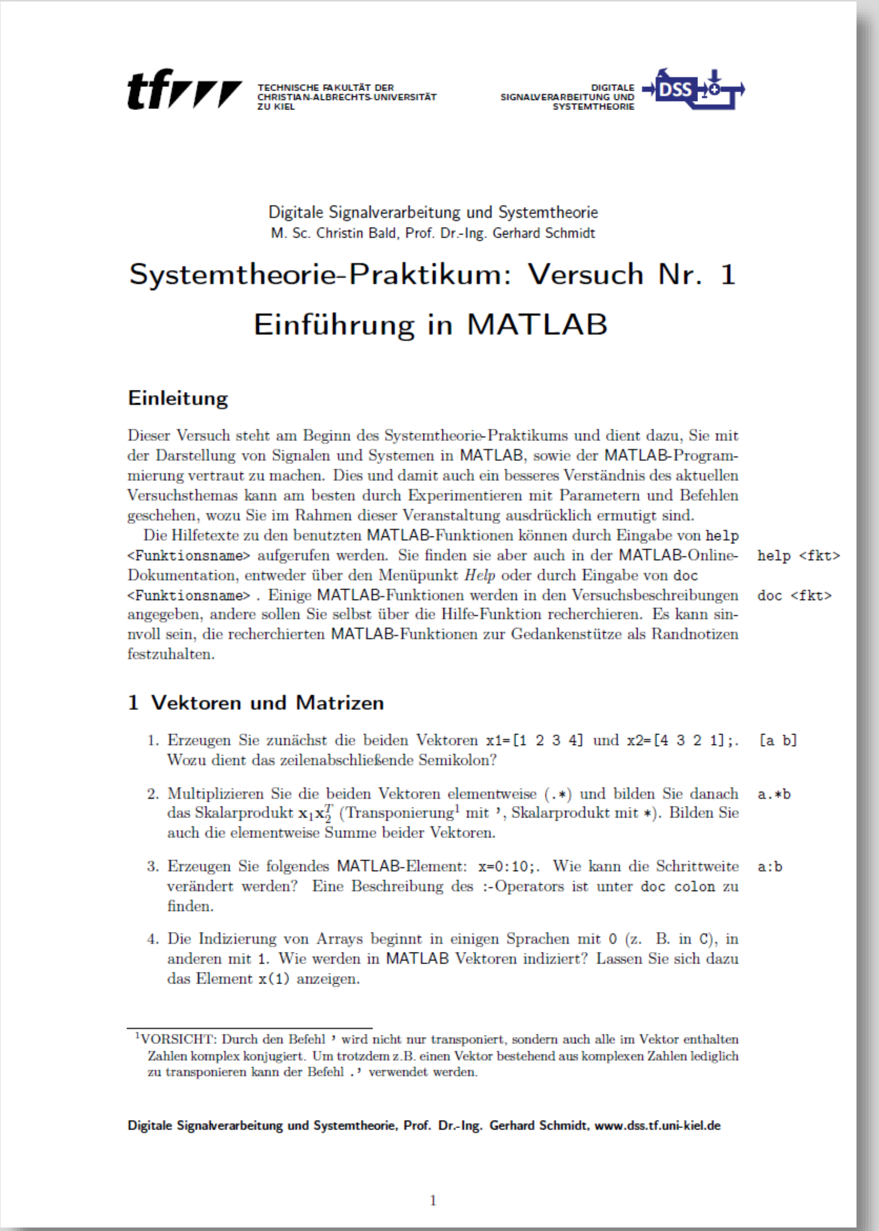
- ❑ Skript
- ❑ Alte Klausuren (mit Lösungen)
- ❑ Übungsaufgaben

# Ergänzendes Praktikum



- Grundlegendes
  - Systemtheorie-Praktikum
  - im Wintersemester
  - Vertiefung des Stoffes durch Simulationen und Anwendungen in Matlab
- Themen
  - Einführung in Matlab
  - Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete (periodische) Signale und zugehörige Transformationen
  - Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
  - Lineare, zeitinvariante Systems
  - Stochastische Prozesse
  - …
  - Adaptive Filter

# Ergänzendes Praktikum (im Wintersemester)



TECHNISCHE FAKULTÄT DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

DIGITALE SIGNALVERARBEITUNG UND SYSTEMTHEORIE

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie
M. Sc. Christin Bald, Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

## Systemtheorie-Praktikum: Versuch Nr. 1
## Einführung in MATLAB

### Einleitung

Dieser Versuch steht am Beginn des Systemtheorie-Praktikums und dient dazu, Sie mit der Darstellung von Signalen und Systemen in MATLAB, sowie der MATLAB-Programmierung vertraut zu machen. Dies und damit auch ein besseres Verständnis des aktuellen Versuchsthemas kann am besten durch Experimentieren mit Parametern und Befehlen geschehen, wozu Sie im Rahmen dieser Veranstaltung ausdrücklich ermutigt sind.

Die Hilfetexte zu den benutzten MATLAB-Funktionen können durch Eingabe von `help <Funktionsname>` aufgerufen werden. Sie finden sie aber auch in der MATLAB-Online-Dokumentation, entweder über den Menüpunkt *Help* oder durch Eingabe von `doc <Funktionsname>`. Einige MATLAB-Funktionen werden in den Versuchsbeschreibungen angegeben, andere sollen Sie selbst über die Hilfe-Funktion recherchieren. Es kann sinnvoll sein, die recherchierten MATLAB-Funktionen zur Gedankenstütze als Randnotizen festzuhalten.

`help <fkt>`

`doc <fkt>`

### 1 Vektoren und Matrizen

1. Erzeugen Sie zunächst die beiden Vektoren `x1=[1 2 3 4]` und `x2=[4 3 2 1];`. Wozu dient das zeilenabschließende Semikolon? `[a b]`
2. Multiplizieren Sie die beiden Vektoren elementweise (`.*`) und bilden Sie danach das Skalarprodukt $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T$ (Transponierung[1] mit `'`, Skalarprodukt mit `*`). Bilden Sie auch die elementweise Summe beider Vektoren. `a.*b`
3. Erzeugen Sie folgendes MATLAB-Element: `x=0:10;`. Wie kann die Schrittweite verändert werden? Eine Beschreibung des `:`-Operators ist unter `doc colon` zu finden. `a:b`
4. Die Indizierung von Arrays beginnt in einigen Sprachen mit 0 (z. B. in C), in anderen mit 1. Wie werden in MATLAB Vektoren indiziert? Lassen Sie sich dazu das Element `x(1)` anzeigen.

[1] VORSICHT: Durch den Befehl `'` wird nicht nur transponiert, sondern auch alle im Vektor enthalten Zahlen komplex konjugiert. Um trotzdem z.B. einen Vektor bestehend aus komplexen Zahlen lediglich zu transponieren kann der Befehl `.'` verwendet werden.

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie, Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt, www.dss.tf.uni-kiel.de

1

C|A|U
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

- Grundlegendes
  - Systemtheorie-Praktikum
  - im Wintersemester
  - Vertiefung des Stoffes durch Simulationen und Anwendungen in Matlab
- Themen
  - ***Einführung in Matlab***
  - Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete (periodische) Signale und zugehörige Transformationen
  - Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
  - Lineare, zeitinvariante Systems
  - Stochastische Prozesse
  - Adaptive Filter

## Modellierung und Abstraktion – Teil 1

### *Grundlegender erster Schritt:*

Reduktion des tatsächlichen Systems bzw. der realen Teilsysteme auf ***Systemmodelle***, welche die Realität

- so ***genau wie nötig*** und
- so ***einfach wie möglich***

mathematisch beschreiben. Unter einem realen System bzw. Teilsystem kann dabei

- ein biologisches System,
- ein physiologisches System,
- ein elektrisches System,
- ein optisches System,
- ein akustisches System,
- ein mechanisches System, usw.

verstanden werden.

# Modellierung und Abstraktion – Teil 2

## *Ziele der Systemtheorie:*

- ***Abstraktion*** von realen Anwendungen, insbesondere der Systemkomponenten der Anwendung
- Bereitstellung von ***Werkzeugen*** zur möglichst allgemeingültigen Behandlung/Beschreibung von Teilsystemen und deren Zusammenwirken
- … aber: eine „allgemeine“ (einfache) Theorie gilt meist nur bei Einschränkung der Systemklassen (z.B. auf lineare, zeitinvariante Systeme)!

## *Ziele der Signaltheorie:*

- ***Abstraktion*** von realen Anwendungen, insbesondere der Signale der Anwendung
- Behandlung von ***normierten*** Signalen
- Bereitstellung von Werkzeugen zur möglichst allgemeingültigen Behandlung weitgehend beliebiger Signale durch Rückführung auf „***Basissignale***“.

## Zusammenfassung und Ausblick

- Signale und Systeme – Einführung
    - ***Einführung und Begriffserklärung***
        - Vorlesungsdetails
        - Signal- und Systembeispiele
        - Modellierung und Abstraktion
        - Anwendungsbeispiel
    - Signale
    - Systeme
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

## Übersicht des nächsten Abschnitts

# Ergänzendes Praktikum



TECHNISCHE FAKULTÄT DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

DIGITALE SIGNALVERARBEITUNG UND SYSTEMTHEORIE

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie
M. Sc. Christin Bald, Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

## Systemtheorie-Praktikum: Versuch Nr. 2

## Zeitkontinuierliche Signale

### Einleitung

In diesem Versuch werden zeitkontinuierliche periodische und nichtperiodische Signale untersucht, wobei insbesondere Betrachtungen im Spektralbereich eine Rolle spielen. Die Versuchsvorbereitung sowie die erste Programmieraufgabe behandeln die Analogie zwischen Spektren zeitlich begrenzter Signale und ihrer periodischen Fortsetzungen. Die zweite Aufgabe hat die Veranschaulichung einiger Sätze der kontinuierlichen Fourier-Transformation zum Inhalt; das Zeitverhalten bandbegrenzter Näherungen von Sprüngen wird in der dritten Aufgabe untersucht. Die vierte Aufgabe zeigt schließlich den Einfluss einer Zeitbegrenzung auf das Spektrum eines periodischen Signals.

### 1 Versuchsvorbereitung

Informieren Sie sich zunächst über die Fourier-Transformation und Fourier-Reihen, zum Beispiel mithilfe des Skriptes der Signale-und-Systeme-Vorlesung.

#### 1.1 Spektren periodischer Signale

Berechnen Sie die komplexwertigen Fourierkoeffizienten $c_\mu$ der folgenden periodischen Signale. Zeichnen Sie dann die Spektren bis zur zehnfachen Grundfrequenz unter Verwendung der angegebenen Werte $T$ und $T_1$. Stellen Sie dabei Gewichte von Dirac-Impulsen als Längen dar.

(a) Rechtecksignal $v_1(t)$

$$v_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{T_1}\right) \tag{1}$$

mit $T = 1$, $T_1 = 2/3$ und

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < 1/2 \\ 1/2 & \text{für } |t| = 1/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie, Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt, www.dss.tf.uni-kiel.de

1

- Systemtheorie-Praktikum
  - im Wintersemester
- Themen
  - Einführung in Matlab
  - ***Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete (periodische) Signale und zugehörige Transformationen***
  - Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
  - Lineare, zeitinvariante Systems
  - Stochastische Prozesse
  - …
  - Adaptive Filter

## Grundlegendes

### *Definition:*

Signale sind informationstragende, weitgehend beliebige Verläufe von („abhängigen“) Größen über („unabhängigen“) Variablen.

### *Beispiele:*

- $u(t)$ : Spannung über der (kontinuierlichen) Zeit $t$
- $d(n)$ : Börsenindex über der (diskreten) Wochennummer $n$
- $i(x, y)$ : Helligkeit eines Bildes über den (kontinuierlichen oder diskreten) Raumkoordinaten $x$ und $y$
- $p(x, y, z, t)$ : Schalldruck an den (kontinuierlichen) Raumkoordinaten $x$, $y$ und $z$ über der (kontinuierlichen) Zeit $t$

### *Anmerkung:*

Oftmals werden normierte Größen und Variablen, wie z.B.

$$u(t) = \frac{\text{Spannung zum Zeitpunkt } t \text{ Sekunden}}{1 \text{ Volt}},$$

verwendet. Dies ist zumeist hilfreich, aber nicht unbedingt notwendig. Wir werden hier in der Vorlesung normierte Signale verwenden.

## Klassifikation von Signalen – Teil 1

### *Kontinuierliche und diskrete Signale – Teil 1:*

- Kontinuierliche Signale:

  $v(t) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$

  (dabei gilt im Allgemeinen: $v \in \mathbb{C}$ )

- Diskrete Signale:

  $v(n) \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$

  (auch dabei gilt im Allgemeinen: $v \in \mathbb{C}$ )

$$v(n) \implies \ldots,\ v(-1),\ v(0),\ v(1),\ \ldots$$

*… ohne Zwischenwerte, (nummerierte) Zahlen-Folge!*

## Klassifikation von Signalen – Teil 2

### *Kontinuierliche und diskrete Signale – Teil 2:*

Diskrete Signale können (müssen aber nicht) durch (im Allgemeinen: äquidistante) ***Abtastung*** von kontinuierlichen Signalen entstanden sein. Zusammengenommen mit einer Diskretisierung der Amplitudenwerte nennt man das Analog-Digital-Wandlung:

- Ein normiertes, kontinuierliches Signal $\dfrac{v_{\text{kon}}(t)}{V_0}$
- wird mit der Abtastfrequenz $f_{\text{s}} = \dfrac{1}{T_{\text{s}}}$
- zu den Zeitpunkten $t_n = n\,T_{\text{s}}$
- äquidistant abgetastet. Es resultiert das folgende diskrete Signal

$$v(n) = \frac{v_{\text{kon}}(n\,T_{\text{s}})}{V_0} \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

***Eine genauere Beschreibung des Abtast-Vorgangs und seiner Auswirkungen gibt es in dieser Vorlesung gegen Ende des Semesters (Abschnitt Modulation).***

## Ein- und mehrdimensionale Signale

***Definition:***

Unter dem Begriff der ***Dimension*** (des Signalarguments) verstehen wir hier die Anzahl der unabhängigen Variablen (im Argument) des Signals.

Beispiele:

- Spannung $u(t)$ : eindimensionales Signal,
- Bildhelligkeit $i(x, y)$ : zweidimensionales Signal,
- Schalldruck $p(x, y, z, t)$ : vierdimensionales Signal.

***In dieser Vorlesung beschränken wir uns hauptsächlich auf eindimensionale Signale. Erweiterungen gibt es dann in vertiefenden Vorlesungen.***

## Signalvektoren

### *Definition:*

Unter einem ***vektoriellen Signal*** oder einem ***Signalvektor*** versteht man eine kompakte Schreibweise für mehrere, zusammen zu behandelnde Signale:

$$\boldsymbol{v}(\ldots) = \begin{bmatrix} v_0(\ldots) \\ v_1(\ldots) \\ \vdots \\ v_{L-1}(\ldots) \end{bmatrix} = \Big[v_0(\ldots),\, v_1(\ldots),\, \ldots,\, v_{L-1}(\ldots)\Big]^{\mathrm{T}}.$$

Beispiele:

- Alle Spannungen in einer Schaltung $\boldsymbol{u}(t) = \Big[u_0(t),\, u_1(t),\, \ldots,\, u_{L-1}(t)\Big]^{\mathrm{T}}$,
- Schallschnelle $\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = \Big[v_x(x,y,z,t),\, v_y(x,y,z,t),\, v_z(x,y,z,t)\Big]^{\mathrm{T}}$.

***In dieser Vorlesung werden wir Vektoren durch fetten Schriftsatz kennzeichnen. Neben dieser Schreibweise wird von anderen Autoren auch ein Unterstreichen oder ein Vektorsymbol über dem Signal verwendet.***

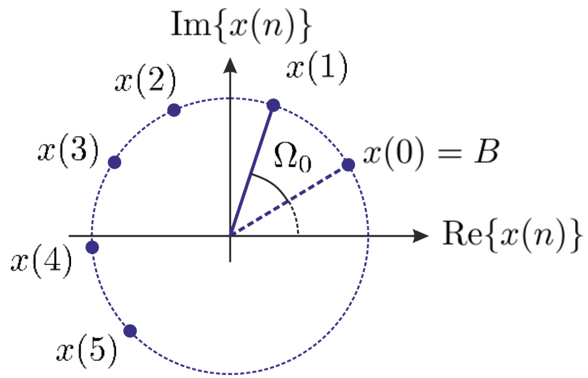
# Deterministische und stochastische Signale

## *Deterministische Signale:*

Es besteht ein funktionaler bzw. „handhabbarer" Zusammenhang zwischen den Signalargumenten $t$ bzw. $n$ und den Signalen $v(t)$ bzw. $v(n)$, d.h. $v(t)$ bzw. $v(n)$ sind ***determiniert***.

Beispiele:

- Sinus: $y(t) = A\,\sin(\omega_0 t + \phi),$
- Exponentialfunktion: $x(n) = B\,e^{j\Omega_0 n}.$




## *Stochastische Signale:*

Es besteht ein zufälliger bzw. „nicht handhabbarer" Zusammenhang zwischen den Signalargumenten $t$ bzw. $n$ und den Signalen $v(t)$ bzw. $v(n)$, d.h. $v(t)$ bzw. $v(n)$ sind ***stochastisch***.

Beispiele:

- Verstärker-Rauschen,
- Sprachsignale.

***In dieser Vorlesung werden wir uns zunächst auf deterministische Signale beschränken. Stochastische Signale werden (z.B.) in der Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 2" behandelt.***

## Periodische und aperiodische Signale

### *Definition:*

Unter dem Betriff ***Periodizität*** versteht man eine Signalwiederholung in festem Abstand, d.h. für kontinuierliche, periodische Signale gilt

$$v(t + \lambda T) = v(t), \qquad \text{mit } T \in \mathbb{R}$$

bzw. für periodische, diskrete Signale gilt

$$v(n + \lambda K) = v(n), \qquad \text{mit } K \in \mathbb{N}.$$

Dabei gilt stets $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $T$ bzw. $K$ wird als Periode des Signals bezeichnet.

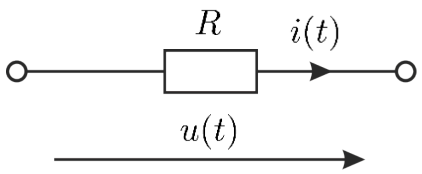
Als „Prototyp" eines periodischen Signals wird oftmals das (Co-) Sinus-Signal verwendet:

- Kontinuierlich: $u(t) = \hat{u}\,\cos(\omega_0 t + \phi), \qquad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- Diskret: $u(n) = \hat{u}\,\cos(\Omega_0 n + \phi), \qquad \text{mit } K = \frac{2\pi}{\Omega_0} \in \mathbb{N}$

Anmerkung: Das diskrete Sinus-Signal ist nicht notwendigerweise periodisch ($\Omega_0$ muss dafür so gewählt werden, dass $K$ rational wird)!

## Leistung und Energie – Teil 1

### *Physikalische / elektrische Leistung und Energie:*




Leistung: $$p(t) = u(t)\,i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t)\,R$$

Energie: $$w(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau$$

### *Verallgemeinerung bzw. Abstraktion für normierte Größen* $v(\ldots) \in \mathbb{C}$ *:*

Kontinuierlich:

- Leistung: $p_v(t) = \big|v(t)\big|^2$
- Energie: $w_v(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \big|v(\tau)\big|^2\,d\tau$

Diskret:

- Leistung: $p_v(n) = \big|v(n)\big|^2$
- Energie: $w_v(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} \big|v(\kappa)\big|^2$

## Leistung und Energie – Teil 2

### *Gesamtenergie:*

Kontinuierlich:

$$w_v(\infty) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \left|v(\tau)\right|^2 d\tau$$

Diskret:

$$w_v(\infty) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left|v(\kappa)\right|^2$$

### *Anmerkungen:*

- Signale, für die dieser Grenzwert existiert (und endlich ist), d.h.

  $$0 \leq w_v(\infty) < \infty,$$

  nennt man in der Literatur ***Energiesignale***.

- Die Summation in der Berechnung bei diskreten Signalen ist nicht als Näherung zu sehen! Solche Summen werden uns im Folgenden oft begegnen.

# Leistung und Energie – Teil 3

## *„Nicht-Energie"-Signale:*

Wenn der Grenzwert $w_v(\infty)$ nicht existiert, dann kann mit einer anderen Größe etwas über die „mittlere Wirkung" eines Signals ausgesagt werden.

## *Mittlere Leistung:*

Kontinuierlich:

$$\overline{p_v} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{\tau=-T}^{T}\left|v(\tau)\right|^2 d\tau\right]$$

Diskret:

$$\overline{p_v} = \lim_{K\to\infty}\left[\frac{1}{2K+1}\sum_{\kappa=-K}^{K}\left|v(\kappa)\right|^2\right]$$

Daraus wird für ***periodische Signale*** ($\overline{p_v}$ gibt die Energie pro Periode an):

$$\overline{p_v} = \frac{1}{T}\int_{\tau=t_0}^{t_0+T}\left|v(\tau)\right|^2 d\tau$$

$$\overline{p_v} = \frac{1}{K}\sum_{\kappa=k_0}^{k_0+K-1}\left|v(\kappa)\right|^2$$

Signale, für welche die oben genannten Grenzwerte existieren, heißen in der Literatur ***Leistungssignale***.

## Verständnisfragen

### *Partnerarbeit:*

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Nennen Sie mindestens zwei Beispiele für (nahezu) periodische Signale und für vektorielle, mehrdimensionale Signale (die auch praktisch vorkommen)!

  ........................................................................................................................................................

  ........................................................................................................................................................

- Nennen Sie Beispiele für periodisch und für nicht-periodisch abgetastete Signale!
  Wie würden Sie die „Abtastung“ mit eigenen Worten beschreiben?

  ........................................................................................................................................................

  ........................................................................................................................................................

- Warum sollte man Signale (und im folgenden auch Systeme) in „Klassen“ (periodisch, mit endlicher Energie, mittelwertfrei, etc.) einteilen?

  ........................................................................................................................................................

  ........................................................................................................................................................

## Abschließende Zusammenfassung

- Signale und Systeme – Einführung
  - Einführung und Begriffserklärung
  - ***Signale***
    - Grundlegendes
    - Klassifikation von Signalen
    - Ein- und mehrdimensionale Signale
    - Signalvektoren
    - Deterministische und stochastische Signale
    - Periodische und aperiodische Signale
    - Leistung und Energie
  - Systeme
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation

# Übersicht des nächsten Abschnitts

# Allgemeine Systembeschreibung – Teil 1

## *Allgemeines:*

Systeme werden

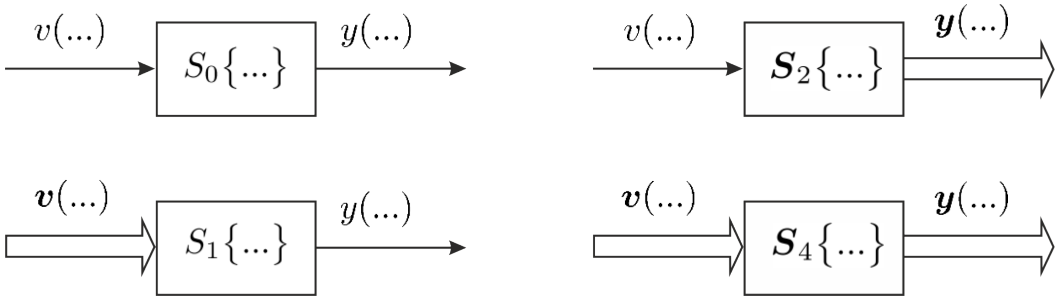
- durch Eingangs- bzw. Anregungssignale $\boldsymbol{v}(\dots)$ „angeregt“ und
- reagieren mit internen Signalen $\boldsymbol{x}(\dots)$,
- sowie mit Ausgangssignalen $\boldsymbol{y}(\dots)$.

## *Allgemeine Systembeschreibung durch den Systemoperator S{…}:*

Eingangs-Ausgang-Beschreibung: $\boldsymbol{y}(\dots) = \boldsymbol{S}\{\boldsymbol{v}(\dots)\}$

*Platzhalter für „t“ bzw. „n“*

- Beispiele mit skalaren bzw. vektoriellen Ein- bzw. Ausgängen:



# Allgemeine Systembeschreibung – Teil 2

## *Beschreibung mit Systemzuständen:*

Beschreibung des Systems mit Erfassung der „wesentlichen“ inneren Signale (zumeist Signale, die den Inhalt der [Energie-] Speicher im System kennzeichnen). Diese Signale werden

***Zustandsvariablen*** $x_i(...),\ i \in \{0,\ 1,\ ...,\ N-1\}$

genannt und sind üblicherweise im

***Zustandsvektor*** $\boldsymbol{x}(...) \ = \ \big[x_0(...),\ x_1(...),\ ...,\ x_{N-1}(...)\big]^{\mathrm{T}}$

zusammengefasst.

## *Allgemeine Zustandsbeschreibung:*

- Zustandsänderung = Funktion des „Ist“-Zustands und der Anregungssignale
- Ausgangssignal(e) = Funktion des „Ist“-Zustands und der Anregungssignale

# Allgemeine Systembeschreibung – Teil 3

## *Allgemeine Zustandsbeschreibung (Wiederholung):*

- Zustandsänderung = Funktion des „Ist“-Zustands und der Anregungssignale
- Ausgangssignal (e) = Funktion des „Ist“-Zustands und der Anregungssignale

Kontinuierlich:

- Zustandsgleichung(en):

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{v}(t)\big)$$

- Ausgangsgleichung(en):

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{v}(t)\big)$$

***Differential-gleichungssystem***

Diskret:

- Zustandsgleichung(en):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) - \boldsymbol{x}(n) &= \tilde{\boldsymbol{f}}\big(\boldsymbol{x}(n),\, \boldsymbol{v}(n)\big) \\ \boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(n),\, \boldsymbol{v}(n)\big) \end{aligned}$$

- Ausgangsgleichung(en):

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(n),\, \boldsymbol{v}(n)\big)$$

***Differenzen-gleichungssystem***

## Allgemeine Systembeschreibung – Teil 4

### *Beispiele für Zustandsvariablen:*

Elektrische Schaltungen / Netzwerke:

- Kapazitäten C (elektrische Felder): $w_{\mathrm{C}}(t) \sim C\, u_{\mathrm{C}}^2(t)$
- Induktivitäten L (magnetische Felder): $w_{\mathrm{L}}(t) \sim L\, i_{\mathrm{L}}^2(t)$

Zustandsvariable: Spannung an *C*, Strom in *L*

Mechanische Systeme:

- Federspannung, Fallhöhe, Bewegungsgeschwindigkeit einer Masse

Diskrete Systeme:

- Inhalte der Datenspeicher

***In dieser Vorlesung werden wir uns zunächst auf Eingangs-Ausgangs-Beschreibungen beschränken. Zustandsdarstellungen werden (z.B.) in der Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 2“ behandelt.***

## Kontinuierliche und diskrete Systeme

### *Klassifizierung:*

Man verwendet ***kontinuierliche*** Systembeschreibungen, wenn

- alle Eingangssignale,
- alle internen Signale und
- alle Ausgangssignale kontinuierlich sind.

Analog dazu gilt: es werden ***diskrete*** Systembeschreibungen verwendet, wenn

- alle Eingangssignale,
- alle internen Signale und
- alle Ausgangssignale diskret sind.

***Diskrete Systeme bzw. Operatoren berechnen Zahlenfolgen aus Zahlenfolgen, sind also als „Rechner" zu sehen. „Digital"-Rechner sind zusätzlich durch realisierbare Zahlendarstellungen mit endlich vielen Stufen (Bits) gekennzeichnet. Auf diese (Zeit- und) Wertdiskretisierung wird in der Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 2" eingegangen.***

## Ein- und mehrdimensionale Systeme

***Definition:***

Eindimensionale Systeme verarbeiten nur eindimensionale Signale. Sobald mehrdimensionale Signale involviert sind, nennt man auch die zugehörigen Systeme mehrdimensional.

***Im Rahmen der Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 1“ beschränken wir uns auf eindimensionale Systeme.***

## Deterministische und stochastische Systeme

### *Definition:*

Wenn der Systemoperator $S\{...\}$, d.h. die Struktur des Systems, und alle Systemparameter „festgelegt" sind, wird das System als ***deterministisch*** bezeichnet. Es reagiert auf determinierte Anregungen mit determinierten Ausgängen.

Unter dem Begriff „festgelegt" ist hier nicht konstant zu verstehen – es muss lediglich der zeitliche Verlauf der Parameter bzw. der Systemstruktur bekannt sein.

Wenn in $S\{...\}$ auch nur ein Detail stochastisch ist, dann wird das System als ***stochastisch*** bezeichnet.

Beispiele:

- Wackelkontakt,
- akustische Übertragungen (Kanäle),
- Mobilfunkkanäle (und sogar deren Modelle).

***In dieser Vorlesung (auch im Teil 2) werden wir uns auf deterministische Systeme beschränken.***

# Passivität, Ruhezustand, Verlustlosigkeit – Teil 1

## *Passivität:*

Ein System wird dann als ***passiv*** bezeichnet, wenn es keine „inneren Quellen“ und keine Verstärkungsfunktionen besitzt. Es kann daher nie, d.h. zu keinem Zeitpunkt $t$ bzw. $n$, mehr Energie abgeben als bisher aufgenommen wurde.

Für ein System mit einem Eingang $v(...)$ und einem Ausgang $y(...)$ gilt dann:

Kontinuierlich:

$$w_y(t) \;\leq\; w_v(t),\; \forall\, t,$$

Diskret:

$$w_y(n) \;\leq\; w_v(n),\; \forall\, n.$$

Analog dazu gilt für Systeme mit $L$ Eingängen

$$\boldsymbol{v}(...) \;=\; \big[v_0(...),\, v_1(...),\, ...,\, v_{L-1}(...)\big]^{\mathrm{T}}$$

und $R$ Ausgängen

$$\boldsymbol{y}(...) \;=\; \big[y_0(...),\, y_1(...),\, ...,\, y_{R-1}(...)\big]^{\mathrm{T}}$$

folgender Zusammenhang:

$$\sum_{r=0}^{R-1} w_{y_r}(...) \;\leq\; \sum_{l=0}^{L-1} w_{v_l}(...),\; \forall\, t, n.$$

## Passivität, Ruhezustand, Verlustlosigkeit – Teil 2

### *Folge der Passivität:*

Kontinuierlich:

- Wenn

$$v(t) \;=\; 0, \;\forall\, t \;\leq\; t_0,$$

gilt, dann folgt daraus auch

$$y(t) \;=\; 0, \;\forall\, t \;\leq\; t_0.$$

Diskret:

- Wenn

$$v(n) \;=\; 0, \;\forall\, t \;\leq\; n_0,$$

gilt, dann folgt daraus auch

$$y(n) \;=\; 0, \;\forall\, t \;\leq\; n_0.$$

Daraus folgt:

Ein ***passives*** System verharrt im „***Ruhezustand***“ .

# Passivität, Ruhezustand, Verlustlosigkeit – Teil 3

## *Verlustlosigkeit:*

Ein System wird als ***verlustlos*** bezeichnet, wenn alle aufgenommene Energie auch wieder (an den Systemausgängen) abgegeben wird. Formal bedeutet das

$$\sum_{r=0}^{R-1} w_{y_r}(\infty) = \sum_{l=0}^{L-1} w_{v_l}(\infty).$$

Oftmals wird Verlustlosigkeit in Kombination mit Passivität betrachtet bzw. verwendet („passive und verlustlose Systeme“). Gemeint ist dabei aber nicht ein System, in dem „verloren gegangene“ Energie wieder durch innere Quellen (evtl. in anderer Form) ersetzt wird!

## *Anmerkung:*

Die Bedingungen $w_y(t) \leq w_v(t), \forall t,$ bzw. $w_y(n) \leq w_v(n), \forall n,$ gelten nicht erst für $t \to \infty$ bzw. $n \to \infty$, sonst wäre kurzzeitig ein Energiegewinn erzielbar. Die Verlustlosigkeitsbedingung verwendet dagegen bewusst $t \to \infty$ bzw. $n \to \infty$, da hier nur gefordert wird, dass am Ende alle Energie wieder abgegeben wird.

# Dynamische und gedächtnislose Systeme

## *Dynamische Systeme:*

Ein System wird als ***dynamisch*** bezeichnet, wenn die Ausgangssignale $y_r(t_0)$ nicht nur von den Eingängen $v_l(t = t_0)$ zu den Zeitpunkten $t = t_0$, sondern auch von $t \neq t_0$ abhängen. Analog dazu gilt für diskrete Systeme, wenn $y_r(n_0)$ nicht nur von $v_l(n = n_0)$, sondern auch von $v_l(n \neq n_0)$ abhängt.

## *Folge:*

Das System muss außer den „aktuellen" Eingangssignalen auch Signalwerte zu anderen Zeiten $t$ bzw. $n$ kennen.
Das bedeutet, dass ein dynamisches System Speicher enthält, welche

- für $t < t_0$ bzw. $n < n_0$ Werte „links" von $t_0$ bzw. $n_0$ aufnehmen (Zeitdeutung: ***Vergangenheit***) und bzw. oder
- für $t > t_0$ bzw. $n > n_0$ Werte „rechts" von $t_0$ bzw. $n_0$ aufnehmen (Zeitdeutung: ***Zukunft***).

## *Gedächtnislose Systeme:*

Unabhängig vom Zeitbezug $t$ bzw. $n$ spricht man auch vom Gedächtnis des Systems. Nichtdynamische Systeme heißen daher ***gedächtnislose*** Systeme.

## Reell- und komplexwertige Systeme

***Definition:***

Wenn für $\boldsymbol{v}(\ldots)$ mit

$$v_l(\ldots) \in \mathbb{R} \quad \forall\, l, t, n$$

stets auch für $\boldsymbol{y}(\ldots)$ gilt

$$y_r(\ldots) \in \mathbb{R} \quad \forall\, r, t, n\,,$$

dann spricht man von einem ***reellwertigen*** System, sonst von einem ***komplexwertigen*** System.

Häufig werden „reale“ Systeme als reellwertige Systeme modelliert. Allerdings kann man oftmals durch komplexwertige Modelle deutliche Vereinfachungen (im Sinne von Rechenaufwandsreduktion, Speicherminimierung und Reduktion der „Rechenkomplexität“) erzielen. Speziell in Rechnern ist die komplexe Rechnung (Definition von Multiplizierer- und Addiererstrukturen bzw. –rechenvorschriften) sehr einfach zu realisieren.

## Kausale und nichtkausale Systeme – Teil 1

### *Definition:*

Ein System wird als ***kausal*** bezeichnet, wenn

| (kontinuierlich) | (diskret) |
|---|---|
| $\boldsymbol{y}(t_0)$ nur von $\boldsymbol{v}(t \leq t_0)$ | $\boldsymbol{y}(n_0)$ nur von $\boldsymbol{v}(n \leq n_0)$ |

abhängt, also von Werten „links“ von $t_0$ bzw. $n_0$ , d.h. nur von der ***Vergangenheit*** abhängt. Ein System wird als ***nicht-kausal*** bezeichnet, wenn dies nicht gilt.

Hängt ein System nur von den Werten „rechts“ von $t_0$ bzw. $n_0$ ab, d.h. nur von der ***Zukunft***, so wird es als ***anti-kausal*** bezeichnet.

### *Anmerkungen (Teil 1):*

- Dynamische, kausale Systeme haben ein Gedächtnis im „üblichen“ Sinn, d.h. sie greifen nur auf Informationen bzw. Signalabschnitte aus der Gegenwart und Vergangenheit zurück (nicht auf zukünftige Signale).

## Kausale und nichtkausale Systeme – Teil 2

### *Anmerkungen (Teil 2):*

- ***Passive Systeme*** sind aufgrund der Definition und der Folgebedingung auch kausal. Aber nicht jedes kausale System ist auch passiv!
- Häufig findet man die Vorstellung, dass ***reale Systeme*** auch kausal sein müssen (erst die Anregung bzw. Ursache, dann die Reaktion bzw. Wirkung). Das stimmt im Generellen nur bedingt, d.h. bei einem sog. Echtzeitbezug. Wird dieser nicht mehr gefordert (z.B. rückwärts laufendes Tonband oder Bildfilterungen in positiver und negativer x- bzw. y-Richtung), so kommt Nichtkausalität auch in realen, technischen Systemen vor.
- Gelegentlich werden auch Signale (nicht Systeme) als kausal bzw. nicht- oder anti-kausal bezeichnet. Eine bessere Bezeichnung hierfür, die wir auch in dieser und im Teil 2 dieser Vorlesung verwenden werden, sind ***rechtsseitige***, ***linksseitige***, bzw. ***zweiseitige*** Signale.

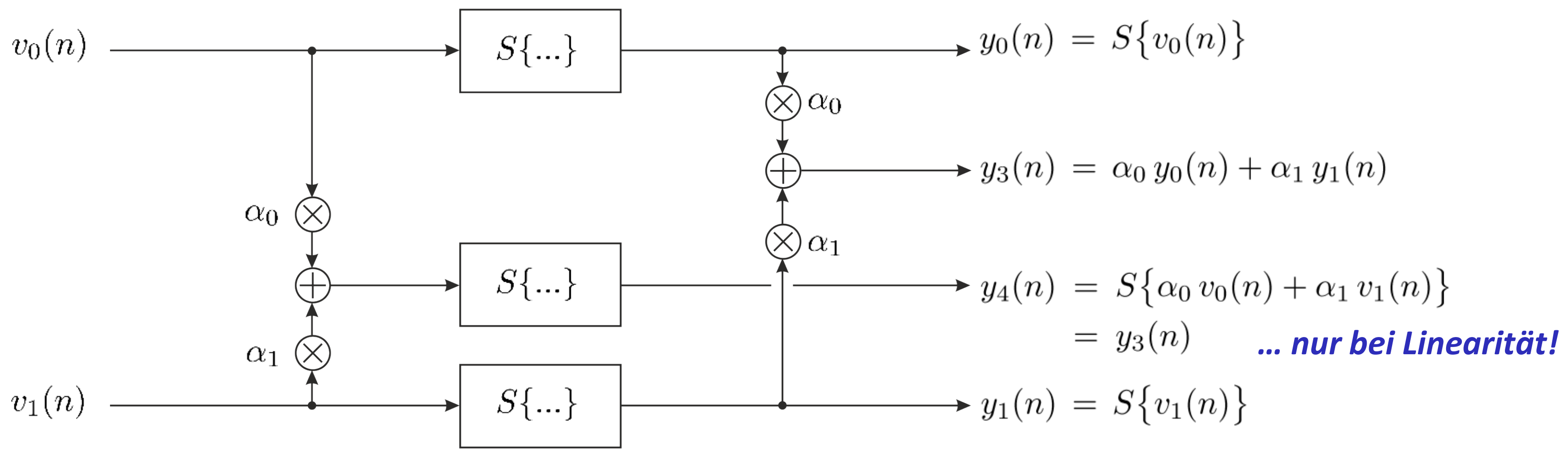
## Lineare und nichtlineare Systeme – Teil 1

### *Definition:*

Lineare Systeme sind definiert durch die Gültigkeit des ***Überlagerungssatzes***:

$$S\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l \, v_l(\ldots)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l \, S\Big\{v_l(\ldots)\Big\}.$$

Veranschaulichung für diskrete Systeme:



# Lineare und nichtlineare Systeme – Teil 2

## *Anmerkungen :*

- Für nichtlineare Systeme gilt der Überlagerungssatz nicht!
- Nichtlinearität kann durchaus erwünscht sein (z.B. Gitarrenverstärker, Audioeffekte, usw.).
- Lineare Systeme sind sehr wichtig,
  - obwohl viele ***reale Systeme nichtlinear*** sind,
  - weil es hierfür eine ***weitreichende allgemeine Theorie*** gibt und
  - weil sich nichtlineare Systeme oft ***approximativ*** (Modellierung) linearisieren lassen (z.B. Transistor im „Arbeitspunkt“).
- Nichtlinearität führt u. U. zu gewissen Effekten. Dies sind aber Symptome der fehlenden Linearität – Ursache ist die Ungültigkeit des Überlagerungssatzes.

# Verschiebungsinvariante und verschiebungsvariante Systeme – Teil 1

## *Definition:*

Ein System wird dann als ***verschiebungsinvariant*** bezeichnet, wenn es in der Reihenfolge der Anordnung mit einer Signalverschiebung vertauscht werden darf. Dies bedeutet …

… im Kontinuierlichen:

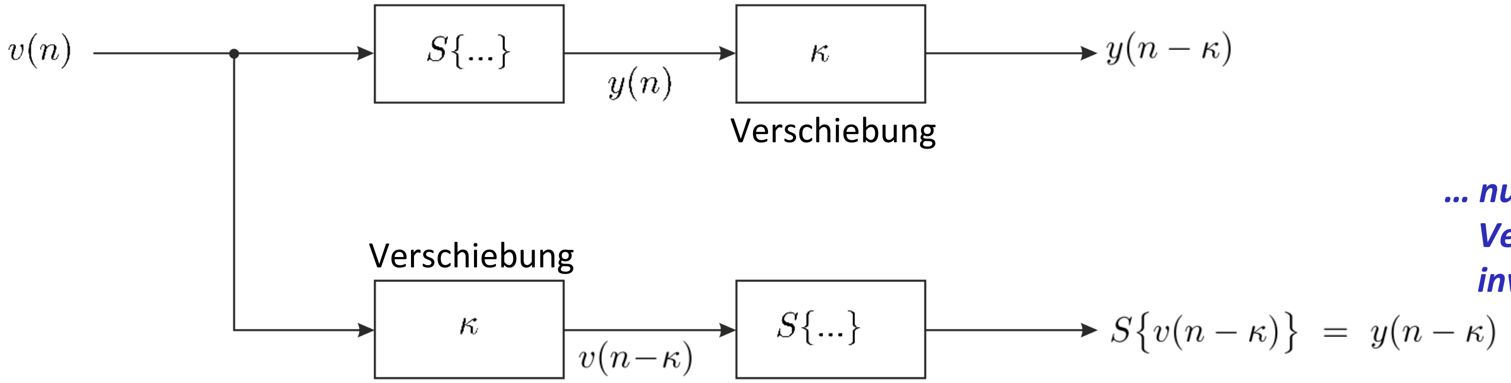
$$S\{\boldsymbol{v}(t-\tau)\} \;=\; \boldsymbol{y}(t-\tau).$$

… im Diskreten:

$$S\{\boldsymbol{v}(n-\kappa)\} \;=\; \boldsymbol{y}(n-\kappa).$$

***Verschiebungsvariante*** Systeme erfüllen die o.g. Bedingungen nicht!

Veranschaulichung für diskrete Systeme:




***… nur bei Verschiebungs-invarianz!***

# Verschiebungsinvariante und verschiebungsvariante Systeme – Teil 2

***Anmerkungen :***

- Bei Zeitbezug im Argument der Signale spricht man auch von ***Zeitvarianz*** bzw. ***Zeitinvarianz***.
- ***Reale Systeme*** sind häufig nicht (streng) verschiebungsinvariant / zeitinvariant (z.B. aufgrund von Alterung). Solche Systeme können aber näherungsweise als verschiebungsinvariant angesehen werden.
- Für verschiebungsinvariante Systeme reicht die „allgemeine“ Systemtheorie weiter, insbesondere für lineare, verschiebungsinvariante Systeme. Diese werden im Englischen *linear time-invariant systems* (***LTI-Systeme***) genannt.
- Verschiebungsinvarianz ist ***unabhängig von Linearität***. Daher wurden in der Beispielanordnung auf den Linearitätsfolien drei parallele Systeme gleichzeitig angeordnet.
- Verschiebungsvarianz erzeugt u. U. ähnliche Effekte/Symptome wie Nichtlinearität.
- Verschiebungsvarianz kann sehr wohl auch erwünscht sein.

## Stabilität

### *Definition:*

Ein System, das auf beschränkte Eingangssignale mit beschränkten Ausgangssignalen reagiert, wird als ***stabil*** bezeichnet. Im Englischen wird dies als *bounded input / bounded output* bezeichnet. Hieraus resultiert der Begriff der ***BIBO-Stabilität***.

Für Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang bedeutet das …

… im Kontinuierlichen:

- Für $\big|v(t)\big| \leq M_1 < \infty,\ \forall\, t$
  muss gelten: $\big|y(t)\big| \leq M_2 < \infty,\ \forall\, t.$

… im Diskreten:

- Für $\big|v(n)\big| \leq M_1 < \infty,\ \forall\, n$
  muss gelten: $\big|y(n)\big| \leq M_2 < \infty,\ \forall\, n.$

Für Systeme mit L Eingängen und R Ausgängen muss dann analog …

… im Kontinuierlichen gelten:

- Für $\big|v_l(t)\big| \leq M_1 < \infty,\ \forall\, t, l$
  muss gelten:
  $$\big|y_r(t)\big| \leq M_2 < \infty,\ \forall\, t, r.$$

… im Diskreten gelten:

- Für $\big|v_l(n)\big| \leq M_1 < \infty,\ \forall\, n, l$
  muss gelten:
  $$\big|y_r(n)\big| \leq M_2 < \infty,\ \forall\, n, r.$$

## Verständnisfragen

### *Partnerarbeit:*

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie prüfen Sie, ob ein System linear ist? Was können Sie über die Linearität folgender Systeme aussagen:
  $y(t) = a\,v(t) + b\,v(t-t_0)$ bzw. $y(n) = a\,v(n-n_0) + b$?

  ..........................................................................................................................................................

  ..........................................................................................................................................................

- Was können Sie über die Verschiebungsinvaranz der Systeme $y(t) = a\,v(t-t_0)$ bzw. $y(n) = a\,v^2(n)$ aussagen?

  ..........................................................................................................................................................

  ..........................................................................................................................................................

- Welche (verschiedenen) Bedeutungen ordnen Sie dem Begriff Dynamik bzw. Systemdynamik zu?
  Welche wollen wir hier in der Vorlesung verwenden?

  ..........................................................................................................................................................

  ..........................................................................................................................................................

## Abschließende Zusammenfassung