

Signale und Systeme – Spektraldarstellungen determinierter Signale (Teil 1)

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht – Teil 1

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
 - ❑ Einführung und Begriffsklärung
 - ❑ Signale
 - ❑ Systeme

- ❑ Signale
 - ❑ Elementarsignale
 - ❑ Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
 - ❑ Signalzerlegung in Elementarsignale

- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ Fourier-Reihe, Diskrete Fourier-Transformation
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ Laplace- und z-Transformation



Gesamtübersicht – Teil 2

□ Lineare Systeme

- Reaktionen auf Elementarsignale
- Reaktionen auf beliebige Signale
- Zusammenhänge zwischen Systemkenngrößen
- Stabilität linearer Systeme
- Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

□ Modulation

- Grundlagen
- Lineare Modulation- und Demodulationsverfahren
- Abtasttheorem

Übersicht des nächsten Abschnitts

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ **Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation**
 - ❑ Fourier-Reihe: Definition und Begriffsklärung
 - ❑ Fourier-Reihe: Berechnung der Koeffizienten
 - ❑ Fourier-Reihe: Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung
 - ❑ Diskrete Fourier-Transformation: Definition und Begriffsklärung
 - ❑ Diskrete Fourier-Transformation: Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung
 - ❑ Eigenschaften und Sätze
 - ❑ Beispiele
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ Laplace- und z-Transformation
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation

Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Reihe: Definition und Begriffsklärung – Teil 1

Definition:

□ Eine **Fourier-Reihe** ist folgendermaßen **definiert**:

$$v(t) = \underbrace{\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}}_{\text{Summe (lineare Überlagerung)}} \underbrace{c_{\mu}}_{\text{Gewichte (komplexe Amplituden)}} \underbrace{e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}}_{\text{Anteile der Form } e^{j\omega t}}$$

Anmerkungen – Teil 1:

□ Das **Einsetzen** von $t \rightarrow t + \lambda T$ in die oben genannte Definition ergibt:

$$\begin{aligned} v(t + \lambda T) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} (t + \lambda T)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} \lambda T} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \underbrace{e^{j\mu 2\pi \lambda}}_{=1} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \\ &= v(t). \end{aligned}$$

Anmerkungen – Teil 2:

□ Aus der Periodizitätsbeziehung ergibt sich,

□ dass die Darstellung $\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$ geeignet ist für T -periodische Signale.

□ Allerdings kann diese Darstellung auch für Signale mit endlicher Länge T verwendet werden.

Ein endlich langes Signal kann „in Gedanken“ T -periodisch wiederholt werden. Dann kann $v(t)$ durch die o.g. Fourier-Reihe überall – und damit insbesondere auch in einer Periode, die gerade die Gesamtlänge des Signals darstellt – beschrieben werden.

Eigenschaften von Fourier-Reihen:

- Der Summenausdruck $\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$ ist grundsätzlich ***T-periodisch***.
- Es gibt ∞ ***viele*** (aber ***abzählbare***) Spektralanteile bei den
 - Frequenzen $\omega := \omega_{\mu} = \mu \frac{2\pi}{T}$, d.h. bei
 - ***Vielfachen*** (Harmonischen, Oberwellen)
 - der ***Grundfrequenz*** $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1$ mit $f_1 = \frac{1}{T}$, d.h.
 - einzelne, abzählbare (diskrete) Frequenzkomponenten.
- Man spricht dabei von einem ***Linienspektrum***.

Fourier-Reihe: Berechnung der Koeffizienten – Teil 1

Gesucht:

- Es müssen nun noch die Koeffizienten c_μ , d.h. geeignete Gewichte, bestimmt werden.
- Diese Gewichtskoeffizienten können durch folgenden Ansatz berechnet werden:
 - Definition eines Approximationsproblems,
 - Definition eines geeigneten Optimierungskriteriums für das Approximationsproblem,
 - Lösung des Problems.

Definition des Approximationsproblems:

- Gegeben sei folgende **endliche** trigonometrische Reihe:

$$g_k(t) = \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}.$$

Diese soll die Funktion $v(t)$ „möglichst gut“ approximieren.

Fourier-Reihe: Berechnung der Koeffizienten – Teil 2

Definition einer Optimierungsfunktion für das Approximationsproblem:

- Für die Approximation soll folgende Kostenfunktion minimiert werden:

$$\epsilon_k = \int_{t=t_0}^{t_0+T} |g_k(t) - v(t)|^2 dt \xrightarrow{c_\mu = c_{\mu, \text{opt}}} \min.$$

Hierbei wird über eine Signalperiode mit beliebigem Startwert integriert.

Lösen des Approximationsproblems – Teil 1:

- Minimierung bezüglich der freien Variablen c_μ :

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial c_\nu} = 0, \quad \text{für } \nu \in \{-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}.$$

... $2n + 1$ Gleichungen zur Bestimmung der $2n + 1$ Koeffizienten.

Wichtiger Zusammenhang, der demnächst immer wieder Verwendung finden wird (Teil 1):

- Integral über eine Periode einer harmonischen Schwingung:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(\nu-\mu)\frac{2\pi}{T}t} dt.$$

Hierbei sollte unterschieden werden, ob das Argument der Exponentialfunktion Null ist oder nicht:

- Fall 1 ($\mu = \nu$):

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(\nu-\mu)\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{e^{j0\frac{2\pi}{T}t}}_{=1} dt = \frac{1}{T} T = 1, \quad \text{für } \mu = \nu.$$

- Fall 2 ($\mu \neq \nu$):

Die Exponentialfunktion kann in Real- und Imaginärteil aufgeteilt werden:

$$e^{j(\nu-\mu)\frac{2\pi}{T}t} = \cos\left((\nu-\mu)\frac{2\pi}{T}t\right) + j \sin\left((\nu-\mu)\frac{2\pi}{T}t\right).$$

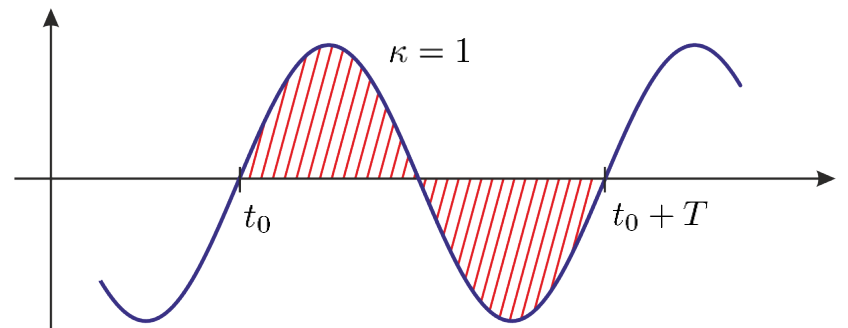
Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Reihe: Berechnung der Koeffizienten – Teil 4

Wichtiger Zusammenhang, der demnächst immer wieder Verwendung finden wird (Teil 2):

- Das Integral über eine (oder mehrere) Periode(n) einer harmonischen Schwingung ist Null:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T} \cos\left(\kappa \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(\kappa \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\ &= 0 \quad \forall \kappa \neq 0. \end{aligned}$$



- Zusammengefasst mit den vorherigen Überlegungen gilt daher

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(\nu-\mu)\frac{2\pi}{T}t} dt = \begin{cases} 1, & \text{für } \mu = \nu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösen des Approximationsproblems – Teil 2:

- Minimierung bezüglich der freien Variablen c_μ :

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial c_\nu} = 0, \quad \text{für } \nu \in \{-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}.$$

... Lösung für reelle Signale an der Tafel ...

Allgemeine Lösung für komplexwertige Signale (ähnliche Rechnung):

$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Fourier-Reihen-Koeffizienten

Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Reihe: Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung – Teil 1

Fehlerbetrachtung:

- Mit der zuvor bestimmten Wahl für die Koeffizienten c_μ wird die endliche Reihe für **jede** Wahl von k eine im quadratischen Sinne optimale Approximation des Signals $v(t)$.
- Der verbleibende quadratische Fehler bestimmt sich dabei gemäß:

$$\epsilon_k = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} \left| v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right|^2 dt.$$

- Wie wir in Kürze sehen werden, kann man diese Form wie folgt vereinfachen:

$$\epsilon_k = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt}_{=\bar{p}_v} - \sum_{\mu=-k}^k |c_\mu|^2.$$

- Da der minimale quadratische Fehler stets größer oder gleich Null sein muss ($\epsilon_k \geq 0$), folgt daraus

$$\bar{p}_v = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt \geq \sum_{\mu=-k}^k |c_\mu|^2.$$

← *Man nennt dies die „Bessel-Ungleichung“.*

Anmerkungen:

- Durch Hinzunehmen weiterer Reihenglieder (d.h. durch Vergrößern von k) kann der Fehler ϵ_k nicht zunehmen!
- Man kann zeigen, dass gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0.$$

Daraus folgt dann:

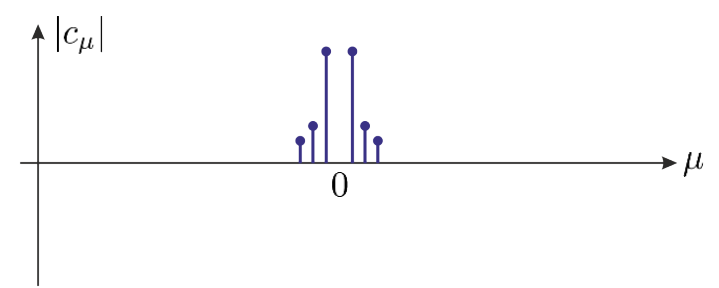
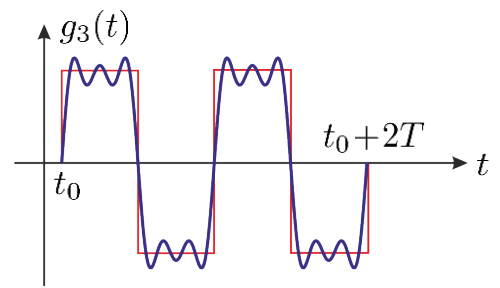
$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} = v(t).$$

- Diese „Konvergenz“ der Fourier-Reihe gilt allerdings nur „fast überall“. Bei Unstetigkeitsstellen (selbst bei $k \rightarrow \infty$) gilt dies nicht. Hier verbleiben Fehler (auch für $k \rightarrow \infty$) in einzelnen Punkten. Dieser Effekt heißt **Gibbs'sches Phänomen**.
- Für $n \rightarrow \infty$ wird aus der Bessel-Ungleichung die **Parseval'sche Gleichung** der Fourier-Reihe:

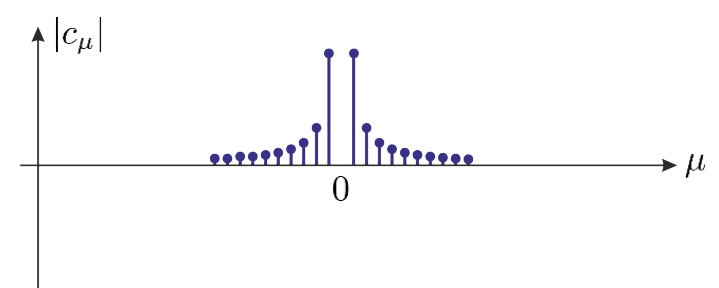
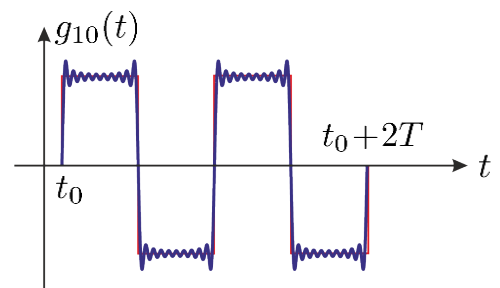
$$\bar{p}_v = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |c_{\mu}|^2.$$

Beispiel zum Gibbs'schen Phänomen:

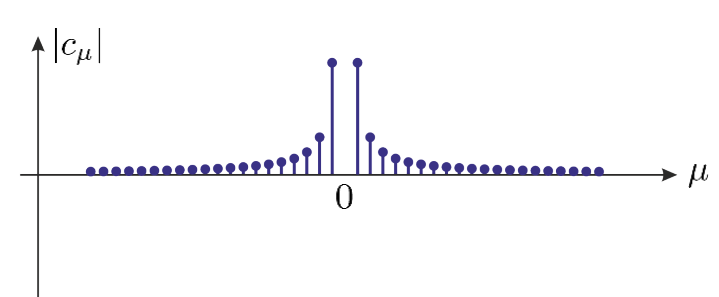
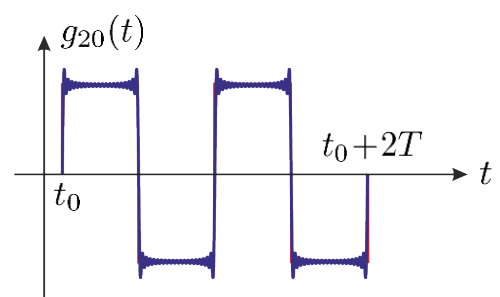
Approximation einer periodischen Rechteckschwingung mit 6 Exponentialfunktionen.



Approximation einer periodischen Rechteckschwingung mit 20 Exponentialfunktionen.



Approximation einer periodischen Rechteckschwingung mit 40 Exponentialfunktionen.



Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Reihe: Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung – Teil 4

Nachtrag – Teil 1:

- Herleitung des folgenden Zusammenhangs:

$$\epsilon_k = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} \left| v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt - \sum_{\mu=-k}^k |c_\mu|^2.$$

- Hierzu wird zunächst das Betragsquadrat umgeschrieben:

$$\frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} \left| v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} \left[v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right] \left[v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right]^* dt.$$

- Durch Ausmultiplizieren der beiden Terme in Klammern ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} \left| v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt - \sum_{\mu=-k}^k \overbrace{c_\mu}^{\overbrace{c_\mu}^*} \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &\quad - \underbrace{\sum_{\mu=-k}^k c_\mu \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} v^*(t) e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt}_{c_\mu^*} + \sum_{\mu=-k}^k \sum_{\nu=-k}^k c_\mu c_\nu^* \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} e^{j(\mu-\nu) \frac{2\pi}{T} t} dt. \end{aligned}$$

Nachtrag – Teil 2:

□ Setzt man die Ergebnisse der letzten Folie ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left| v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt - \sum_{\mu=-k}^k c_{\mu}^* c_{\mu} \\ &\quad - \sum_{\mu=-k}^k c_{\mu} c_{\mu}^* + \sum_{\mu=-k}^k \sum_{\nu=-k}^k c_{\mu} c_{\nu}^* \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(\mu-\nu) \frac{2\pi}{T} t} dt}_{= \begin{cases} 1, & \text{falls } \mu = \nu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}} \end{aligned}$$

□ Zusammen ergibt dies:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left| v(t) - \sum_{\mu=-k}^k c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt - \sum_{\mu=-k}^k |c_{\mu}|^2 - \sum_{\mu=-k}^k |c_{\mu}|^2 + \sum_{\mu=-k}^k |c_{\mu}|^2 \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 dt - \sum_{\mu=-k}^k |c_{\mu}|^2. \end{aligned}$$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Warum kann es sinnvoll sein, ein periodisches Signal in einzelne Exponentialschwingungen zu zerlegen?

.....
.....

- Wie muss ein Signal beschaffen sein, damit das Gibb'sche Phänomen möglichst nicht auftritt?

.....
.....

- Welche Besonderheit weisen periodische Signale im Spektrum auf?

.....
.....

Diskrete Fourier-Transformation:

- Analog zur Fourier-Reihe für kontinuierliche Signale ist die Diskrete Fourier-Transformation als Fourier-Reihe für periodische (bzw. endlich lange) diskrete Signale definiert:

$$v(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}, \quad \text{für } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

mit den Koeffizienten

Inverse Diskrete Fourier-Transformation (inverse DFT, IDFT)

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}, \quad \text{für } \mu \in \{0, 1, \dots, M-1\}.$$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Anmerkungen – Teil 1:

- Das Intervall $n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ kann auch anders gewählt werden. Wichtig ist, dass über eine volle Signalperiode summiert wird:

$$n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + M - 1\}.$$

Anmerkungen – Teil 2:

- Die inverse Diskrete Fourier-Transformation führt auf diskrete Signale mit einer Periode M :

$$v(n + \lambda M) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M}(n+\lambda M)} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M}n} \underbrace{e^{j\mu 2\pi\lambda}}_{=1} = v(n).$$

Das heißt: auch diese Darstellung ist geeignet für M -periodische (diskrete) Signale. Wie im kontinuierlichen Pendant kann man die Darstellung allerdings auch für Signale mit einer endlichen Länge M verwenden (hierbei ergänzt man das Signal „virtuell“ so, dass es periodisch wird).

Eigenschaften der inversen Diskreten Fourier-Transformation:

- Der Summenausdruck (inverse DFT) ist grundsätzlich M -**periodisch** (siehe oben).
- Es gibt **endlich viele** (nämlich M) **Spektralkomponenten** bei den
 - Frequenzen $\Omega := \Omega_\mu = \mu \frac{2\pi}{M}$, d.h. bei
 - Vielfachen der **Grundfrequenz** $\Omega_1 = \frac{2\pi}{M}$.
- Es entstehen einzelne, diskrete Frequenzkomponenten: dies wird **Linienpektrum** genannt.

Diskrete Fourier-Transformation: Definition und Begriffsklärung – Teil 3

Eigenschaften des Spektrums:

- Das Einsetzen von $\mu := \mu + \lambda M$ in die Definitionsgleichung der Diskreten Fourier-Transformation ergibt:

$$V_M(\mu + \lambda M) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j(\mu + \lambda M)\frac{2\pi}{M}n} = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n} \underbrace{e^{-j\lambda 2\pi n}}_{=1} = V_M(\mu).$$

- Das Spektrum $V_M(\mu)$ ist grundsätzlich M -periodisch, aber man kann es äquivalent auch als endlich breit mit der Breite M auffassen:

- Frequenzbereichs-Breite:

$$\mu \in \left\{0, 1, \dots, M-1\right\} \longrightarrow \Omega_\mu \in \left\{0, \frac{2\pi}{M}, \dots, 2\pi - \frac{2\pi}{M}\right\}$$

mit periodischer Wiederholung unterhalb von $\Omega < \Omega_0 = 0$ und oberhalb von $\Omega > \Omega_{M-1} = 2\pi - 2\pi/M$.

- Die Herleitung von $V_M(\mu)$ gemäß der Definition der Diskreten Fourier-Transformation kann analog zur Fourier-Reihe als Approximationsaufgabe angesehen (bzw. durchgeführt) werden.

Fehlerbetrachtung – Teil 1:

- Definition einer **endlichen trigonometrischen Reihe**:

$$g_k(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{k-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}, \quad \text{mit } k < M.$$

- Hiermit kann eine Folge $g_k(n)$ der Periodendauer M (oder der Länge M) durch eine trigonometrische Reihe **approximiert** werden. Hierbei wird – ähnlich wie im Kontinuierlichen – folgende **Funktion minimiert**:

$$\epsilon_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left| g_k(n) - v(n) \right|^2 \longrightarrow \min.$$

- Die **Lösung dieses Approximationsproblems** geschieht ähnlich wie im vorherigen Abschnitt durch Verwendung von

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial V_M(\nu)} = 0$$

und führt auf die (zuvor schon genannte) Lösung:

$$V_M(\nu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\nu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Fehlerbetrachtung – Teil 2:

- Man kann zeigen, dass $g_k(n)$ für jedes $k \leq M$ eine **optimale Approximation** im Sinne einer Minimierung des quadratischen Betragsfehlers darstellt.
- Der **verbleibende quadratische Fehler** kann ähnlich wie im kontinuierlichen Fall wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |g_k(n) - v(n)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |v(n)|^2 - \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |g_k(n)|^2 \\ &= \bar{p}_v - \bar{p}_{g_k} \\ &= \bar{p}_v - \frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{k-1} |V_M(\mu)|^2. \end{aligned}$$

- Da die Fehlerfunktion stets größer oder gleich Null sein muss, folgt daraus wieder die **Bessel'sche Ungleichung**:

$$\bar{p}_v = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |v(n)|^2 \geq \frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{k-1} |V_M(\mu)|^2.$$

Diese gilt aber nur für $k \leq M$.

Fehlerbetrachtung – Teil 3:

□ Man kann weiter zeigen, dass für $k = M$ die Fehlerfunktion Null wird, d. h. es gilt

$$\bar{p}_v = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |v(n)|^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{M-1} |V_M(\mu)|^2.$$

← *Dies ist wieder die Parseval'sche Gleichung. Dies bedeutet, dass man die mittlere Leistung eines periodischen Signals bzw. die Energie eines endlichen Signals entweder im Zeitbereich oder im Frequenzbereich bestimmen kann.*

Dies kann man zeigen, in dem man – z.B. – die Definitionsgleichungen

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

in die Summe

$$\frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{M-1} |V_M(\mu)|^2$$

einsetzt.

Beweis der Parseval'schen Gleichung für periodische diskrete Signale – Teil 1:

- Für den Beweis (sowie für zahlreiche Herleitungen in der zeitdiskreten Signalverarbeitung) spielt folgende endliche Reihe eine wichtige Rolle:

$$\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jk \frac{2\pi}{M} n}.$$

- Sollte k ein ganzzahliges Vielfaches von M sein, d.h. es gilt $k \bmod M \equiv 0$ bzw. $k = \kappa M$, dann kann diese Summe wie folgt berechnet werden:

$$\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jk \frac{2\pi}{M} n} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{e^{j\kappa M \frac{2\pi}{M} n}}_{=1} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} 1 = 1.$$

- Für die anderen Fälle hat die Reihe folgende Form

$$\sum_{n=0}^{M-1} a^n = \frac{1 - a^M}{1 - a}.$$

Beweis der Parseval'schen Gleichung für periodische diskrete Signale – Teil 2:

□ Setzt man nun für $a = e^{jk \frac{2\pi}{M}}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jk \frac{2\pi}{M} n} = \frac{1}{M} \frac{1 - \overbrace{e^{jk \frac{2\pi}{M} M}}^{=1}}{1 - e^{jk \frac{2\pi}{M}}} = 0 \quad (\text{für } k \bmod M \neq 0).$$

□ Zusammengefasst ergibt sich:

$$\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jk \frac{2\pi}{M} n} = \begin{cases} 1, & \text{für } k \bmod M \equiv 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis der Parseval'schen Gleichung für periodische diskrete Signale – Teil 3:

□ Behauptung:

$$\frac{1}{M^2} \sum_{\mu=0}^{M-1} \left| V_M(\mu) \right|^2 = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left| v(n) \right|^2.$$

□ Beweis an der Tafel ...

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie viele Spektralanteile benötigt man um eine periodische, reelle Folge mit einer Periodendauer von 16 Takten zu beschreiben?

.....
.....

- Wie kann man „vorgehen“, wenn man die DFT für nicht-periodische Folgen anwenden will?

.....
.....

- Wie können Sie die mittlere Leistung eines periodischen Signals aus dessen Spektrum bestimmen?

.....
.....

Diskrete Fourier-Transformation: Transformationssymbole

Übliche Transformationssymbole:

- In der Literatur werden für die Umrechnung vom Zeit- in den Frequenzbereich oftmals spezielle Symbole verwendet. Üblich sind dabei folgende Schreibweisen (viele der hier genannten Transformationen werden wir erst noch behandeln):

- Kontinuierliche Fourier-Transformation: $v(t) \circ\text{---} V(j\omega)$
- Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale: $v(n) \circ\text{---} V(e^{j\Omega})$
- Diskrete Fourier-Transformation der Länge M: $v(n) \text{---} \frac{1}{M} V_M(\mu)$
- Z-Transformation: $v(n) \circ\text{---}\bullet V(z)$
- Laplace-Transformation: $v(t) \circ\text{---}\bullet V(s)$

- Wir werden hier lediglich ein Symbol verwenden. Der leere Kreis beschreibt dabei den Zeitbereich, der ausgefüllte Bereich den Frequenz- bzw. Bildbereich, also z.B.

$$v(n) \circ\text{---}\bullet V_M(\mu)$$

oder

$$c_\mu \bullet\text{---}\circ v(t).$$

Linearität – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v_{1,2}(t) = v_{1,2}(t + \lambda T).$$

Hierzu sind die Fourier-Reihen-Koeffizienten $c_{1,2\mu}$ bekannt. **Gesucht** sind nun die Fourier-Reihen-Koeffizienten des Signals

$$v(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t),$$

d.h. der gewichteten Summe beider Signale:

$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t)] e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v_{1,2}(n) = v_{1,2}(n + \lambda M).$$

Hierzu sind die einzelnen Diskreten Fourier-Transformierten $V_{1,2M}(\mu)$ bekannt.

Gesucht sind nun die Diskreten Fourier-Transformationen der Folge

$$v(n) = \alpha_1 v_1(n) + \alpha_2 v_2(n),$$

d.h. der gewichteten Summe beider Folgen:

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} [\alpha_1 v_1(n) + \alpha_2 v_2(n)] e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Linearität – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

Durch Umformen erhält man:

$$\begin{aligned}
 c_\mu &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t)] e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &= \alpha_1 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_1(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &\quad + \alpha_2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_2(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &= \alpha_1 c_{1\mu} + \alpha_2 c_{2\mu}.
 \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

Durch Umformen erhält man:

$$\begin{aligned}
 V_M(\mu) &= \sum_{n=0}^{M-1} [\alpha_1 v_1(n) + \alpha_2 v_2(n)] e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \\
 &= \alpha_1 \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \\
 &\quad + \alpha_2 \sum_{n=0}^{M-1} v_2(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \\
 &= \alpha_1 V_{1M}(\mu) + \alpha_2 V_{2M}(\mu).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt: Sowohl die Fourier-Reihen-Entwicklung als auch die DFT und die IDFT sind lineare Operatoren (im gleichen Sinne, wie lineare Systeme definiert wurden).

Verschiebung – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \circ \text{---} \bullet c_\mu.$$

Hierzu wird eine **verschobene Signalvariante** gemäß

$$v_1(t) = v(t - t_0)$$

definiert. **Gesucht** ist nun die zugehörige Fourier-Reihe (in Abhängigkeit von c_μ):

$$c_{1\mu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_1(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \circ \text{---} \bullet V_M(\mu).$$

Hierzu wird eine **verschobene Folgenvariante** gemäß

$$v_1(n) = v(n - n_0)$$

definiert. **Gesucht** ist nun die zugehörige Spektraldarstellung (in Abhängigkeit von $V_M(\mu)$):

$$V_{1M}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 4

Verschiebung – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

Einsetzen ergibt:

$$c_{1\mu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t - t_0) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Substituiert man $t - t_0 := x$, d.h. es gilt $t := x + t_0$ und $dt = dx$, dann erhält man:

$$\begin{aligned} c_{1\mu} &= \frac{1}{T} \int_{x=0}^T v(x) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} x} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_0} dx \\ &= e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_0} \underbrace{\frac{1}{T} \int_{x=0}^T v(x) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} x} dx}_{= c_\mu} \\ &= e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_0} c_\mu \end{aligned}$$

Gilt, weil über eine volle Periode integriert bzw. summiert wird!

□ Für diskrete Signale:

Einsetzen ergibt:

$$V_{1M}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n - n_0) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Substituiert man $n - n_0 := k$, d.h. es gilt für die Summationsgrenzen

$k = -n_0, \dots, M - 1 - n_0$, dann erhält man:

$$\begin{aligned} V_{1M}(\mu) &= \sum_{k=-n_0}^{M-1-n_0} v(k) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} k} e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0} \\ &= e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0} \underbrace{\sum_{k=-n_0}^{M-1-n_0} v(k) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} k}}_{= V_M(\mu)} \\ &= e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0} V_M(\mu). \end{aligned}$$

Verschiebung – Teil 3:

□ Für kontinuierliche Signale:

Zusammengefasst ergibt sich:

$$v(t - t_0) \circ \bullet c_\mu e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_0}.$$

□ Für diskrete Signale:

Zusammengefasst ergibt sich:

$$v(n - n_0) \circ \bullet V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0}.$$

Daraus folgt: Eine Verschiebung im Zeitbereich bewirkt bei periodischen Signalen bzw. Folgen eine Multiplikation mit einem komplexen Drehfaktor im Spektralbereich.

□ Anmerkungen – Teil 1:

□ Eine Signalverschiebung ändert nicht das Betragsspektrum.

Beweis im Kontinuierlichen:

$$\begin{aligned} |c_{1\mu}| &= |c_\mu e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_0}| \\ &= |c_\mu| \underbrace{|e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_0}|}_{=1} = |c_\mu|. \end{aligned}$$

Beweis im Diskreten:

$$\begin{aligned} |V_{1M}(\mu)| &= |V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0}| \\ &= |V_M(\mu)| \underbrace{|e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0}|}_{=1} = |V_M(\mu)|. \end{aligned}$$

Verschiebung – Teil 4:

□ Anmerkungen – Teil 2:

- Eine Signalverschiebung addiert zum Phasenspektrum einen linearen Term.

Beweis im Kontinuierlichen:

$$c_{1\mu} = |c_\mu| e^{j \arg\{c_\mu\}} e^{j\{-\mu \frac{2\pi}{T} t_0\}}.$$

Daraus folgt:

$$\arg\{c_{1,\mu}\} = \arg\{c_\mu\} - \mu \frac{2\pi}{T} t_0.$$

Beweis im Diskreten:

$$V_{1M}(\mu) = |V_M(\mu)| e^{j \arg\{V_M(\mu)\}} e^{j\{-\mu \frac{2\pi}{M} n_0\}}.$$

Daraus folgt:

$$\arg\{V_{1M}(\mu)\} = \arg\{V_M(\mu)\} - \mu \frac{2\pi}{M} n_0.$$

Modulation – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \circ \longrightarrow \bullet c_\mu.$$

Hierzu wird eine **modulierte Signalvariante** gemäß

$$v_1(t) = v(t) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t}$$

mit

$$\mu_0 \in \mathbb{Z}$$

definiert. **Gesucht** ist nun die zugehörige Fourier-Reihe (in Abhängigkeit von c_μ):

$$c_{1\mu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_1(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \circ \longrightarrow \bullet V_M(\mu).$$

Hierzu wird eine **modulierte Folgenvariante** gemäß

$$v_1(n) = v(n) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{M} n}$$

mit

$$\mu_0 \in \mathbb{Z}$$

definiert. **Gesucht** ist nun die zugehörige Spektraldarstellung (in Abhängigkeit von $V_M(\mu)$):

$$V_{1M}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Modulation – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
 c_{1\mu} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j(\mu-\mu_0) \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &= c_{\mu-\mu_0}.
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$v(t) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} \circ \bullet c_{\mu-\mu_0}.$$

□ Für diskrete Signale:

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
 V_{1M}(\mu) &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{M} n} e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \\
 &= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j(\mu-\mu_0) \frac{2\pi}{M} n} \\
 &= V_M(\mu - \mu_0).
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$v(n) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{M} n} \circ \bullet V_M(\mu - \mu_0).$$

Daraus folgt: Eine Multiplikation mit einem komplexen Drehfaktor im Zeitbereich bewirkt bei periodischen Signalen bzw. Folgen eine Verschiebung im Spektralbereich.

Modulation – Teil 3:

□ Anmerkungen – Teil 1:

- Eine Multiplikation eines Signals bzw. einer Folge mit

$$e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} = \cos\left(\mu_0 \frac{2\pi}{T} t\right) + j \sin\left(\mu_0 \frac{2\pi}{T} t\right)$$

bzw.

$$e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{M} n} = \cos\left(\mu_0 \frac{2\pi}{M} n\right) + j \sin\left(\mu_0 \frac{2\pi}{M} n\right)$$

verändert das zugehörige Spektrum **nicht** in Betrag und Phase. Das Spektrum wird lediglich verschoben und zwar um μ_0 auf der μ -Achse. Auf der ω -Achse entspricht dies einer Verschiebung um

$$\mu_0 \frac{2\pi}{T} = \mu_0 \omega_1,$$

auf der Ω -Achse um

$$\mu_0 \frac{2\pi}{M} = \mu_0 \Omega_1.$$

- Solche Multiplikationen nennt man **komplexe Modulation**. Ihr Zweck ist gerade die **Frequenzverschiebung** eines gegebenen Signals bzw. Spektrums (z.B. zur Übertragung eines niederfrequenten Signals über einen hochfrequenten Kanal [z.B. Funk]).

Modulation – Teil 4:

□ Anmerkungen – Teil 2:

- Eine Multiplikation eines Signals bzw. einer Folge mit einer **Sin- oder Cos-Modulationsfunktion** kann wie folgt aufgefasst werden:

$$\sin\left(\mu_0 \frac{2\pi}{T} t\right) = -\frac{j}{2} \left[e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} - e^{-j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} \right],$$

$$\cos\left(\mu_0 \frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{1}{2} \left[e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} + e^{-j\mu_0 \frac{2\pi}{T} t} \right].$$

Daraus folgt im **Kontinuierlichen**

$$v(t) \sin\left(\mu_0 \frac{2\pi}{T} t\right) \circ \bullet -\frac{j}{2} [c_{\mu-\mu_0} - c_{\mu+\mu_0}],$$

$$v(t) \cos\left(\mu_0 \frac{2\pi}{T} t\right) \circ \bullet \frac{1}{2} [c_{\mu-\mu_0} + c_{\mu+\mu_0}],$$

bzw. im **Diskreten**

$$v(n) \sin\left(\mu_0 \frac{2\pi}{M} n\right) \circ \bullet -\frac{j}{2} [V_M(\mu - \mu_0) - V_M(\mu + \mu_0)],$$

$$v(n) \cos\left(\mu_0 \frac{2\pi}{M} n\right) \circ \bullet \frac{1}{2} [V_M(\mu - \mu_0) + V_M(\mu + \mu_0)].$$

Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation

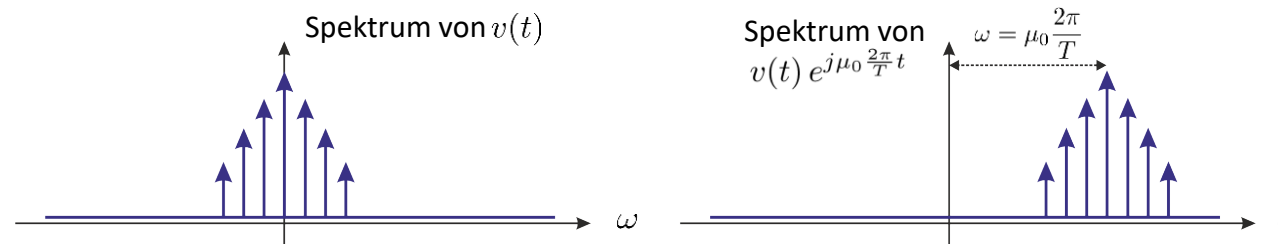
Eigenschaften und Sätze – Teil 11

Modulation – Teil 5:

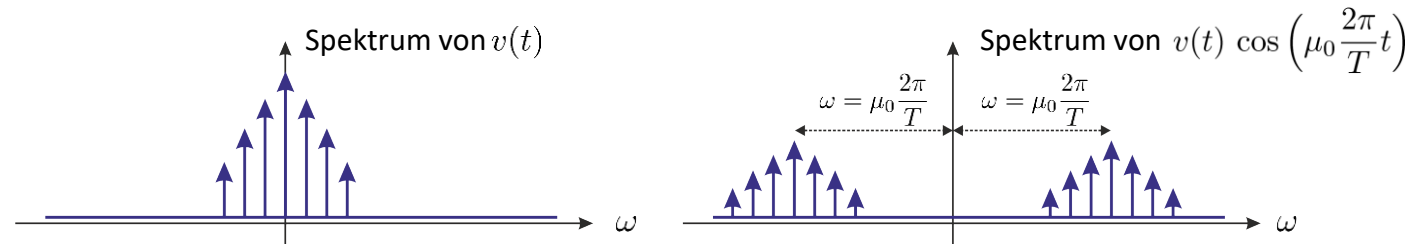
□ Anmerkungen – Teil 3:

□ Visualisierung für kontinuierliche Signale:

Komplexe Modulation:



Cos-Modulation:



Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Was bewirkt eine Multiplikation eines periodischen Signals mit einer Exponentialschwingung im Spektrum?

.....
.....

- Wie groß ist die Bandbreite eines cosinus-modulierten Signals (im Vergleich zu dessen ursprünglicher Bandbreite)?

.....
.....

- Wie könnte man eine Cosinus-Modulation wieder rückgängig machen?

.....
.....

Differentiation und Differenzenbildung – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \circ \longrightarrow \bullet c_\mu.$$

Gesucht ist die Fourier-Reihe der Ableitung

$$v_1(t) = \frac{dv(t)}{dt}.$$

Einsetzen in die Definitionsgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right\} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu \frac{d}{dt} \left\{ e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right\} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_\mu j\mu \frac{2\pi}{T}}_{= c_{1\mu}} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}. \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \circ \longrightarrow \bullet V_M(\mu).$$

Gesucht ist die Transformierte der Differenz

$$v_1(n) = v(n) - v(n - 1).$$

Durch die additive Überlagerung einer Folge mit einer verzögerten Variante (siehe Folien vorher mit $n_0 = 1$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} v(n) &\circ \longrightarrow \bullet V_M(\mu), \\ v(n - 1) &\circ \longrightarrow \bullet V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M}}, \\ v(n) - v(n - 1) &\circ \longrightarrow \bullet V_M(\mu) - V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M}}. \end{aligned}$$

Differentiation und Differenzenbildung – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} v(t) \circ \bullet c_\mu j\mu \frac{2\pi}{T} = c_\mu j\omega_\mu.$$

□ Für diskrete Signale:

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{aligned} v(n) - v(n-1) \circ \bullet V_M(\mu) (1 - e^{-j\mu \frac{2\pi}{M}}) \\ = V_M(\mu) (1 - e^{-j\Omega_\mu}). \end{aligned}$$

Integration und Summation – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \circ \longrightarrow \bullet c_\mu.$$

Gesucht ist die Fourier-Reihe des Integrals

$$v_1(t) = \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t v(\tau) d\tau,$$

mit

$$t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \circ \longrightarrow \bullet V_M(\mu).$$

Gesucht ist die Transformierte der Summe

$$v_1(n) = \sum_{\kappa=0}^n v(\kappa),$$

mit

$$n \in \{1, \dots, M - 1\}.$$

Integration und Summation – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

Einsetzen der Definitionsgleichung für die Transformation liefert:

$$v_1(t) = \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t v(\tau) d\tau$$

... Einsetzen der Fourier-Reihenentwicklung ...

$$= \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau$$

... Vertauschung der Summation- und Integrationsreihenfolge ...

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t e^{j\mu \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau$$

... Aufteilung der Summe ...

$$= c_0 \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t \underbrace{e^{j0 \frac{2\pi}{T} \tau}}_{=1} d\tau + \sum_{\substack{\mu = -\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} c_{\mu} \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t e^{j\mu \frac{2\pi}{T} \tau} d\tau$$

Integration und Summation – Teil 3:

□ Für kontinuierliche Signale:

$$v_1(t) = c_0 \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t \underbrace{e^{j0\frac{2\pi}{T}\tau}}_{=1} d\tau + \sum_{\substack{\mu=-\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} c_\mu \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t e^{j\mu\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau$$

... Ergebnisse und Stammfunktion einsetzen ...

$$= c_0 \left(t + \frac{T}{2} \right) + \sum_{\substack{\mu=-\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} c_\mu \left[\frac{1}{j\mu\frac{2\pi}{T}} e^{j\mu\frac{2\pi}{T}\tau} \right]_{-\frac{T}{2}}^t$$

... Grenzen einsetzen ...

$$= c_0 \left(t + \frac{T}{2} \right) + \sum_{\substack{\mu=-\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} c_\mu \frac{1}{j\mu\frac{2\pi}{T}} e^{j\mu\frac{2\pi}{T}t} - \sum_{\substack{\mu=-\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} c_\mu \frac{1}{j\mu\frac{2\pi}{T}} \underbrace{e^{-j\mu\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}}}_{=(-1)^\mu}$$

... Umsortieren der einzelnen Terme ...

$$= \underbrace{c_0 \left(t + \frac{T}{2} \right)}_{=c_{10}} - \sum_{\substack{\mu=-\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} c_\mu \frac{1}{j\mu\frac{2\pi}{T}} (-1)^\mu + \sum_{\substack{\mu=-\infty, \\ \mu \neq 0}}^{\infty} \underbrace{c_\mu \frac{1}{j\mu\frac{2\pi}{T}}}_{=c_{1\mu}} e^{j\mu\frac{2\pi}{T}t}$$

Integration und Summation – Teil 4:

□ Zusammengefasst ergibt sich für kontinuierliche Signale:

$$\int_{\tau=-\frac{T}{2}}^t v(\tau) d\tau \circ \bullet \left\{ \begin{array}{ll} c_0 \left(t + \frac{T}{2}\right) - \sum_{\substack{\nu=-\infty, \\ \nu \neq 0}}^{\infty} c_\nu \frac{1}{j\nu \frac{2\pi}{T}} (-1)^\nu, & \text{für } \mu = 0, \\ c_\mu \frac{1}{j\mu \frac{2\pi}{T}}, & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

Integration und Summation – Teil 5:

□ Für diskrete Signale können folgende Umformung vorgenommen werden:

$$v_1(n) = \sum_{\kappa=0}^n v(\kappa)$$

... Vertauschen der Summationsreihenfolge ...

$$= v(n) + v(n-1) + \dots + v(n-n) = \sum_{\kappa=0}^n v(n-\kappa)$$

... Einsetzen der IDFT für verschobene Signale ...

$$= \sum_{\kappa=0}^n \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa} e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

... Vertauschen der Reihenfolge der Summen ...

$$= \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n} \sum_{\kappa=0}^n e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa}$$

... Aufspalten der Summe ...

$$= \frac{1}{M} \left[\underbrace{V_M(0)}_{=1} \underbrace{e^{j0 \frac{2\pi}{M} n}}_{=1} \sum_{\kappa=0}^n \underbrace{e^{-j0 \frac{2\pi}{M} \kappa}}_{=1} + \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq 0}}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n} \sum_{\kappa=0}^n e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa} \right]$$

Integration und Summation – Teil 6:

□ Für diskrete Signale können folgende Umformung vorgenommen werden:

$$v_1(n) = \frac{1}{M} \left[\underbrace{V_M(0)}_{=1} \underbrace{e^{j0\frac{2\pi}{M}n}}_{=1} \sum_{\kappa=0}^n \underbrace{e^{-j0\frac{2\pi}{M}\kappa}}_{=1} + \sum_{\mu=0, \mu \neq 0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n} \sum_{\kappa=0}^n e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}\kappa} \right]$$

... Vereinfachungen und endliche Reihe einsetzen ...

$$= \frac{1}{M} \left[V_M(0) \cdot (n+1) + \sum_{\mu=0, \mu \neq 0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n} \frac{1 - e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}(n+1)}}{1 - e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}} \right]$$

... den letzten Bruch aufteilen und vereinfachen ...

$$= \frac{1}{M} \left[V_M(0) \cdot (n+1) + \sum_{\mu=0, \mu \neq 0}^{M-1} \frac{V_M(\mu)}{1 - e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}} e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n} - \sum_{\mu=0, \mu \neq 0}^{M-1} V_M(\mu) \frac{e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}}{1 - e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}} \right]$$

... Summanden neu sortieren ...

$$= \frac{1}{M} \left[\underbrace{V_M(0) \cdot (n+1) - \sum_{\mu=0, \mu \neq 0}^{M-1} V_M(\mu) \frac{e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}}{1 - e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}}}_{=V_{1M}(0)} + \sum_{\mu=0, \mu \neq 0}^{M-1} \underbrace{\frac{V_M(\mu)}{1 - e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}}}}_{=V_{1M}(\mu)} e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n} \right]$$

Integration und Summation – Teil 7:

□ Zusammengefasst ergibt sich für diskrete Signale:

$$\sum_{\kappa=0}^n v(\kappa) \circ \bullet \left\{ \begin{array}{l} V_M(0) \cdot (n+1) - \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq 0}}^{M-1} V_M(\nu) \frac{e^{-j\nu \frac{2\pi}{M}}}{1 - e^{-j\nu \frac{2\pi}{M}}}, \quad \text{für } \mu = 0, \\ V_M(\mu) \frac{1}{1 - e^{-j\mu \frac{2\pi}{M}}}, \quad \text{sonst.} \end{array} \right.$$

□ Anmerkungen:

- Vergleicht man die Differentiation und die Integration bzw. die Differenz- und die Summenbildung, so fällt auf, dass dies offenbar eine **Umkehrung** ist.
- Auch wenn man die einzelnen Operationen im **Signal- und Spektralbereich** (Verschiebung versus Modulation) vergleicht, so fallen **Symmetrien** auf (natürlich immer unter Beachtung von Detailunterschieden). Diese haben (natürlich) mit der formalen **Verwandtschaft der Analyse- und Synthese-Gleichungen** zu tun.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Gegeben sei folgende Differentialgleichung für die periodischen Signale $v(t)$ und $y(t)$ (gleiche Periodendauer):

$$y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_0 v(t) + b_1 \frac{dv(t)}{dt}.$$

Wie lautet das Verhältnis der beiden Fourier-Reihenentwicklungen $\frac{c_{y,\mu}}{c_{v,\mu}}$?

.....

.....

.....

.....

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 1:

- Eine Zerlegung der kontinuierlichen und diskreten Signale in **Real- und Imaginärteile**, sowie eine Zerlegung der zugehörigen Spektraldarstellungen ergibt ...

... für kontinuierliche Signale:

$$v(t) = v_{\text{re}}(t) + j v_{\text{im}}(t),$$

$$c_{\mu} = c_{\mu \text{ re}} + j c_{\mu \text{ im}}.$$

... für diskrete Signale:

$$v(n) = v_{\text{re}}(n) + j v_{\text{im}}(n),$$

$$V_M(\mu) = V_{M \text{ re}}(\mu) + j V_{M \text{ im}}(\mu).$$

Analog dazu können die Signale und die Spektralzerlegungen in **gerade und ungerade Anteile** zerlegt werden. Eine gerade ...

... Funktion ist dabei gemäß

$$g(t) = g(-t)$$

definiert. Eine ungerade gemäß ...

$$u(t) = -u(-t)$$

... Folge ist dabei gemäß

$$g(n) = g(-n)$$

$$u(n) = -u(-n)$$

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 2:

- Es existiert eine eindeutige und umkehrbare Zerlegung in gerade und ungerade Anteile für beliebige Signale. Der gerade Anteil wird gemäß

$$v_{\text{ge}}(t) = \frac{1}{2} [v(t) + v(-t)] \quad \text{bzw.} \quad v_{\text{ge}}(n) = \frac{1}{2} [v(n) + v(-n)]$$

bestimmt, der ungerade gemäß

$$v_{\text{un}}(t) = \frac{1}{2} [v(t) - v(-t)] \quad \text{bzw.} \quad v_{\text{un}}(n) = \frac{1}{2} [v(n) - v(-n)].$$

Die Summe des geraden und des ungeraden Anteils ergibt wieder das Signal selbst:

$$v(t) = v_{\text{ge}}(t) + v_{\text{un}}(t) \quad \text{bzw.} \quad v(n) = v_{\text{ge}}(n) + v_{\text{un}}(n).$$

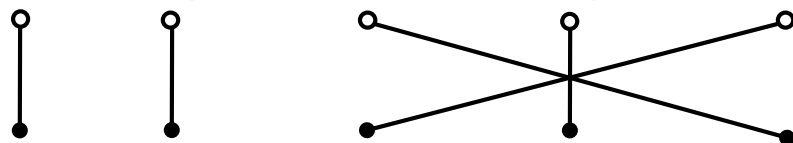
- Diese Zerlegung kann genauso wie auf Signale auch auf die Spektralzerlegungen angewendet werden.

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 3:

□ Es bestehen folgende Zusammenhänge zwischen den geraden bzw. ungeraden Real- und Imaginärteilen des Signals und des Spektrums:

□ Für kontinuierliche Signale:

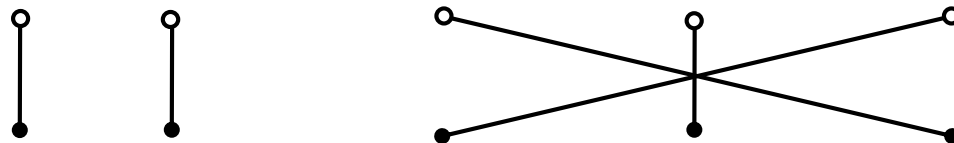
$$v(t) = v_{\text{re,ge}}(t) + v_{\text{re,un}}(t) + j v_{\text{im,ge}}(t) + j v_{\text{im,un}}(t)$$



$$c_{\mu} = c_{\mu \text{ re,ge}} + c_{\mu \text{ re,un}} + j c_{\mu \text{ im,ge}} + j c_{\mu \text{ im,un}}$$

□ Für diskrete Signale:

$$v(n) = v_{\text{re,ge}}(n) + v_{\text{re,un}}(n) + j v_{\text{im,ge}}(n) + j v_{\text{im,un}}(n)$$



$$V_M(\mu) = V_{M \text{ re,ge}}(\mu) + V_{M \text{ re,un}}(\mu) + j V_{M \text{ im,ge}}(\mu) + j V_{M \text{ im,un}}(\mu)$$

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 4:

□ Konsequenzen für den Spezialfall

$$v(\dots) \in \mathbb{R},$$

d.h. $v_{\text{im,ge}}(\dots) = v_{\text{im,un}}(\dots) = 0.$

Da der Imaginärteil des Signals Null ist, ergibt sich für die Spektraldarstellungen ...

... von kontinuierlichen Signalen:

$$c_{\mu \text{ im,ge}} = c_{\mu \text{ re,un}} = 0.$$

... von diskreten Signalen:

$$V_{M \text{ im,ge}}(\mu) = V_{M \text{ re,un}}(\mu) = 0.$$

Damit ergibt sich für die Spektraldarstellungen von reellen ...

... kontinuierlichen Signalen:

$$c_{\mu} = c_{\mu \text{ re,ge}} + j c_{\mu \text{ im,un}},$$

$$c_{\mu \text{ re,ge}} = \text{Re}\{c_{\mu}\}, \quad \leftarrow \text{gerade} \quad \longrightarrow \quad \text{Re}\{V_M(\mu)\} = V_{M \text{ re,ge}}(\mu),$$

$$c_{\mu \text{ im,un}} = \text{Im}\{c_{\mu}\}. \quad \leftarrow \text{ungerade} \quad \longrightarrow \quad \text{Im}\{V_M(\mu)\} = V_{M \text{ im,un}}(\mu).$$

... diskreten Signalen:

$$V_M(\mu) = V_{M \text{ re,ge}}(\mu) + j V_{M \text{ im,un}}(\mu),$$

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 5:

□ Konsequenzen für den Spezialfall $v(\dots) \in \mathbb{R}$:

□ Umkehrung der „Frequenzrichtung“

... für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned}
 c_{-\mu} &= \overbrace{c_{-\mu \text{ re,ge}}}^{\text{gerade}} + j \overbrace{c_{-\mu \text{ im,un}}}^{\text{ungerade}} \\
 &= c_{\mu \text{ re,ge}} - j c_{\mu \text{ im,un}} \\
 &= c_{\mu}^*
 \end{aligned}$$

... für diskrete Signale:

$$\begin{aligned}
 V_M(-\mu) &= \overbrace{V_{M \text{ re,ge}}(-\mu)}^{\text{gerade}} + j \overbrace{V_{M \text{ im,un}}(-\mu)}^{\text{ungerade}} \\
 &= V_{M \text{ re,ge}}(\mu) - j V_{M \text{ im,un}}(\mu) \\
 &= V_M^*(\mu)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt: Bei reellen Signalen muss nur die Hälfte des Spektrums bestimmt, gespeichert, verarbeitet, usw. werden, die anderen Anteile können rekonstruiert werden (dies spart Speicher)!

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 6:

□ Konsequenzen für den Spezialfall $v(\dots) \in \mathbb{R}$:

□ Eigenschaften des Betrags der Spektralkomponenten – Teil 1:

Für kontinuierliche Signale gilt

$$c_\mu = |c_\mu| e^{j \arg\{c_\mu\}}.$$

Für diskrete Signale gilt:

$$V_M(\mu) = |V_M(\mu)| e^{j \arg\{V_M(\mu)\}}.$$

Für den Betrag gilt dabei:

$$|c_\mu| = +\sqrt{c_{\mu \text{ re}}^2 + c_{\mu \text{ im}}^2}.$$

$$|V_M(\mu)| = +\sqrt{V_{M \text{ re}}^2(\mu) + V_{M \text{ im}}^2(\mu)}.$$

Setzt man die Besonderheiten von reellwertigen Signalen ein, so ergibt sich:

$$|c_\mu| = +\sqrt{c_{\mu \text{ re,ge}}^2 + c_{\mu \text{ im,un}}^2}.$$

$$|V_M(\mu)| = +\sqrt{V_{M \text{ re,ge}}^2(\mu) + V_{M \text{ im,un}}^2(\mu)}.$$

gerade

gerade

*Ungerade, aber durch Quadrieren
wieder gerade*

*Ungerade, aber durch Quadrieren
wieder gerade*

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 7:

□ Konsequenzen für den Spezialfall $v(\dots) \in \mathbb{R}$:

□ Eigenschaften des Betrags der Spektralkomponenten – Teil 2:

Damit ergibt sich für den Betrag der Spektralkomponenten von ...

... kontinuierlichen Signalen:

$$|c_\mu| = |c_{-\mu}|.$$

... diskreten Signalen

$$|V_M(\mu)| = |V_M(-\mu)|.$$

Das Betragsspektrum eines reellen Signals ist gerade in μ !

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 8:

□ Konsequenzen für den Spezialfall $v(\dots) \in \mathbb{R}$:

□ Eigenschaften der Phase der Spektralkomponenten:

Für die Phase der Spektralkomponenten gilt für reelle ...

... kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} \arg\{c_\mu\} &= \arctan\left(\frac{c_{\mu \text{ im}}}{c_{\mu \text{ re}}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{c_{\mu \text{ im,un}}}{c_{\mu \text{ re,ge}}}\right) \\ &= -\arg\{c_{-\mu}\}. \end{aligned}$$

... diskrete Signale:

$$\begin{aligned} \arg\{V_M(\mu)\} &= \arctan\left(\frac{V_{M \text{ im}}(\mu)}{V_{M \text{ re}}(\mu)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{V_{M \text{ im,un}}(\mu)}{V_{M \text{ re,ge}}(\mu)}\right) \\ &= -\arg\{V_M(-\mu)\}. \end{aligned}$$

Die Phase des Spektrums eines reellen Signals ist ungerade in μ !

Fourier-Cosinus-/Sinus-Reihe – Teil 1:

- Aufgrund der Symmetrien von reellen Signalen können die ursprünglichen Transformationsbeziehungen umgeformt werden. Dies ist zum Beispiel auch für die Diskrete Fourier-Transformation möglich (aber auch unüblich):
- Für die **Fourier-Reihe** ergibt sich für **reelle Signale**:

$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

... Aufspalten der Summe ...

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{-1} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} + c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

... Umkehren der Summationsreihenfolge der ersten Summe ...

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{-\mu} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} + c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

... Zusammenfassen der beiden Summen ...

$$= c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[c_{-\mu} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} + c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right]$$

Fourier-Cosinus-/Sinus-Reihe – Teil 2:

□ Fortsetzung:

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[c_{-\mu} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} + c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right]$$

... Aufspalten der e-Funktion in sin(...) und cos(...) ...

$$= c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[(c_{\mu} + c_{-\mu}) \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + j (c_{\mu} - c_{-\mu}) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

... Einführen folgender Abkürzungen unter Verwendung der Symmetrie ...

$$a_{\mu} = c_{\mu} + c_{-\mu} = c_{\mu} + c_{\mu}^* = 2 \operatorname{Re}\{c_{\mu}\} \in \mathbb{R}$$

$$b_{\mu} = j (c_{\mu} - c_{-\mu}) = j (c_{\mu} - c_{\mu}^*) = -2 \operatorname{Im}\{c_{\mu}\} \in \mathbb{R}$$

$$= c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Alle beteiligten Funktionen und Koeffizienten sind reell!

Fourier-Cosinus-/Sinus-Reihe – Teil 3:

- Die reellen Reihenoeffizienten werden dabei wie folgt bestimmt:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt, \quad \leftarrow \text{Mittelwert des Signals}$$

$$a_\mu = 2\operatorname{Re}\{c_\mu\} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt,$$

$$b_\mu = -2\operatorname{Im}\{c_\mu\} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt.$$

- Durch Umkehrung der bisherigen Gleichungen wird mit

$$c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - j b_\mu), \quad c_{-\mu} = c_\mu^* \quad \text{für } \mu \in \{1, \dots, \infty\}$$

daraus wieder die komplexe Fourier-Reihe in einheitlicher, kompakter Schreibweise.

- Für die **Diskrete Fourier-Transformation** kann dies auf nahezu gleiche Weise angewendet werden.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Gegeben sei eine periodische reelle Folge mit der Periodendauer 16. Wie viele Datenworte (Speicherstellen) benötigen Sie, wenn Sie das Spektrum ohne Redundanz speichern wollen?

.....
.....

- Wie viele Datenworte benötigen Sie, wenn die oben genannte Folge zusätzlich auch gerade ist?

.....
.....

- Gegeben sei eine Folge, die sich durch eine gewichtete Summe von Sinusfolgen (ohne Phasenterm) beschreiben lässt. Was können Sie über die DFT dieser Folge aussagen?

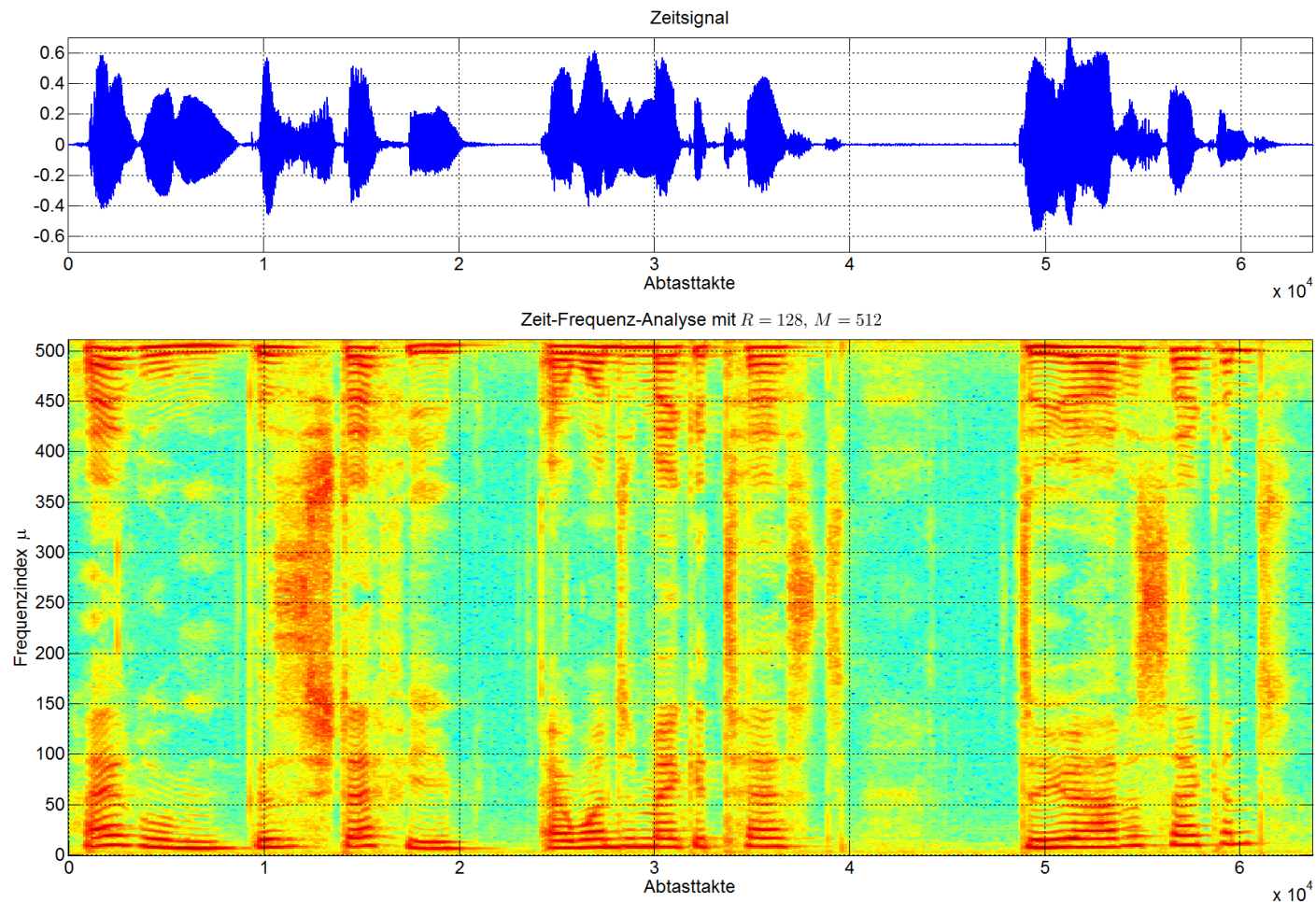
.....
.....

Beispiel zur Signalanalyse von realen Signalen – Teil 1:

- Analyse von Sprachsignalen:
 - Ein Mikrofonsignal wird zunächst mit 16 kHz abgetastet.
 - Dieses diskrete Signale wird dann in einzelne Blöcke der Länge $M = 512$ aufgeteilt.
 - Die Aufteilung kann dabei auch überlappend sein, der Blockabstand R kann z. B. $R = M/4$ betragen.
 - Zusätzlich kann jeder Block mit einer sog. Fensterung versehen werden, damit die Randbereiche weniger ins Gewicht fallen als der Bereich in der Mitte des Blockes.
 - Jeder einzelne Signalblock wird dann (gedanklich) periodisch fortgesetzt und es kann dann eine DFT dieses Signals bestimmt werden.
 - Die so erhaltenen Spektralvektoren werden zu einer Matrix zusammenfasst.
 - Man stellt oftmals das logarithmierte Betragsspektrum auf diese Weise dar.

Solche Zeit-Frequenz-Darstellungen nennt man „Spektrogramm“.

Beispiel zur Signalanalyse von realen Signalen – Teil 2:



Cosinus mit Gleichanteil – Teil 1:

- Gegeben sei folgendes Signal:

$$v(t) = \hat{v}_0 + \hat{v}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

- Die Periodendauer dieses Signals beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, d.h. die Grundfrequenz kann mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

angegeben werden.

- Wendet man hierauf die Fourier-Reihenentwicklung an, so ergibt sich für den Koeffizienten c_0 (Gleichanteil, Mittelwert):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T \hat{v}_0 dt}_{= \hat{v}_0 T} + \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T \hat{v}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) dt}_{= 0} = \hat{v}_0.$$

Zum Beispiel ...

Da über eine volle Periode der cos-Schwingung integriert wird.

Cosinus mit Gleichanteil – Teil 2:

□ Für den Koeffizienten c_1 erhält man:

$$c_1 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-j \overbrace{\frac{2\pi}{T} t}^{=\omega_1}} dt = \frac{\hat{v}_0}{T} \underbrace{\int_0^T e^{-j\omega_1 t} dt}_{=0} + \frac{\hat{v}_1}{T} \int_0^T \cos(\omega_1 t + \varphi) e^{-j\omega_1 t} dt$$

Da über eine volle Periode der Schwingung integriert wird.

$$c_1 = \frac{\hat{v}_1}{T} \int_0^T \cos(\omega_1 t + \varphi) e^{-j\omega_1 t} dt$$

... Einsetzen von $\cos(x) = \frac{1}{2}[e^{jx} + e^{-jx}]$ ergibt ...

$$c_1 = \frac{\hat{v}_1}{2T} \left[\int_0^T e^{j(\omega_1 t + \varphi)} e^{-j\omega_1 t} dt + \int_0^T e^{-j(\omega_1 t + \varphi)} e^{-j\omega_1 t} dt \right]$$

$$= \frac{\hat{v}_1}{2T} \left[\int_0^T e^{j\varphi} dt + \int_0^T e^{-j(2\omega_1 t + \varphi)} dt \right]$$

Cosinus mit Gleichanteil – Teil 3:

□ Fortsetzung

$$c_1 = \frac{\hat{v}_1}{2T} \left[\underbrace{e^{j\varphi} \int_0^T 1 dt}_{=T} + \underbrace{\int_0^T e^{-j(2\omega_1 t + \varphi)} dt}_{=0} \right] = \frac{\hat{v}_1}{2} e^{j\varphi}$$

□ Eine gleichartige Rechnung liefert für den Koeffizienten c_{-1} :

$$c_{-1} = \frac{\hat{v}_1}{2} e^{-j\varphi} = c_1^*$$

□ Für die Koeffizienten c_μ mit $\mu \neq -1, 0, 1$ wird stets über eine ganze Zahl von Perioden der sin- und cos-Schwingungen integriert. Hieraus ergibt sich

$$c_\mu = 0, \quad \forall \mu \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Cosinus mit Gleichanteil – Teil 4:

- Daraus ergibt sich eine endliche Fourier-Reihe mit nur 3 Koeffizienten:

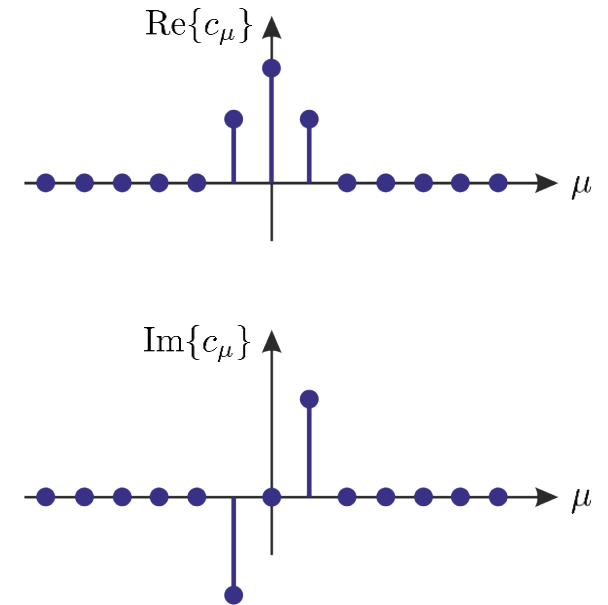
$$v(t) = c_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + c_0 + c_1 e^{j\frac{2\pi}{T}t}.$$

- Setzt man die Ergebnisse für die drei Fourier-Reihenkoeffizienten ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} v(t) &= c_0 + c_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + c_1 e^{j\frac{2\pi}{T}t} \\ &= \hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_1}{2} \left[e^{-j\varphi} e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + e^{j\varphi} e^{j\frac{2\pi}{T}t} \right] \\ &= \hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_1}{2} \left[e^{j(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi)} \right] \\ &= \hat{v}_0 + \hat{v}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi). \end{aligned}$$

← *Wie ursprünglich gegeben ...*

- In derart einfachen Fällen ist das Ergebnis (mit etwas Übung) unmittelbar zu sehen. Die Integration gemäß der Herleitung auf den letzten Folien ist dann nicht nötig (aber natürlich zulässig).



Modulierter Cosinus mit Gleichanteil – Teil 1:

- Gegeben sei folgendes Signal:

$$v(n) = \left[\hat{v}_0 + \hat{v}_1 \cos(\Omega_1 n) \right] \cos(k\Omega_1 n)$$

mit $\Omega_1 = \frac{2\pi}{K}$, $K = 20$, $k = 5$.

- Da die Periode des ersten Cosinusterm ein ganzzahliges Vielfaches der Periode des zweiten ist, bestimmt der erste Term die Gesamtperiode

$$M = K = 20.$$

- Wendet man die diskrete Fourier-Transformation an, so ergibt sich für den Koeffizienten $V_M(0)$ (Gleichanteil, Mittelwert):

$$V_M(0) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \overbrace{e^{-j0 \frac{2\pi}{M} n}}^{=1} = \sum_{n=0}^{M-1} v(n)$$

... Einsetzen des gegebenen Signals ...

$$= \hat{v}_0 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(k\Omega_1 n) + \hat{v}_1 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n)$$

Modulierter Cosinus mit Gleichanteil – Teil 2:

□ Im Folgenden immer wieder verwendete Rechenregeln:

□ Exponentialfunktionen betreffend:

$$\begin{aligned}
 e^{jx} &= \cos(x) + j \sin(x) \\
 e^{-jx} &= \cos(x) - j \sin(x) = [e^{jx}]^* \\
 e^{jx} + e^{-jx} &= 2 \cos(x) \\
 e^{jx} - e^{-jx} &= j 2 \sin(x)
 \end{aligned}$$

□ Cosinusfunktionen betreffend:

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

□ Summen betreffend:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} x^n = \sum_{n=0}^{n_2-n_1} x^{n_1+n} = x^{n_1} \sum_{n=0}^{N-1} x^n = x^{n_1} \frac{1-x^N}{1-x} \quad \text{mit } n_2 - n_1 = N - 1.$$

Daraus ergibt sich für $|x| < 1$:

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} x^n = x^{n_1} \frac{1}{1-x}.$$

Modulierter Cosinus mit Gleichanteil – Teil 3:

□ Fortsetzung zur Bestimmung des Koeffizienten $V_M(0)$:

$$\begin{aligned}
 V_M(0) &= \hat{v}_0 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(k\Omega_1 n) + \hat{v}_1 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n) \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen von } \cos(x) = \frac{1}{2} [e^{jx} + e^{-jx}] \text{ ergibt ...} \\
 &= \frac{\hat{v}_0}{2} \left[\sum_{n=0}^{M-1} e^{jk\Omega_1 n} + \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jk\Omega_1 n} \right] + \hat{v}_1 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n) \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der Formel für endliche geometrische Reihen ergibt ...} \\
 &= \frac{\hat{v}_0}{2} \left[\frac{1 - e^{jk\Omega_1 M}}{1 - e^{jk\Omega_1}} + \frac{1 - e^{-jk\Omega_1 M}}{1 - e^{-jk\Omega_1}} \right] + \hat{v}_1 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n) \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen von } \Omega_1 = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{M} \text{ ergibt ...} \\
 &= \frac{\hat{v}_0}{2} \left[\underbrace{\frac{1 - e^{jk\frac{2\pi}{M} M}}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{M}}}}_{=0} + \underbrace{\frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{M} M}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{M}}}}_{=0} \right] + \hat{v}_1 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n)
 \end{aligned}$$

Modulierter Cosinus mit Gleichanteil – Teil 4:

- Fortsetzung zur Bestimmung des Koeffizienten $V_M(0)$:

$$\begin{aligned}
 V_M(0) &= \hat{v}_1 \sum_{n=0}^{M-1} \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n) \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen von } \cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \text{ ergibt ...} \\
 &= \frac{\hat{v}_1}{2} \sum_{n=0}^{M-1} \cos((k+1)\Omega_1 n) + \frac{\hat{v}_1}{2} \sum_{n=0}^{M-1} \cos((k-1)\Omega_1 n) \\
 &\quad \dots \text{Diese Terme haben wieder die gleiche Struktur wie auf der Folie zuvor,} \\
 &\quad \text{d.h. sie haben jeweils den Wert 0. ...} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- Bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten kann nun genau so vorgegangen werden. Alternativ bietet sich aber ein Umformen der Cos-Terme in Exponentialterme an. Sollte dies vollständig gelingen, so können die einzelnen Spektralanteile durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Beispiele – Teil 11

Modulierter Cosinus mit Gleichanteil – Teil 5:

□ Umformung der Eingangsfolge:

$$v(n) = \left[\hat{v}_0 + \hat{v}_1 \cos(\Omega_1 n) \right] \cos(k\Omega_1 n)$$

... Auflösen des Ausdrucks in Klammern ...

$$= \hat{v}_0 \cos(k\Omega_1 n) + \hat{v}_1 \cos(\Omega_1 n) \cos(k\Omega_1 n)$$

... Einsetzen von $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$ ergibt ...

$$= \hat{v}_0 \cos(k\Omega_1 n) + \frac{\hat{v}_1}{2} \cos((k + 1)\Omega_1 n) + \frac{\hat{v}_1}{2} \cos((k - 1)\Omega_1 n)$$

... Einsetzen von $\cos(x) = \frac{1}{2} [e^{jx} + e^{-jx}]$ ergibt ...

$$= \frac{\hat{v}_0}{2} \left[e^{jk\Omega_1 n} + e^{-jk\Omega_1 n} \right] \longleftarrow \text{Anteile bei } V_M(k) \text{ und } V_M(-k) = V_M(M - k)$$

$$+ \frac{\hat{v}_1}{4} \left[e^{j(k+1)\Omega_1 n} + e^{-j(k+1)\Omega_1 n} \right] \longleftarrow \text{Anteile bei } V_M(k + 1) \text{ und } V_M(-k - 1) = V_M(M - k - 1)$$

$$+ \frac{\hat{v}_1}{4} \left[e^{j(k-1)\Omega_1 n} + e^{-j(k-1)\Omega_1 n} \right] \longleftarrow \text{Anteile bei } V_M(k - 1) \text{ und } V_M(-k + 1) = V_M(M - k + 1)$$

Modulierter Cosinus mit Gleichanteil – Teil 6:

□ Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

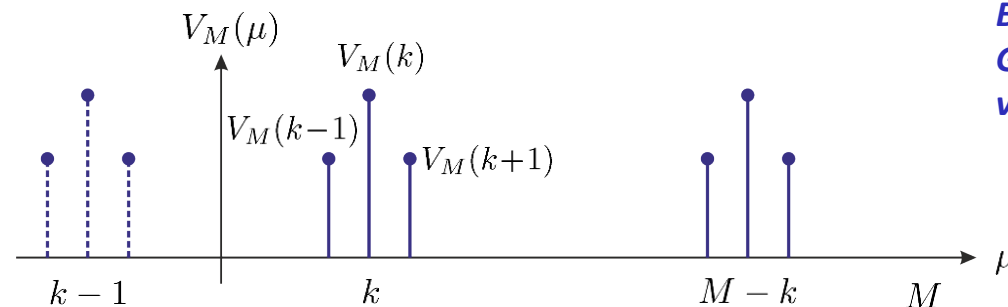
$$V_M(k) = V_M(M - k) = \frac{\hat{v}_0}{2}$$

$$V_M(k + 1) = V_M(M - k - 1) = \frac{\hat{v}_1}{4}$$

$$V_M(k - 1) = V_M(M - k + 1) = \frac{\hat{v}_1}{4}$$

$$V_M(\mu) = 0, \quad \forall \mu \notin \{k - 1, k, k + 1, M - k - 1, M - k, M - k + 1\}.$$

□ Betragsspektrum:



Basisspektrum des Cosinus mit Gleichanteil nach rechts und links verschoben ...

Beispiele – Teil 13

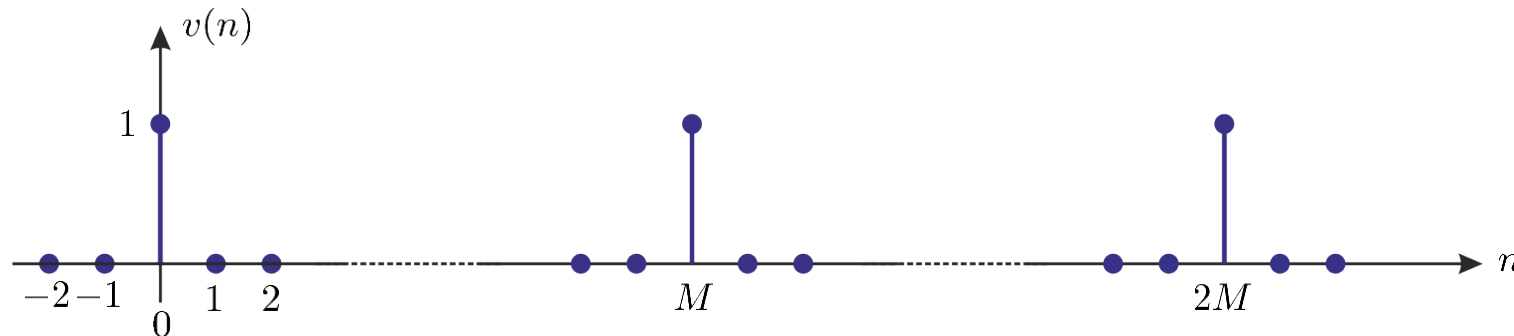
Impulsfolgen – Teil 1:

- Gegeben sie folgendes Signal:

$$v(n) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n - \lambda M),$$

d.h. ein M-periodischer **Impuls-Kamm**.

- Signaldarstellung:



- Die Periodendauer des Signals beträgt M . Innerhalb einer Periode gibt es nur einen von Null verschiedenen Wert im Signal.

Impulsfolgen – Teil 2:

- Bestimmung der Spektraldarstellung:

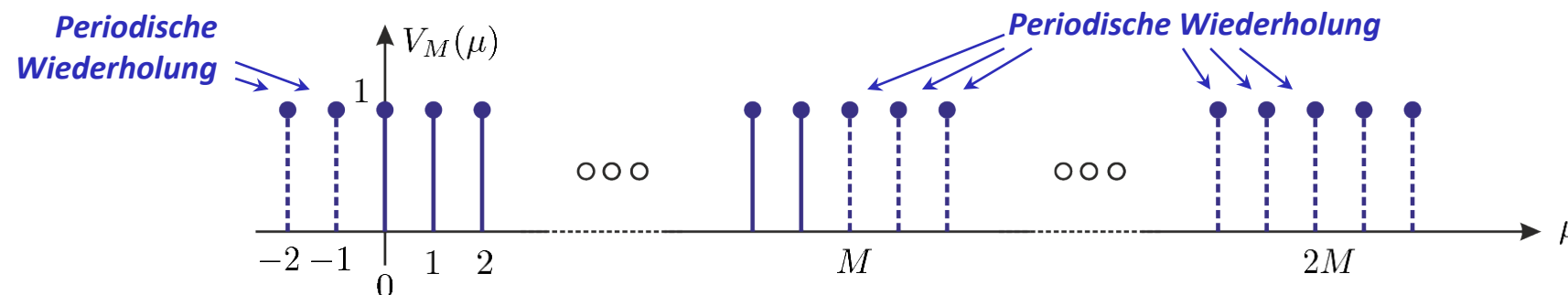
$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

... Einsetzen des Impulskamms. Da nur ein Impuls innerhalb der Summationsgrenzen vorkommt, kann dies wie folgt vereinfacht werden ...

$$= \sum_{n=0}^{M-1} \gamma_0(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

... Durch die Ausblendeigenschaft des Impulses bleibt nur ein einziger Exponentialterm übrig ...

$$= e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} 0} \equiv 1 \forall \mu.$$



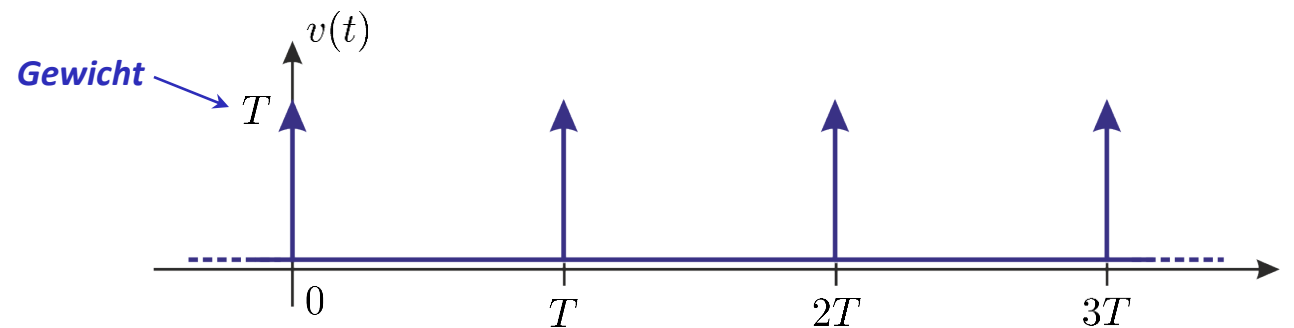
Impulsfolgen – Teil 3:

- Gegeben sei das kontinuierliche Äquivalent zum zuvor behandelten diskreten Impulskamm:

$$v(t) = T \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - \lambda T),$$

d.h. ein periodischer (Dirac-) Impulskamm mit Periodendauer T .

- Signaldarstellung:



- Die Periodendauer des Signals beträgt T . Innerhalb einer Periode gibt es nur einen Dirac-Impuls im Signal.

Impulsfolgen – Teil 4:

□ Bestimmung der Spektraldarstellung:

$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt$$

... Einsetzen des Impulskamms ...

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} T \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - \lambda T) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt$$

... Nur ein Dirac-Impuls liegt innerhalb der Integrationsgrenzen ...

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_0(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt$$

... Verwenden der „Ausblendeigenschaft“ des Dirac-Impulses ...

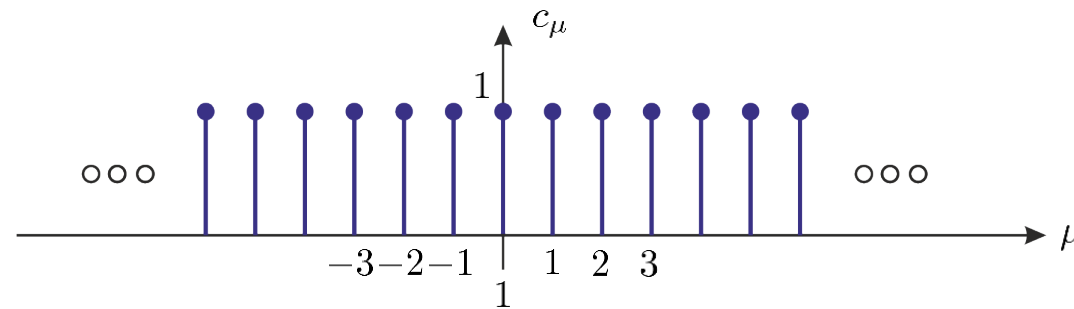
$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_0(t) \underbrace{e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} 0}}_{=1} dt$$

... Verwenden der „Flächeneigenschaft“ des Dirac-Impulses ...

$$\equiv 1 \forall \mu.$$

Impulsfolgen – Teil 5:

- Visualisierung der Spektraldarstellung:



- Durch Vergleich der Eingangssignale und der Reihenentwicklungen ergeben sich folgende Zusammenhänge

- im Kontinuierlichen:
$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} = T \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - \lambda T).$$

- im Diskreten:
$$\frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n - \lambda M).$$

Abschließende Zusammenfassung

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ **Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation**
 - ❑ Fourier-Reihe: Definition und Begriffsklärung
 - ❑ Fourier-Reihe: Berechnung der Koeffizienten
 - ❑ Fourier-Reihe: Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung
 - ❑ Diskrete Fourier-Transformation: Definition und Begriffsklärung
 - ❑ Diskrete Fourier-Transformation: Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung
 - ❑ Eigenschaften und Sätze
 - ❑ Beispiele
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ Laplace- und z-Transformation
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation