

Signale und Systeme – Lineare Systeme

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht – Teil 1

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
 - ❑ Einführung und Begriffsklärung
 - ❑ Signale
 - ❑ Systeme

- ❑ Signale
 - ❑ Elementarsignale
 - ❑ Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
 - ❑ Signalzerlegung in Elementarsignale

- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ Fourier-Reihe, Diskrete Fourier-Transformation
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ Laplace- und z-Transformation



Gesamtübersicht – Teil 2

□ Lineare Systeme

- Reaktionen auf Elementarsignale
- Reaktionen auf beliebige Signale
- Zusammenhänge zwischen Systemkenngrößen
- Stabilität linearer Systeme
- Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

□ Modulation

- Grundlagen
- Lineare Modulation- und Demodulationsverfahren
- Abtasttheorem

Übersicht des nächsten Abschnitts

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
- ❑ **Lineare Systeme**
 - ❑ Reaktion auf Elementarsignale
 - ❑ Reaktion auf beliebige Signale
 - ❑ Zusammenhänge zwischen den Systemkenngößen
 - ❑ Stabilität linearer Systeme
 - ❑ Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen
 - ❑ Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen
- ❑ Modulation

Reaktionen auf Elementarsignale

Allgemeine Eingangs-/Ausgangsbeschreibungen – Teil 1

Kontinuierliche Signale:

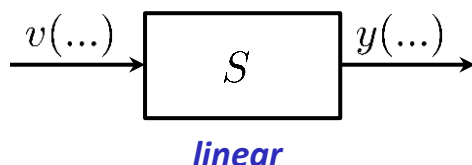
$$v(t) = V \delta_0(t - \tau)$$

$$v(t) = V \delta_{-1}(t - \tau) \quad \leftarrow \text{Anregungszeitpunkt}$$

$$v(t) = V e^{j\omega_0 t}$$

$$v(t) = V e^{s_0 t}$$

**Kontinuierliche
Elementarsignale**



$$y(t) = V h_0(t, \tau) = V h_0(t - \tau)$$

$$y(t) = V h_{-1}(t, \tau) = V h_{-1}(t - \tau)$$

$$y(t) = V H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

$$y(t) = V H(s_0) e^{s_0 t}$$

Falls zusätzlich
Verschiebungsinvarianz
gilt!

Diskrete Signale:

$$v(n) = V \gamma_0(n - \kappa)$$

$$v(n) = V \gamma_{-1}(n - \kappa)$$

$$v(n) = V e^{j\Omega_0 n}$$

$$v(n) = V (z_0)^n$$

**Diskrete
Elementarsignale**

$$y(n) = V h_0(n, \kappa) = V h_0(n - \kappa)$$

$$y(n) = V h_{-1}(n, \kappa) = V h_{-1}(n - \kappa)$$

$$y(n) = V H(e^{j\Omega_0}) e^{j\Omega_0 n}$$

$$y(n) = V H(z_0) (z_0)^n$$

Bezeichnungen:

- Impulsantwort: $h_0(t), h_0(n)$
- Sprungantwort: $h_{-1}(t), h_{-1}(n)$
- Frequenzgang: $H(j\omega), H(e^{j\Omega})$
- Übertragungsfunktion: $H(s), H(z)$

Anmerkung:

- Exponentialsignale werden durch lineare, zeitinvariante Systeme (bzw. allgemeiner „lineare, verschiebungsinvariante Systeme“) reproduziert. Es ändert sich lediglich der Betrag und die Phase.

Allgemeines

Signalzerlegung:

- Allgemeine Signale $v(\dots)$ lassen sich darstellen als **Linearkombinationen** (= Summen) von **Elementarsignalen**.
- Da der **Überlagerungssatz** für lineare Systeme gilt, kann die Reaktion auf eine Summe einzelner Signale durch die Summe der Einzelreaktionen bestimmt werden.
- Mit Hilfe der Impulsantworten $h_0(t)$ bzw. $h_0(n)$ können solche Reaktionen auf beliebige Signale relativ einfach berechnet werden (nächste Folie).

Bemerkungen:

- $H(s)$ bzw. $H(z)$ stammen i.A. aus dem Ergebnis einer theoretischen Analyse.
- $H(j\omega)$ bzw. $H(e^{j\Omega})$ können entweder aus $H(s)$ bzw. $H(z)$ berechnet werden oder messtechnisch erfasst werden. Hierzu beobachtet/misst man das Eingangs- und das Ausgangsspektrum eines Systems und bestimmt dann $H(\dots) = Y(\dots)/V(\dots)$.
- $h_0(\dots)$, $h_{-1}(\dots)$ können entweder aus den Frequenzgängen oder Übertragungsfunktionen bestimmt werden oder können wieder messtechnisch erfasst werden. Hierzu gibt es zahlreiche Messmethoden (Details hierzu z.B. in der Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 2“).

Reaktionen auf beliebige Signale

Beschreibung mit Hilfe der Impulsantwort

Überlagerungssatz für Impulsfunktionen bzw. -folgen:

Aufgrund der Linearität kann der Überlagerungssatz angewendet werden. Für ...

- ... kontinuierliche Signale und Systeme gilt dann:

$$v(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau) \delta_0(t - \tau) d\tau$$

... Systemantwort auf gewichtete Impulse ...

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau) h_0(t, \tau) d\tau$$

... Verschiebungsinvarianz ...

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau) h_0(t - \tau) d\tau$$

... Definition einer kontinuierlichen Faltung ...

$$= v(t) * h_0(t).$$

- ... diskrete Signale und Systeme gilt dann:

$$v(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) \gamma_0(n - \kappa)$$

... Systemantwort auf gewichtete Impulse ...

$$y(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) h_0(n, \kappa)$$

... Verschiebungsinvarianz ...

$$= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) h_0(n - \kappa)$$

... Definition einer diskreten Faltung ...

$$= v(n) * h_0(n).$$

Lineare, verschiebungsinvariante Systeme falten das Eingangssignal mit der Impulsantwort!

Beschreibung mit Hilfe der Sprungantwort – Teil 1

Überlagerungssatz für Sprungfunktionen bzw. –folgen – Teil 1:

Aufgrund der Linearität kann der Überlagerungssatz angewendet werden. Man vergleiche hierbei die Überlegungen aus dem Abschnitt „Zerlegung in Elementarsignale“. Für ...

- ... kontinuierliche Signale und Systeme gilt dann:

$$v(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{dv(\tau)}{d\tau} \delta_{-1}(t - \tau) d\tau + v(-\infty) \delta_{-1}(t - (-\infty))$$

... Systemantwort auf gewichtete Sprungfunktionen ...

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \dot{v}(\tau) h_{-1}(t, \tau) d\tau + v(-\infty) h_{-1}(t, -\infty)$$

... Verschiebungsinvarianz ...

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \dot{v}(\tau) h_{-1}(t - \tau) d\tau + v(-\infty) h_{-1}(\infty)$$

... Definition einer kontinuierlichen Faltung einsetzen ...

$$= \dot{v}(t) * h_{-1}(t) + v(-\infty) h_{-1}(\infty).$$

Überlagerungssatz für Sprungfunktionen bzw. –folgen – Teil 2:

□ ... diskrete Signale und Systeme gilt dann:

... Zerlegung gemäß des Abschnitts „Zerlegung in Elementarsignale“ ...

$$v(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \overbrace{v(\kappa) - v(\kappa - 1)}^{\Delta v(\kappa)} \gamma_{-1}(n - \kappa) + v(-\infty) \gamma_{-1}(n - (-\infty))$$

... Systemantwort auf gewichtete Sprungfolgen ...

$$y(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \Delta v(\kappa) h_{-1}(n, \kappa) + v(-\infty) h_{-1}(n, -\infty)$$

... Verschiebungsinvarianz ...

$$= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \Delta v(\kappa) h_{-1}(n - \kappa) + v(-\infty) h_{-1}(\infty)$$

... Definition einer kontinuierlichen Faltung einsetzen ...

$$= \Delta v(n) * h_{-1}(n) + v(-\infty) h_{-1}(\infty).$$

Offenbar ist die Faltung die zentrale Operation von linearen, verschiebungsinvarianten (LTI) Systemen.

LTI-Systeme (linear time-invariant systems) werden oft kurz nur lineare Filter genannt.

Unter linearer Filterung versteht man daher auch die lineare Faltung!

Reaktionen auf beliebige Signale

Beschreibung mit Hilfe der Übertragungsfunktionen

Überlagerung von allgemeinen Exponentialfunktionen:

Setzt man – wie bereits zuvor – Zeit- bzw. Verschiebungsinvarianz voraus, so kann man aufgrund des Überlagerungssatzes und der Eigenschaft, dass Exponentialfunktionen **Eigenfunktionen** von linearen, verschiebungsinvarianten Systemen sind, für ...

□ ... kontinuierliche Signale und Systeme herleiten:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{s = \sigma + j\omega, \\ \omega = -\infty}}^{\infty} V(s) e^{st} ds$$

... Reaktion auf $V e^{st}$ ist $H(s) V e^{st}$...

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{s = \sigma + j\omega, \\ \omega = -\infty}}^{\infty} H(s) V(s) e^{st} ds$$

... Definition der Rücktransf. beachten ...

$$= \mathcal{L}^{-1} \{ V(s) H(s) \}.$$

□ ... diskrete Signale und Systeme herleiten:

$$v(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint V(z) z^n \frac{dz}{z}$$

... Reaktion auf $V z^n$ ist $H(z) V z^n$...

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) V(z) z^n \frac{dz}{z}$$

... Definition der Rücktransf. beachten ...

$$= \mathcal{Z}^{-1} \{ V(z) H(z) \}.$$

Überlagerung von harmonischen Exponentialfunktionen – Teil 1:

Analog zu den Überlegungen für allgemeine Exponentialfunktionen findet man für harmonische Exponentialfunktionen (= Eigenfunktionen von LTI-Systemen) für ...

□ ... kontinuierliche Signale und Systeme:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

... Reaktion auf $V e^{j\omega t}$ ist $H(j\omega) V e^{j\omega t}$...

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

... Definition der Rücktransf. beachten ...

$$= \mathcal{F}^{-1} \{ V(j\omega) H(j\omega) \}.$$

□ ... diskrete Signale und Systeme:

$$v(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

... Reaktion auf $V e^{j\Omega n}$ ist $H(e^{j\Omega}) V e^{j\Omega n}$...

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

... Definition der Rücktransf. beachten ...

$$= \mathcal{F}^{-1} \{ V(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \}.$$

Damit die harmonischen Exponentialfunktionen auch Eigenfunktionen von Systemen sind, müssen diese – wie auch zuvor – sowohl linear als auch verschiebungsinvariant sein!

Überlagerung von harmonischen Exponentialfunktionen – Teil 2:

Fordert man zusätzlich von den Eingangssignalen, dass diese periodisch sein sollen, so kann man mit Hilfe des Frequenzgangs und der

- Fourier-Reihenentwicklung folgenden Zusammenhang finden:

$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

... Reaktion auf $V e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$ ist $H(j\mu \frac{2\pi}{T}) V e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$...

$$y(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} H\left(j\mu \frac{2\pi}{T}\right) c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

- Diskreten Fourier-Transformation folgenden Zusammenhang finden:

$$v(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\Omega n}$$

... Reaktion auf $V e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$ ist $H(e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}) V e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$...

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} H\left(e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}\right) V_M(\mu) e^{j\Omega n}$$

... Definition der Rücktransf. beachten ...

$$= \text{IDFT} \left\{ V_M(\mu) H\left(e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}\right) \right\}.$$

Reihenentwicklung für $y(t)$ mit $c_{\mu}^{(y)} = c_{\mu} H(j\mu \frac{2\pi}{T})!$

Bemerkungen – Teil 1:

- Vergleicht man die **Fourier-Reihenentwicklung** des Systemeingangs mit der des Systemausgangs, so erhält man

$$H\left(j\mu \frac{2\pi}{T}\right) = \frac{c_{\mu}^{(y)}}{c_{\mu}}.$$

- Ähnliches gilt für die **inversen Diskreten Fourier-Transformationen**. Man erhält

$$H\left(e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}\right) = \frac{Y_M(\mu)}{V_M(\mu)}.$$

- Das gleiche gilt ganz allgemein: Wenn als Eingangssignal $v(t) = V e^{j\omega_0 t}$ bzw. $v(n) = V e^{j\Omega_0 n}$ an einem linearen, verschiebungsinvarianten System anliegt, dann erhält man am Ausgang des Systems

$$y(t) = \underbrace{H(j\omega)}_Y V e^{j\omega_0 t} = Y e^{j\omega_0 t}$$

bzw.

$$y(n) = \underbrace{H(e^{j\Omega_0})}_Y V e^{j\Omega_0 n} = Y e^{j\Omega_0 n}.$$

Da heißt, es gilt stets $H(\dots) = Y / V$ mit den komplexen Amplituden V und Y .

Bemerkungen – Teil 2:

- Weiterhin gelten natürlich auch folgende Beziehungen für kontinuierliche Signale

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\},$$

bzw. für diskrete Signale

$$v(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{V(z)\},$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}.$$

Auch damit erhält man dann

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{v(t)\}}$$

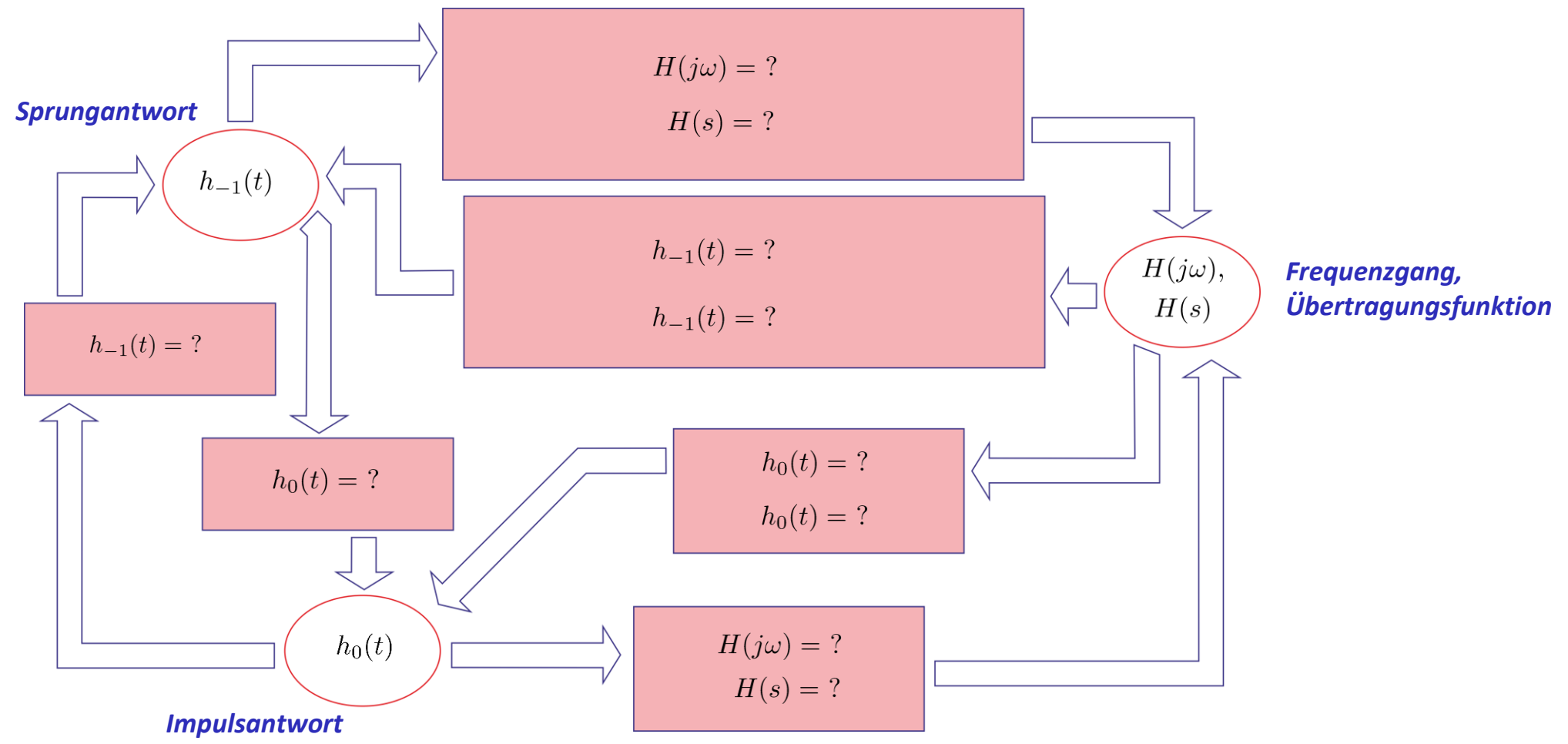
bzw.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(n)\}}{\mathcal{Z}\{v(n)\}}.$$

Reaktionen auf beliebige Signale

Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systembeschreibungen (kontinuierlich)

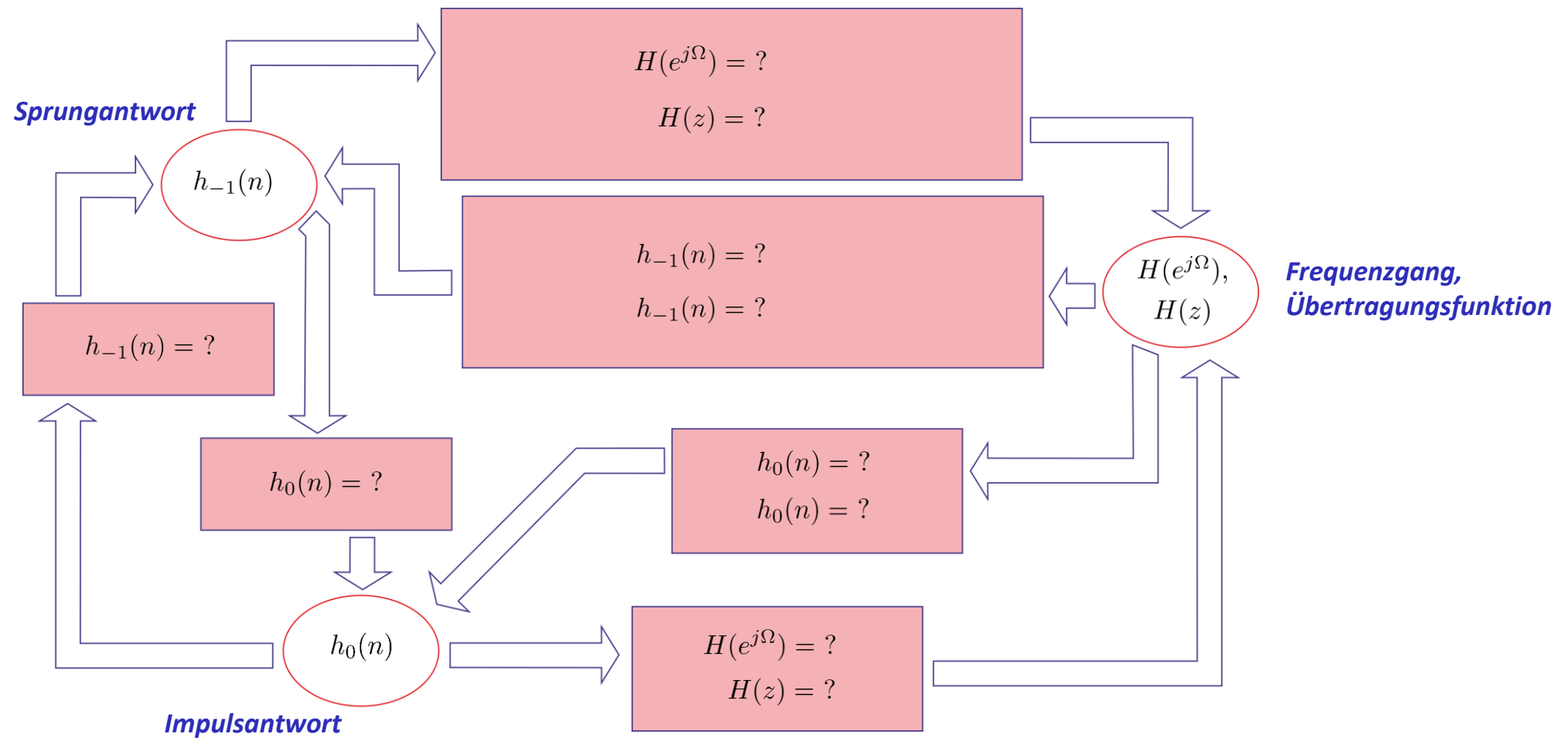
Übersicht über die Zusammenhänge für kontinuierliche Systeme:



Reaktionen auf beliebige Signale

Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systembeschreibungen (diskret)

Übersicht über die Zusammenhänge für diskrete Systeme:



Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort – Teil 1

Allgemeines:

- Offenbar kann das Ausgangssignal $y(\dots)$ aus dem Eingangssignal $v(\dots)$ mit Hilfe jeder der zuvor genannten Systemkenngrößen bestimmt werden.
- Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass die einzelnen **Systemkenngrößen nicht unabhängig** voneinander sein können. Es müsste möglich sein, die einzelnen Kenngrößen ineinander zu überführen.

Herleitung – Teil 1:

Bei den Überlegungen des Abschnitt „Elementarsignale“ wurde die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion bzw. Impulsfolge eingeführt. Es gilt für ...

- ... kontinuierliche Signale:

$$v(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau) \delta_0(t - \tau) d\tau.$$

- ... für diskrete Signale:

$$v(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) \gamma_0(n - \kappa).$$

Herleitung – Teil 2:

Dieser Zusammenhang gilt natürlich auch für die Sprungfunktion bzw. – folge als Signal, d.h. $v(t) = \delta_{-1}(t)$ bzw. $v(n) = \gamma_{-1}(n)$. In diesem Fall gilt für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$\delta_{-1}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta_{-1}(\tau) \delta_0(t - \tau) d\tau$$

... Einsetzen der Sprungfunktion ...

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} 1 \delta_0(t - \tau) d\tau$$

... Substituieren von $x = t - \tau$ und $-dx = d\tau$...

$$= \int_{x=t}^{-\infty} \delta_0(x) (-dx)$$

... Substituieren von $x = \tau$ und Vertauschen der

$$= \int_{\tau=-\infty}^t \delta_0(\tau) d\tau$$

Integrationsgrenzen ...

□ ... diskrete Signale:

$$\gamma_{-1}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \gamma_{-1}(\kappa) \gamma_0(n - \kappa)$$

... Einsetzen der Sprungfunktion ...

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} 1 \gamma_0(n - \kappa)$$

... Ändern der Summationsvariable ...

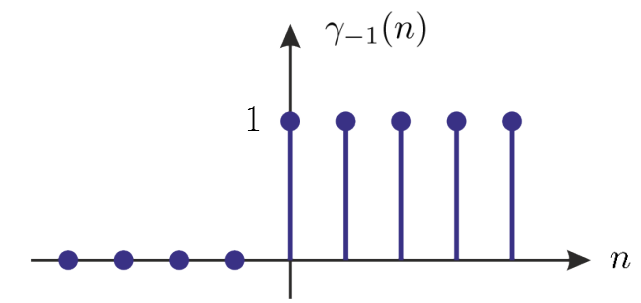
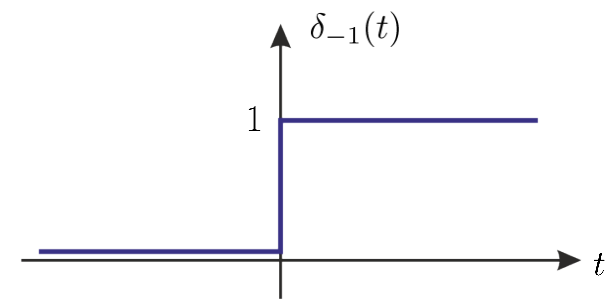
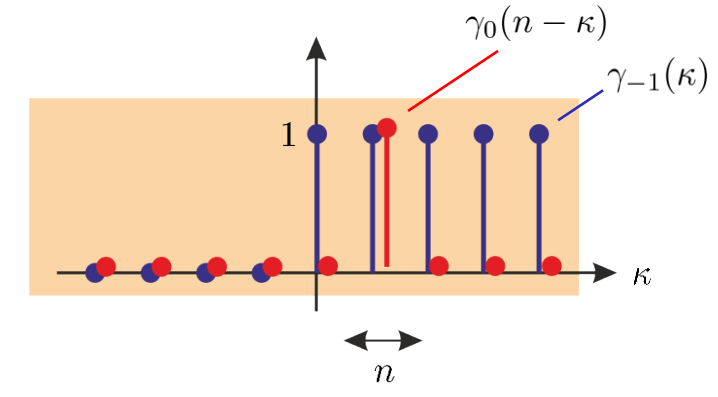
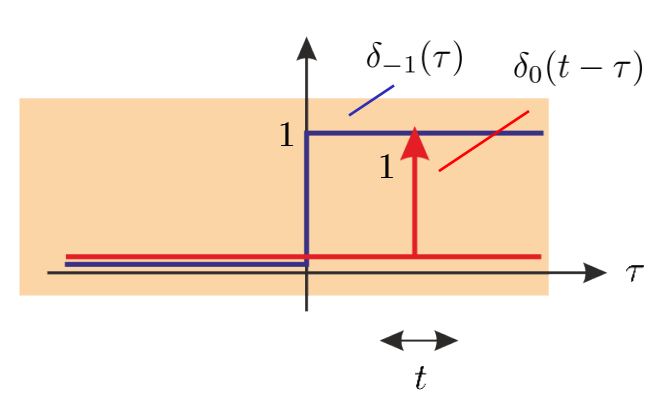
$$= \sum_{\kappa=-\infty}^n \gamma_0(\kappa)$$

Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort – Teil 3

Herleitung – Teil 3:

Bildliche Veranschaulichung:



Herleitung – Teil 4:

Als Ergebnis erhält man für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$\delta_{-1}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \delta_0(\tau) d\tau$$

□ ... diskrete Signale:

$$\gamma_{-1}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n \gamma_0(\kappa)$$

Für die Systemantworten darauf ergibt sich für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$S\{\delta_{-1}(t)\} = S\left\{\int_{\tau=-\infty}^t \delta_0(\tau) d\tau\right\}$$

□ ... diskrete Signale:

$$S\{\gamma_{-1}(n)\} = S\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^n \gamma_0(\kappa)\right\}$$

$$S\{\delta_{-1}(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^t S\{\delta_0(\tau)\} d\tau$$

$$S\{\gamma_{-1}(n)\} = \sum_{\kappa=-\infty}^n S\{\gamma_0(\kappa)\}$$

$$h_{-1}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h_0(\tau) d\tau.$$

$$h_{-1}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n h_0(\kappa).$$

Herleitung – Teil 5:

Zusammengefasst kann man erkennen, dass für lineare, verschiebungsinvariante Systeme, die Sprungantwort durch Integration bzw. Summation aus der Impulsantwort berechnet werden kann. Es gilt für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$h_{-1}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h_0(\tau) d\tau.$$

Sprungantwort *Impulsantwort*

□ ... diskrete Systeme:

$$h_{-1}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n h_0(\kappa).$$

Sprungantwort *Impulsantwort*

Herleitung – Teil 6:

Auch die „Umkehrung“ des zuvor gefundenen Zusammenhangs ist möglich. So haben wir bereits gezeigt, dass die (verallgemeinerte) Ableitung des Sprungs der Dirac-Stoß ist, d.h. es gilt:

$$\delta_0(t) = D\{\delta_{-1}(t)\}.$$

Bestimmt man hierzu die Systemfunktion, so ergibt sich:

$$S\{\delta_0(t)\} = S\{D\{\delta_{-1}(t)\}\}$$

$$S\{\delta_0(t)\} = D\{S\{\delta_{-1}(t)\}\}$$

$$h_0(t) = D\{h_{-1}(t)\}.$$

Bei Stetigkeit von $h_{-1}(t)$ gilt schließlich:

$$h_0(t) = \frac{dh_{-1}(t)}{dt}.$$

Sprungantwort ←

← *Impulsantwort*

Herleitung – Teil 7:

Analog kann für diskrete Systeme folgender Zusammenhang wieder „hervorgeholt“ werden:

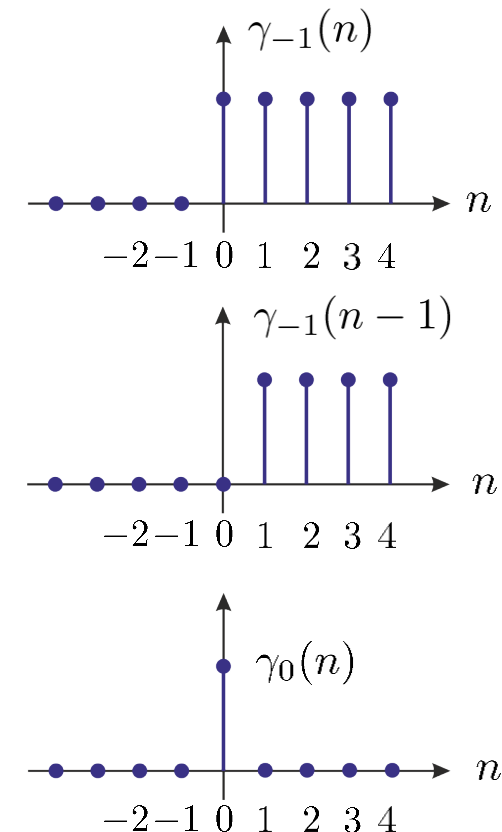
$$\gamma_0(n) = \gamma_{-1}(n) - \gamma_{-1}(n - 1).$$

Bestimmt man hier wieder die Systemantworten, so erhält man:

$$\mathcal{S}\{\gamma_0(n)\} = \mathcal{S}\{\gamma_{-1}(n)\} - \mathcal{S}\{\gamma_{-1}(n - 1)\}$$

$$h_0(n) = h_{-1}(n) - h_{-1}(n - 1)$$

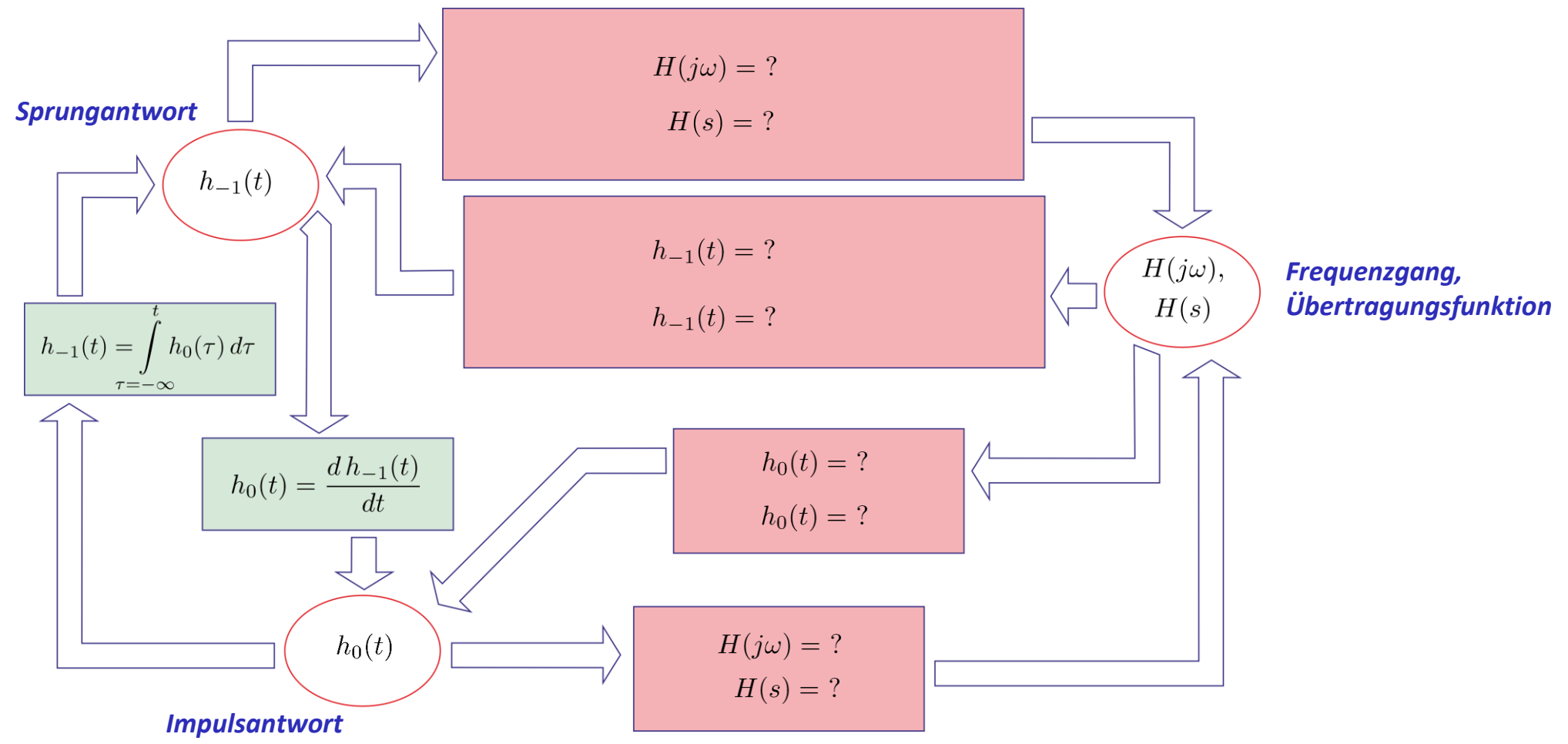
D.h. die Impulsantwort geht aus der Differenz zweier um einen „Takt“ verschobenen Sprungantworten hervor. Wieder ist also die Differenzbildung die Umkehrung der Summation für diskrete Signale bzw. Systeme.



Reaktionen auf beliebige Signale

Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systembeschreibungen (kontinuierlich)

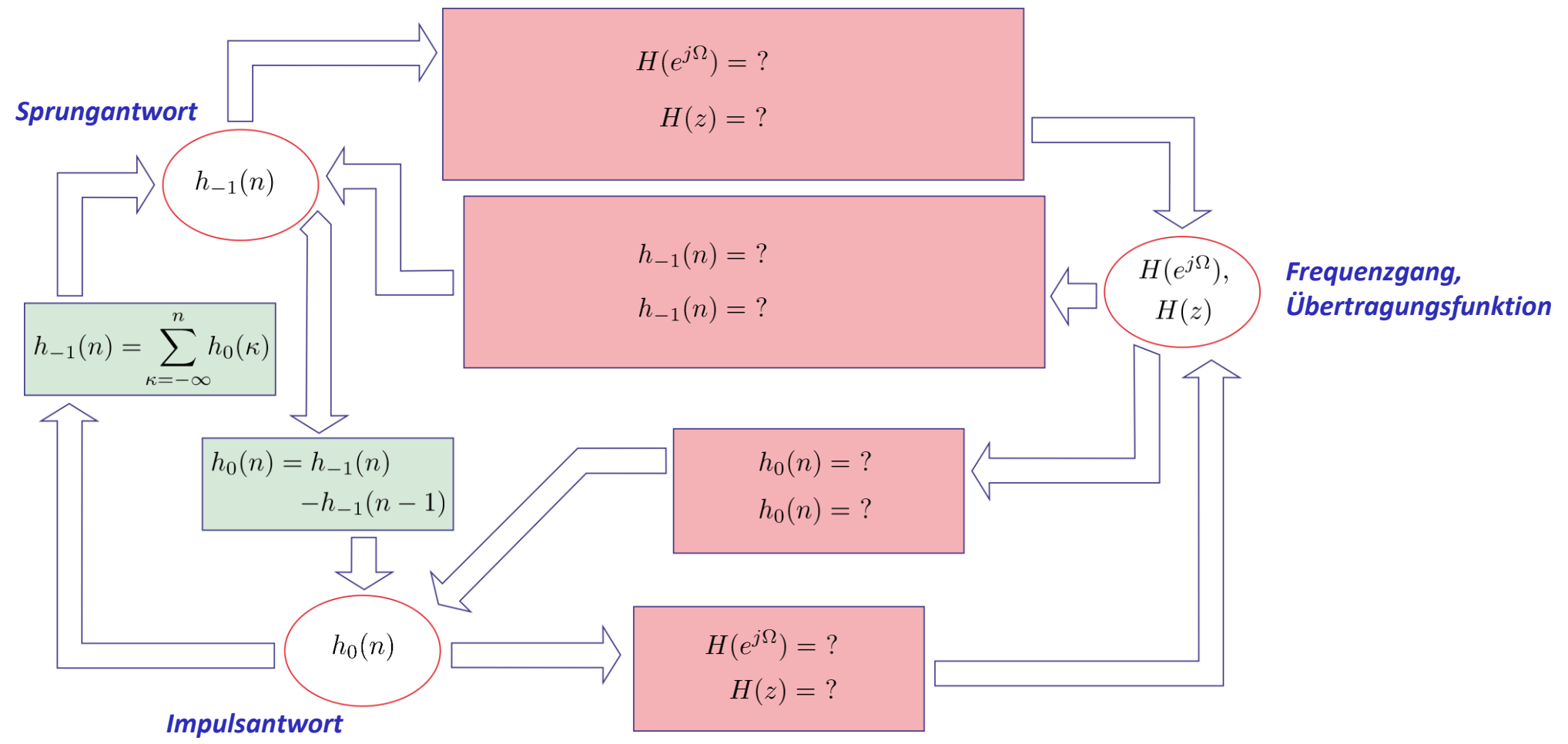
Übersicht über die Zusammenhänge für kontinuierliche Systeme:



Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systembeschreibungen (diskret)

Übersicht über die Zusammenhänge für diskrete Systeme:



Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Herleitung:

Bei den Überlegungen zur Laplace- bzw. z-Transformation haben wir folgende Beziehungen gefunden (Faltungssätze):

- Für kontinuierliche Signale bzw. Systeme:

$$y(t) = v(t) * h_0(t),$$

$$Y(s) = V(s) H(s).$$

- Weiterhin gelten folgende Transformationen:

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\},$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

- Daraus ergibt sich:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h_0(t)\},$$

$$h_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}.$$

- Für diskrete Signale bzw. Systeme:

$$y(n) = v(n) * h_0(n),$$

$$Y(z) = V(z) H(z).$$

- Weiterhin gelten folgende Transformationen:

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\},$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}.$$

- Daraus ergibt sich:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_0(n)\},$$

$$h_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}.$$

Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Frequenzgang

Herleitung:

Bei den Überlegungen zur Fourier-Transformation haben wir folgende Beziehungen gefunden (Faltungssätze):

- Für kontinuierliche Signale bzw. Systeme:

$$y(t) = v(t) * h_0(t),$$

$$Y(j\omega) = V(j\omega) H(j\omega).$$

- Weiterhin gelten folgende Transformationen:

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\},$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}.$$

- Daraus ergibt sich:

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h_0(t)\},$$

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}.$$

- Für diskrete Signale bzw. Systeme:

$$y(n) = v(n) * h_0(n),$$

$$Y(e^{j\Omega}) = V(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}).$$

- Weiterhin gelten folgende Transformationen:

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\},$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{y(n)\}.$$

- Daraus ergibt sich:

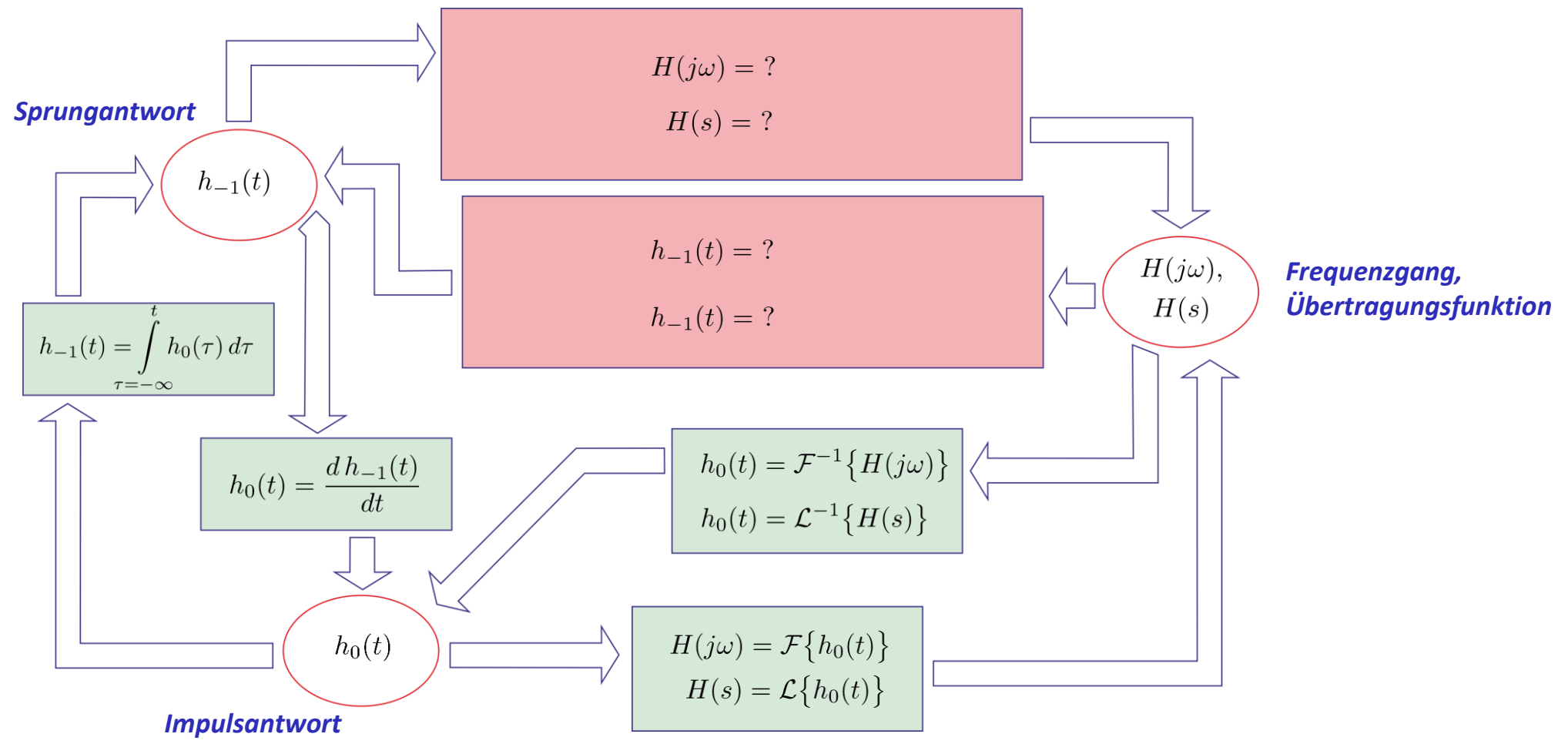
$$H(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{h_0(n)\},$$

$$h_0(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\Omega})\}.$$

Reaktionen auf beliebige Signale

Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systembeschreibungen (kontinuierlich)

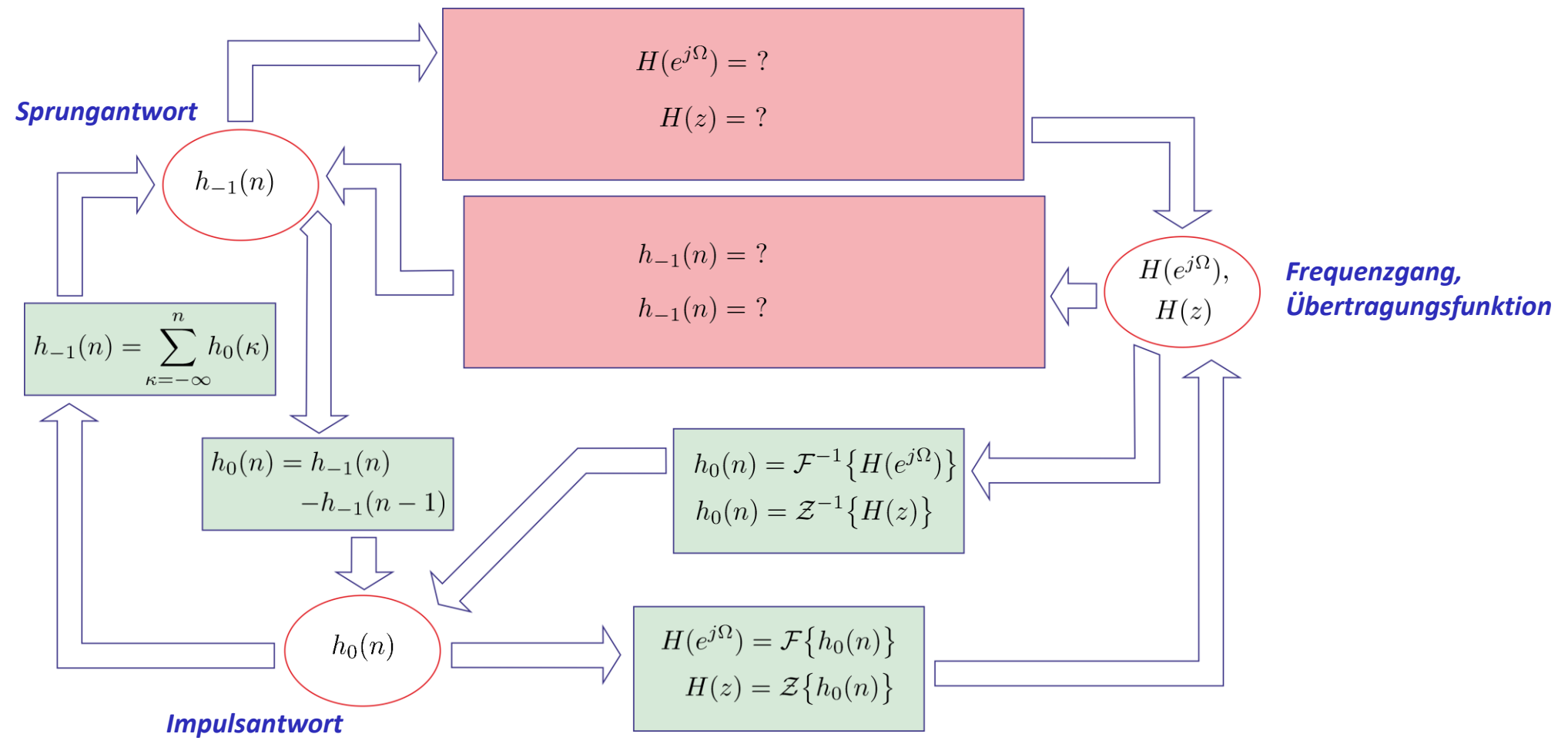
Übersicht über die Zusammenhänge für kontinuierliche Systeme:



Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenhänge zwischen den einzelnen Systembeschreibungen (diskret)

Übersicht über die Zusammenhänge für diskrete Systeme:



Zusammenhang zwischen Sprungantwort und Übertragungsfunktion

Herleitung:

Bei den Überlegungen zur Laplace- bzw. z-Transformation haben wir folgende Beziehungen gefunden (Integration):

- Für kontinuierliche Signale bzw. Systeme:

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} V(s).$$

- Da die Impuls- und die Sprungantwort über eine solche Integrationsbeziehung

$$h_{-1}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h_0(\tau) d\tau$$

verknüpft sind, gilt:

$$\frac{1}{s} H(s) = \mathcal{L}\{h_{-1}(t)\}.$$

- Für diskrete Signale bzw. Systeme:

$$\mathcal{Z}\{v(n)\} = V(z),$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^n v(\kappa)\right\} = \frac{V(z)}{1 - z^{-1}}.$$

- Da die Impuls- und die Sprungantwort über eine solche Integrationsbeziehung

$$h_{-1}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n h_0(\kappa)$$

verknüpft sind, gilt:

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} H(z) = \mathcal{Z}\{h_{-1}(n)\}.$$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Auf welche Weise stehen die Impuls- und die Sprungantwort eines linearen, verschiebungsinvarianten Systems in Verbindung?

.....
.....

- Wie stehen die Fourier-Transformierte der Sprungantwort und der Frequenzgang eines linearen, verschiebungsinvarianten Systems in Verbindung?

.....
.....

- Wie kann man die Impulsantwort eines Systems messen bzw. schätzen?

.....
.....
.....

Sprungantwort und Frequenzgang – Teil 1

Kontinuierliche Signale und Systeme – Teil 1:

Für die Fourier-Transformierte der Sprungfunktion haben wir folgendes Ergebnis erhalten (vgl. Ende des Abschnitts „Laplace- und z-Transformation“):

$$\mathcal{F}\{\delta_{-1}(t)\} = \pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Transformiert man dieses Ergebnis zurück in den „Zeit“-Bereich, so erhält man:

$$\delta_{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

Bestimmt man dafür die Sprungantwort eines linearen, verschiebungsinvarianten Systems, so erhält man:

$$S\{\delta_{-1}(t)\} = S\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega \right\}$$

... Vertauschen von Integration und Systemantwort ...

$$S\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] S\{e^{j\omega t}\} d\omega$$

Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Sprungantwort und Frequenzgang – Teil 2

Kontinuierliche Signale und Systeme – Teil 2:

Fortsetzung:

$$S\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] S\{e^{j\omega t}\} d\omega$$

... Einsetzen der einzelnen Systemantworten ...

$$h_{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

... Aufspalten der Summe im Integral ...

$$h_{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \pi \delta_0(\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{H(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

... Ausblendeigenschaft des Dirac-Stoßes verwenden ...

$$h_{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \pi H(0) \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega) \overset{=1}{e^{j0t}} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{H(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

... Flächeneigenschaft und Transformationsdefinition verwenden ...

$$h_{-1}(t) = \frac{H(0)}{2} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{H(j\omega)}{j\omega} \right\}.$$

Sprungantwort und Frequenzgang – Teil 3

Kontinuierliche Signale und Systeme – Teil 3:

Als Ergebnis erhält man schließlich durch Anwendung der Fourier-Transformation:

$$h_{-1}(t) = \frac{H(0)}{2} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{H(j\omega)}{j\omega} \right\}$$

... beide Seiten Fourier-Transformieren ...

$$\mathcal{F} \left\{ h_{-1}(t) - \frac{H(0)}{2} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{H(j\omega)}{j\omega} \right\} \right\}$$

Frequenzgang bei der Frequenz 0 = Integral über die Impulsantwort $H(0) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0(t) dt$

$$\mathcal{F} \left\{ h_{-1}(t) - \frac{H(0)}{2} \right\} = \frac{H(j\omega)}{j\omega}$$

Frequenzgang

Sprungantwort

Sprungantwort und Frequenzgang – Teil 4

Diskrete Signale und Systeme – Teil 4:

Eine analoge Herleitung kann für diskrete Systeme durchgeführt werden. Wir starten zunächst mit der Fourier-Transformierten der Sprungfolge (vgl. wieder Ende des Abschnitts „Laplace- und z-Transformation“):

$$\mathcal{F}\{\gamma_{-1}(n)\} = \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \lambda 2\pi) + \frac{1}{2j} \cot\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Den rechten Teil dieser Gleichung formen wir zunächst noch ein wenig um:

... Einsetzen der cot-Definition Umwandeln der cos- und sin-Terme ...

$$\frac{1}{2j} \cot\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2j} \frac{\cos(\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2j} \frac{\frac{1}{2}(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}})}{\frac{1}{2j}(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}})} + \frac{1}{2}$$

... Ausklammern von $e^{j\Omega/2}$ Gemeinsamer Nenner ...

$$= \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} + \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

... Vereinfachen ...

$$= \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Sprungantwort und Frequenzgang – Teil 5

Diskrete Signale und Systeme – Teil 5:

Durch die Umformung ergibt sich nun

$$\mathcal{F}\{\gamma_{-1}(n)\} = \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \lambda 2\pi) + \frac{1}{2j} \cot\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

... Einsetzen des Ergebnisses der letzten Folie ...

$$= \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \lambda 2\pi) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Nach einer Fourier-Rücktransformation erhält man:

$$\gamma_{-1}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \lambda 2\pi) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \right] e^{j\Omega n} d\Omega.$$

Nach einer zum kontinuierlichen Fall sehr ähnlichen Umformung (Systemantwort und dann Umformen) kommt man zu folgendem Zusammenhang:

$$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} H(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\left\{h_{-1}(n) - \frac{H(e^{j0})}{2}\right\}.$$

Diskrete Signale und Systeme – Teil 6:

Bemerkungen:

- Die Terme $H(0)$ bzw. $H(e^{j0}) = H(1)$ beschreiben die Fähigkeit eines Systems zur Übertragung von konstanten Signalanteilen (= Komponenten bei der Frequenz $\omega = 0$ bzw. $\Omega = 0$). Hierfür gilt im ...

- ... Kontinuierlichen:

$$\begin{aligned}
 H(0) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0(t) \overbrace{e^{j0t}}^{=1} dt \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0(t) dt \\
 &= h_{-1}(\infty).
 \end{aligned}$$

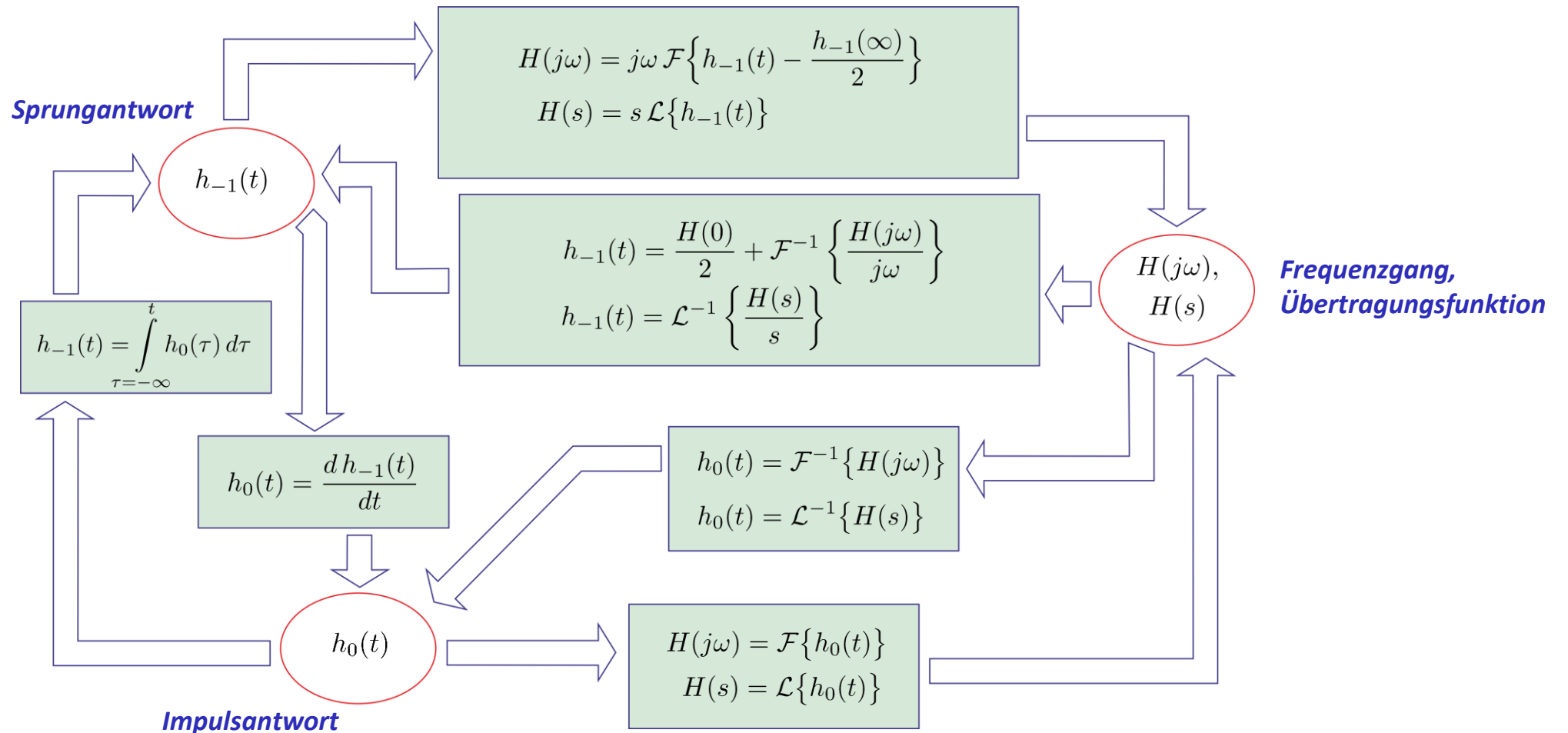
- ... Diskreten:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j0}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) \overbrace{e^{j0n}}^{=1} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) \\
 &= h_{-1}(\infty).
 \end{aligned}$$

Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenfassung – Teil 1

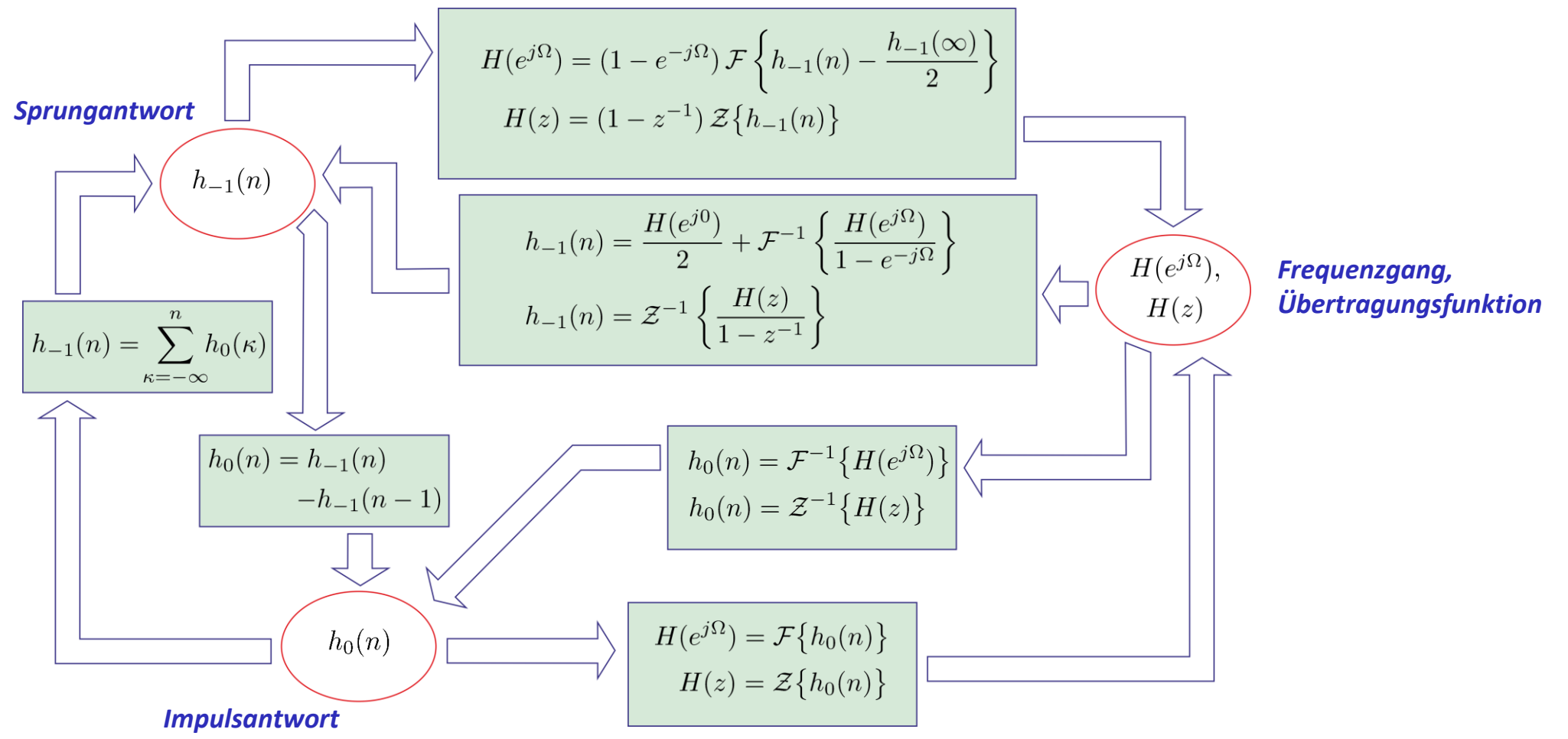
Übersicht über die Zusammenhänge für kontinuierliche Systeme:



Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Zusammenfassung – Teil 2

Übersicht über die Zusammenhänge für diskrete Systeme:



Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen

Beispiel

Aufgabe:

Gegeben sei folgende Impulsantwort:

$$h_0(n) = \gamma_0(n) + a \gamma_0(n - 4).$$

- Zeichnen Sie die Impulsantwort!
- Bestimmen Sie ...
 - ... die Sprungantwort und skizzieren Sie diese!
 - ... den Frequenzgang!
 - ... die Übertragungsfunktion!
- Bestimmen Sie die Nullstellen der Übertragungsfunktion für $a = 1$ und für $a = -1$!
- Skizzieren Sie den Frequenzgang für $a = 1$!
- Für was könnte solch ein Filter gut sein?

Lösung nach individueller Bearbeitung an der Tafel ...

Herleitung – Teil 1:

Im Grundlagenabschnitt wurde bereits die sog. BIBO-Stabilität eingeführt. Jetzt sind die Berechnungsweisen für die Ausgangssignale aus den Eingangssignalen bekannt und es können konkrete Forderungen an die Systemparameter abgeleitet werden. Für ein beschränktes Eingangssignal $|v(\dots)| \leq M_1 < \infty$ muss dann für ...

□ ... kontinuierliche Signale bzw. Systeme gelten:

$$|y(t)| = \left| \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau) h_0(t, \tau) d\tau \right|$$

... Abschätzung ...

$$\leq \int_{\tau=-\infty}^{\infty} |v(\tau) h_0(t, \tau)| d\tau$$

... Betragserlegung für Produkte ...

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} |v(\tau)| |h_0(t, \tau)| d\tau.$$

□ ... diskrete Signale bzw. Systeme gelten:

$$|y(n)| = \left| \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) h_0(n, \kappa) \right|$$

... Abschätzung ...

$$\leq \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |v(\kappa) h_0(n, \kappa)|$$

... Betragserlegung für Produkte ...

$$= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |v(\kappa)| |h_0(n, \kappa)|.$$

Herleitung – Teil 2:

Fortsetzung für ...

- ... kontinuierliche Signale bzw. Systeme gelten:

$$|y(t)| \leq \int_{\tau=-\infty}^{\infty} |v(\tau)| |h_0(t, \tau)| d\tau$$

... Abschätzung gemäß Annahme ...

$$\leq M_1 \int_{\tau=-\infty}^{\infty} |h_0(t, \tau)| d\tau$$

$$\leq M_2 < \infty.$$

- Hinreichende Bedingung:

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} |h_0(t, \tau)| d\tau \leq M_3 < \infty.$$

- ... diskrete Signale bzw. Systeme gelten:

$$|y(n)| \leq \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |v(\kappa)| |h_0(n, \kappa)|$$

... Abschätzung gemäß Annahme ...

$$\leq M_1 \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |h_0(n, \kappa)|$$

$$\leq M_2 < \infty.$$

- Hinreichende Bedingung:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |h_0(n, \kappa)| \leq M_3 < \infty.$$

BIBO (bounded input – bounded output) – Stabilität – Teil 3

Herleitung – Teil 3:

Fordert man zusätzlich noch Verschiebungsinvarianz, dann ergibt sich für

- ... kontinuierliche Signale bzw. Systeme:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |h_0(t)| dt \leq M_3 < \infty.$$

- ... diskrete Signale bzw. Systeme:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_0(n)| \leq M_3 < \infty.$$

Bei einem linearen System mit absolut integrierbarer bzw. summierbarer Impulsantwort liegt BIBO-Stabilität vor!

Bemerkungen – Teil 1:

- Man kann zeigen, dass diese Bedingungen auch **notwendig** sind. Systeme, welche die zuvor genannten Bedingungen nicht erfüllen, reagieren u.U. mit unbeschränkten Ausgängen auf beschränkte Eingangssignale und sind daher nicht stabil.
- Die genannten Bedingungen entsprechen denen für die **Existenz der Fourier-Transformation**. Dort sind diese aber nur hinreichend.

BIBO (bounded input – bounded output) – Stabilität – Teil 4

Bemerkungen – Teil 2:

- ❑ Aus der letzten Bemerkung folgt: Für ein BIBO-stabiles LTI-System existiert stets die Fourier-Transformierte $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h_0(t)\}$ bzw. $H(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{h_0(n)\}$.
- ❑ Der Umkehrschluss ist allerdings nicht richtig! Auch wenn man für ein LTI-System den Frequenzgang $H(j\omega)$ bzw. $H(e^{j\Omega})$ angeben kann, ist das System nicht notwendigerweise stabil!
- ❑ Für endliche lange, begrenzte Signale existieren stets Fourier-Transformierte, da diese Signale stets absolut integrierbar bzw. summierbar sind. Folgerung: ***Lineare Systeme mit endlich langer, beschränkter Impulsantwort sind stets stabil.***

Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen

Definition (Wiederholung) – Teil 1

Wiederholung aus dem ersten Vorlesungsabschnitt:

Wenn für $\mathbf{v}(\dots) = [v_0(\dots), \dots, v_l(\dots), \dots, v_{L-1}(\dots)]^T$ mit

$$v_l(\dots) \in \mathbb{R} \quad \forall l, t, n$$

stets auch für $\mathbf{y}(\dots) = [y_0(\dots), \dots, y_r(\dots), \dots, y_{R-1}(\dots)]^T$ gilt

$$y_r(\dots) \in \mathbb{R} \quad \forall r, t, n,$$

dann spricht man von einem **reellwertigen** System, sonst von einem **komplexwertigen** System.

Einbringen der Kenntnisse über LTI-Systeme – Teil 1

Für LTI-Systeme kann der Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgangssignalen mittels einer Faltung beschrieben werden.

Es gilt für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h_0(\tau) v(t - \tau) dt.$$

□ ... diskrete Signale:

$$y(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} h_0(\kappa) v(n - \kappa)$$

Definition (Wiederholung) – Teil 2

Einbringen der Kenntnisse über LTI-Systeme – Teil 2

Aus den Faltungszusammenhängen folgt unmittelbar: Wenn sowohl das Eingangssignal als auch das Ausgangssignal reellwertig ist, dann muss auch die Impulsantwort reellwertig sein.

Aus dieser Eigenschaft können einige hilfreiche Eigenschaften des Frequenzgangs und der Übertragungsfunktion von reellwertigen LTI-Systemen hergeleitet werden!

Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen

Symmetrien des Frequenzgangs

Übertragung der Symmetrieeigenschaften von Signal-Spektrum-Paaren:

Die für reelle Signale hergeleiteten Symmetrieüberlegungen können auf die Frequenzgänge von reellen Systemen wie folgt übertragen werden.

□ Es gilt für kontinuierliche Systeme:

$$\operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = \operatorname{Re}\{H(-j\omega)\},$$

gerade

$$\operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = -\operatorname{Im}\{H(-j\omega)\}.$$

ungerade

□ Es gilt für diskrete Systeme:

$$\operatorname{Re}\{H(e^{j\Omega})\} = \operatorname{Re}\{H(e^{-j\Omega})\},$$

gerade

$$\operatorname{Im}\{H(e^{j\Omega})\} = -\operatorname{Im}\{H(e^{-j\Omega})\}.$$

ungerade

Damit ergibt sich für den **Betrag** und die **Phase** für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|,$$

gerade

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arg\{H(-j\omega)\}.$$

ungerade

□ ... für diskrete Systeme:

$$|H(e^{j\Omega})| = |H(e^{-j\Omega})|,$$

gerade

$$\arg\{H(e^{j\Omega})\} = -\arg\{H(e^{-j\Omega})\}.$$

ungerade

Der Frequenzgang eines reellwertigen Systems ist hermite-symmetrisch!

Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen

Eigenschaften der Übertragungsfunktionen – Teil 1

Allgemeines – Teil 1:

Betrachtet man die Laplace- bzw. z-Transformation für reellwertige Impulsantworten, so ergibt sich für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-st} dt$$

... Reellwertigkeit der Impulsantwort ...

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0^*(t) e^{-st} dt.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) z^{-n}$$

... Reellwertigkeit der Impulsantwort ...

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0^*(n) z^{-n}.$$

Bestimmt man nun die Übertragungsfunktion mit der o.g. Besonderheit für die konjugiert komplexe Variable, so erhält man für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s^*) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0^*(t) e^{-s^*t} dt.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0^*(n) (z^*)^{-n}.$$

Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen

Eigenschaften der Übertragungsfunktionen – Teil 2

Allgemeines – Teil 2:

Fortsetzung für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\begin{aligned}
 H(s^*) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} h_0^*(t) \overbrace{e^{-s^*t}}^{=[e^{-st}]^*} dt \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} [h_0(t) e^{-st}]^* dt \\
 &= \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-st} dt \right]^* .
 \end{aligned}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\begin{aligned}
 H(z^*) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0^*(n) \overbrace{(z^*)^{-n}}^{=[z^{-n}]^*} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h_0(n) z^{-n}]^* \\
 &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) z^{-n} \right]^* .
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man damit für reellwertige, ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s^*) = H^*(s).$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H(z^*) = H^*(z).$$

Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen

Eigenschaften der Übertragungsfunktionen – Teil 3

Allgemeines – Teil 3 und Nullstellen reellwertiger Systeme:

Aus den Ergebnissen der letzten Folie folgt, dass für $s \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ für reellwertige, ...

□ ... kontinuierliche Systeme gilt:

$$H(s)|_{s \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

□ ... diskrete Systeme gilt:

$$H(z)|_{z \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin folgt aus den Ergebnissen eine wichtige Eigenschaft reellwertiger Systeme.

□ Für kontinuierliche Systeme:

Sei

$$H(s_0) = 0,$$

d.h. s_0 ist eine Nullstellen von $H(s)$. Dann muss auch gelten

$$H(s_0^*) = 0^* = 0.$$

Die „Nullstelle“ bei s_0 bedeutet, dass das Signal $v(t) = V e^{s_0 t}$ vom System unterdrückt bzw. nicht übertragen wird, d.h. $Y(s_0) = 0$!

□ Für diskrete Systeme:

Sei

$$H(z_0) = 0,$$

d.h. z_0 ist eine Nullstellen von $H(z)$. Dann muss auch gelten

$$H(z_0^*) = 0^* = 0.$$

Die „Nullstelle“ bei z_0 bedeutet, dass das Signal $v(n) = V z_0^n$ vom System unterdrückt bzw. nicht übertragen wird, d.h. $Y(z_0) = 0$!

Polstellen reellwertiger Systeme:

Analog zu den „Nullstellen“-Überlegungen erhält man für Polstellen ähnliche Ergebnisse.

□ Für kontinuierliche Systeme:

Sei

$$H(s_\infty) = \infty,$$

d.h. s_∞ ist eine Polstellen von $H(s)$. Dann muss auch gelten

$$H(s_\infty^*) = \infty.$$

□ Für diskrete Systeme:

Sei

$$H(z_\infty) = \infty,$$

d.h. z_∞ ist eine Polstellen von $H(z)$. Dann muss auch gelten

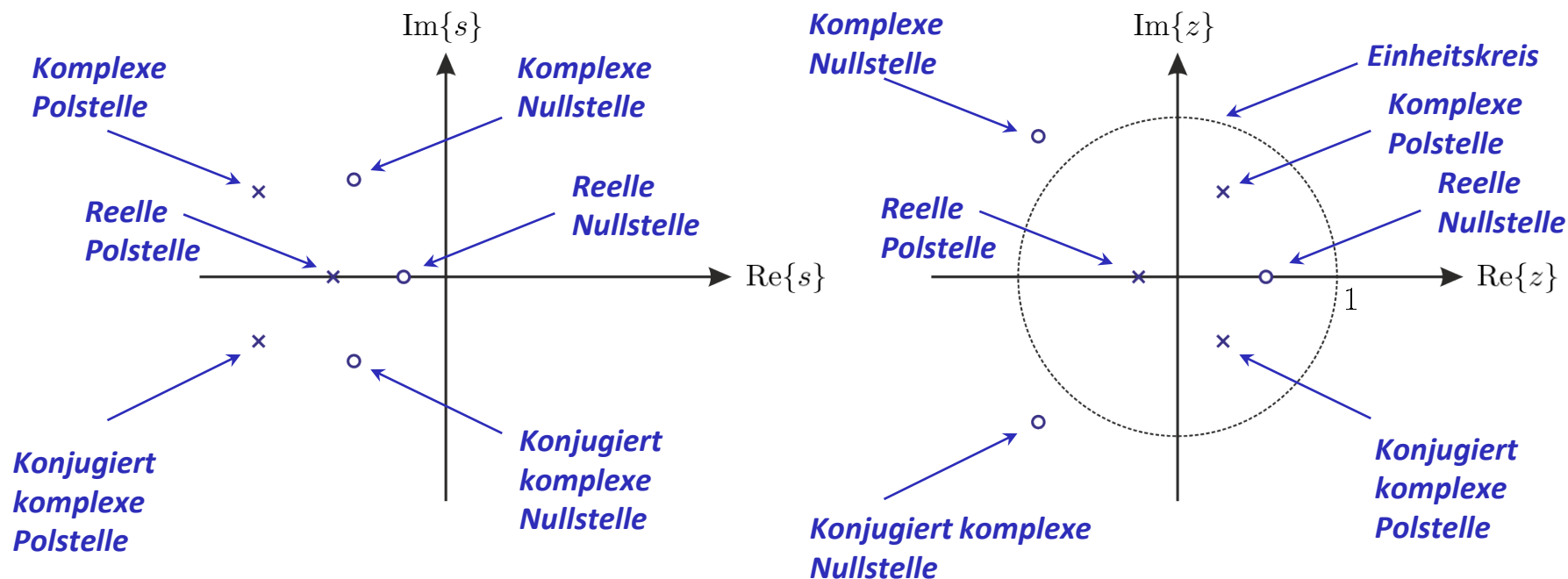
$$H(z_\infty^*) = \infty.$$

Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen

Eigenschaften der Übertragungsfunktionen – Teil 5

Zusammenfassung:

Komplexe Nullstellen und Polstellen treten bei reellwertigen Systemen stets in konjugiert-komplexen Paaren auf (wenn sie denn komplex sind). Reelle Nullstellen $s_0 \in \mathbb{R}$ bzw. $z_0 \in \mathbb{R}$ und reelle Polstellen $s_\infty \in \mathbb{R}$ bzw. $z_\infty \in \mathbb{R}$ haben (natürlich) keine „konjugierten Gegenstücke“.



Allgemeines:

Bekannt ist die Form der Systembeschreibung mittels **Differential- und Differenzgleichungen** aus der Schaltungssynthese (siehe Grundlagen der Elektrotechnik). Elektrische Netzwerke aus konstanten, linearen (idealisierten) Bauelementen (R, L, C) sind

- linear und zeitinvariant,
- kausal,
- dynamisch (und reellwertig)

und sie werden beschrieben durch sog. lineare „**Integro-Differentialgleichungen**“, die sich in eine lineare Differentialgleichung (DGL) k -ter Ordnung umformen lassen, wenn es nur eine Eingangsgröße $v(t)$ und nur eine Ausgangsgröße $y(t)$ gibt (sonst bleiben mehrere Differentialgleichungen bestehen).

Unter einer „Integro-Differentialgleichung“ versteht man eine Gleichung in der nicht nur die Funktion und deren Ableitungen, sondern auch noch Integrationen der Funktion auftauchen!

Abkürzungen:

Eingangssignal:

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} v(t),$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{d^2}{(dt)^2} v(t),$$

⋮

$$v^{(\mu)}(t) = \frac{d^\mu}{(dt)^\mu} v(t),$$

Ausgangssignal:

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} y(t),$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2}{(dt)^2} y(t),$$

⋮

$$y^{(\nu)}(t) = \frac{d^\nu}{(dt)^\nu} y(t).$$

Differentialgleichung k-ter Ordnung:

$$\beta_k y^{(k)}(t) + \beta_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \dots + \beta_0 y(t) = \alpha_m v^{(m)}(t) + \alpha_{m-1} v^{(m-1)}(t) + \dots + \alpha_0 v(t).$$

Solche Differentialgleichungen gibt es in vielen Bereichen, z.B. auch für mechanische Systeme. Im Allgemeinen gilt dabei $k \neq m$.

Beispiel – Teil 1:

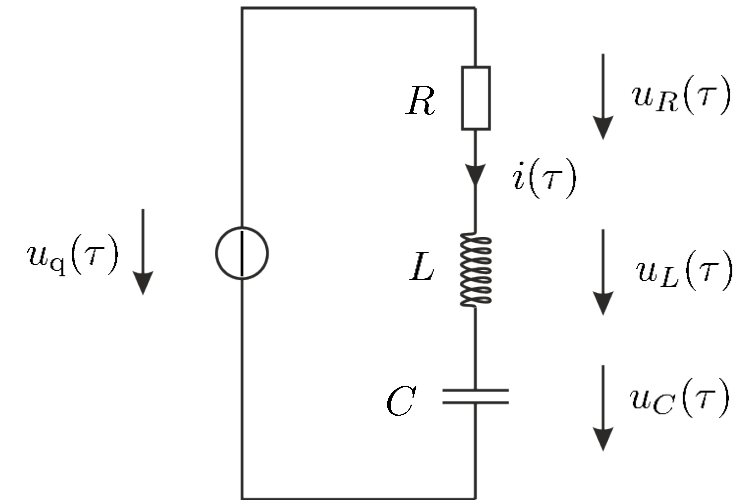
Reihenschwingkreis gemäß der rechts dargestellten Skizze
 (alle Größen sind dimensionsbehaftet!):

Eingangsgröße: $u_q(\tau)$

Ausgangsgröße: $i(\tau)$

Eine Schaltungsanalyse ergibt folgende Integro-Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 u_q(\tau) &= \underbrace{u_R(\tau)}_{= R i(\tau)} + \underbrace{u_L(\tau)}_{= L \frac{di(\tau)}{d\tau}} + \underbrace{u_C(\tau)}_{= \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau} \\
 &= R i(\tau) + L \frac{di(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$



Beispiel – Teil 2:

Folgende Normierungen werden eingeführt:

- Zeitliche Normierung:

$$\tau = t RC \quad \longrightarrow \quad t = \tau / RC \quad \dots \textit{dimensionslos!}$$

- Definition einer normierten Eingangsgröße:

$$v(t) = \frac{u_q(t RC)}{U_0} \quad \dots \textit{normierte Quellenspannung!}$$

- Definition einer normierten Ausgangsgröße:

$$y(t) = \frac{R i(t RC)}{U_0} \quad \dots \textit{normierte Spannung am Widerstand!}$$

Umformen der Integro-Differentialgleichung:

$$u_q(\tau) = R i(\tau) + L \frac{d i(\tau)}{d \tau} + \frac{1}{C} \int i(\tau) d \tau$$

$$\frac{u_q(t RC)}{U_0} = \frac{R i(t RC)}{U_0} + \frac{L \frac{d R / U_0 i(t RC)}{d t}}{R^2 C} + \int R / U_0 i(t RC) dt$$

Beispiel – Teil 3:

Umformen der Integro-Differentialgleichung (Fortsetzung):

$$\frac{u_q(t RC)}{U_0} = \frac{R i(t RC)}{U_0} + \frac{L \frac{d R/U_0 i(t RC)}{dt}}{R^2 C} + \int R/U_0 i(t RC) dt$$

... Einsetzen der normierten Größen ...

$$v(t) = y(t) + \frac{L}{R^2 C} \dot{y}(t) + \int y(t) dt$$

... Alle Größen einmal differenzieren ...

$$\dot{v}(t) = \frac{L}{R^2 C} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t)$$

... Normieren auf $\beta_2 = 1$...

$$\underbrace{\frac{RC}{L/R}}_{=\alpha_1} \dot{v}(t) = \underbrace{1}_{=\beta_2} \ddot{y}(t) + \underbrace{\frac{RC}{L/R}}_{=\beta_1} \dot{y}(t) + \underbrace{\frac{RC}{L/R}}_{=\beta_0} y(t).$$

... nach dieser Umformung bleibt natürlich die Frage nach den Vorteilen ...

... dies soll auf den folgenden Folien beantwortet werden ...

Umrechnung der Differentialgleichung in eine Übertragungsfunktion – Teil 1:

Bei LTI-Systemen gilt:

Bei Anregung des Systems mit $v(t) = V e^{st}$ erhält man am Ausgang $y(t) = H(s) V e^{st}$.
Weiterhin gilt für die Ableitung von Exponentialfunktionen

$$\frac{d^\nu}{(dt)^\nu} e^{st} = s^\nu e^{st}.$$

Damit kann die Differentialgleichung wie folgt umgestellt werden:

$$\beta_k y^{(k)}(t) + \beta_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \dots + \beta_0 y(t) = \alpha_m v^{(m)}(t) + \dots + \alpha_0 v(t)$$

... Exponentialfunktionen einsetzen ...

$$\beta_k H(s) V s^k e^{st} + \beta_{k-1} H(s) V s^{k-1} e^{st} + \dots + \beta_0 H(s) V e^{st} = \alpha_m V s^m e^{st} + \dots + \alpha_0 V e^{st}$$

... Gleiche Terme ($V e^{st}$) kürzen ...

$$\beta_k H(s) s^k + \beta_{k-1} H(s) s^{k-1} + \dots + \beta_0 H(s) = \alpha_m s^m + \dots + \alpha_0$$

... In Summenschreibweise ...

$$H(s) \sum_{\mu=0}^k \beta_\mu s^\mu = \sum_{\nu=0}^m \alpha_\nu s^\nu$$

Umrechnung der Differentialgleichung in eine Übertragungsfunktion – Teil 2:

Umstellung der Differentialgleichung (Fortsetzung):

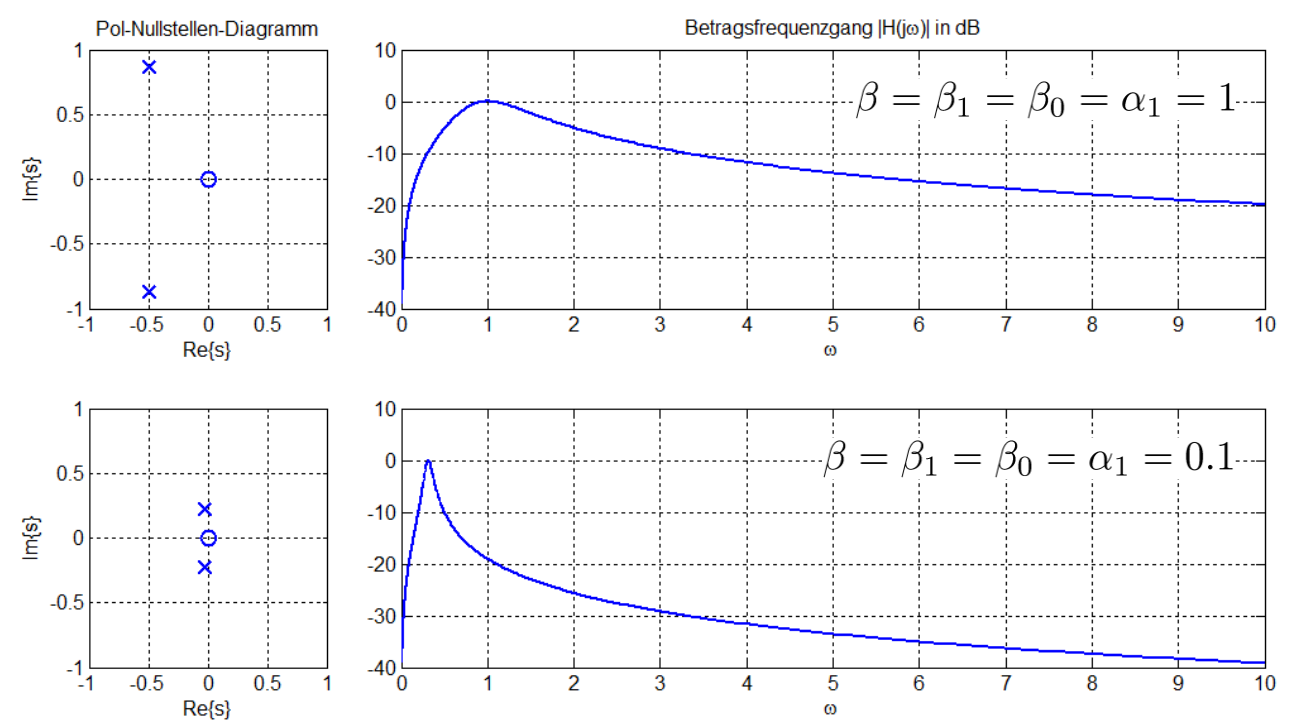
$$H(s) \sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} s^{\mu} = \sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu} s^{\nu}$$
$$H(s) = \frac{\sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu} s^{\nu}}{\sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} s^{\mu}}.$$

Die Übertragungsfunktion ist gebrochen-rational!

Diese Beschreibung gilt für zahlreiche praktisch relevante Systeme. Sie gilt aber z.B. nicht für Systeme mit verteilten „Bauelementen“ wie z.B. „Widerstandbelägen“ oder „Kapazitätsbelägen“, die in der Leitungstheorie vorkommen.

Beispiel – Teil 4:

Damit kann dann auf für das vorherige Beispiel die Übertragungsfunktion angegeben werden. Hieraus kann z.B. ein Pol-Nullstellen-Diagramm oder – ein entsprechendes Konvergenzgebiet vorausgesetzt – der Frequenzgang bestimmt werden.



$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \beta}$$

mit $\beta = \frac{RC}{L/R}$.

$$H(j\omega) = \frac{j\beta\omega}{-\omega^2 + j\beta\omega + \beta}$$

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Systembeschreibung durch Differential- und Differenzgleichungen – Teil 9

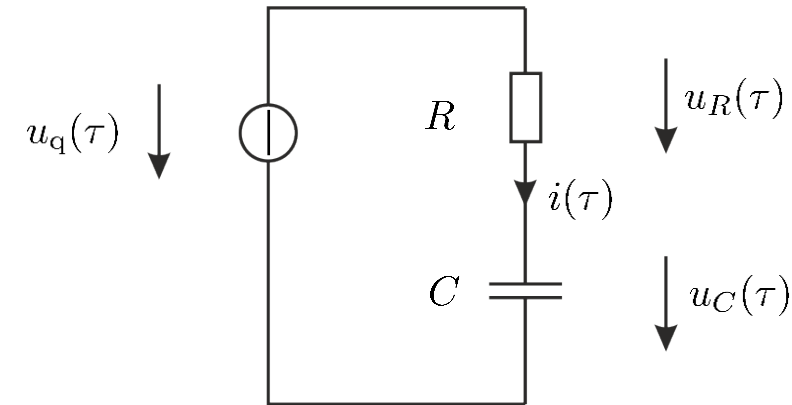
Aufgabe:

Gegeben sei folgende Schaltung ...

... mit dem normierten Eingangssignal $v(t) = \frac{u_q(t RC)}{U_0}$

... und dem normierten Ausgangssignal $y(t) = \frac{u_C(t RC)}{U_0}$.

- Bestimmen Sie die Differentialgleichung!
- Bestimmen Sie daraus die Übertragungsfunktion!
- Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang!
- Um welche Art von Filter handelt es sich?



Lösung nach individueller Bearbeitung an der Tafel ...

Diskrete Systeme – Teil 1:

Gebrochen-rationale Systeme sind ebenso wichtig für viele praktisch relevante **diskrete LTI-Systeme**. Ganz entsprechend gilt dort

$$H(z) = \frac{\sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu} z^{\nu}}{\sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} z^{\mu}}.$$

Beachtet man, dass $Y(z) = H(z) V(z)$ gilt, so kann man folgende Umformung vornehmen:

$$\beta_k z^k Y(z) + \beta_{k-1} z^{k-1} Y(z) + \dots + \beta_0 Y(z) = \alpha_m z^m V(z) + \dots + \alpha_0 V(z).$$

Beachtet man hier den Verschiebungssatz und transformiert obige Gleichung in den Zeitbereich, so ergibt sich folgende sogenannte **Differenzgleichung**:

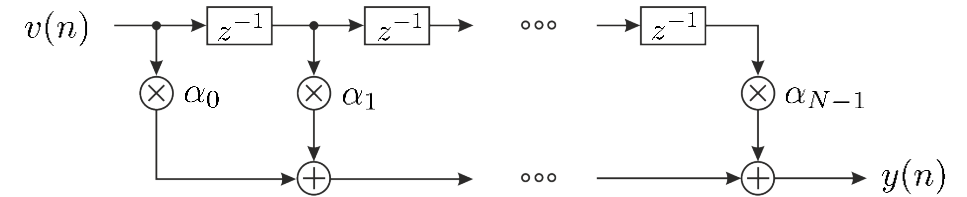
$$\begin{aligned} \beta_k y(n+k) + \beta_{k-1} y(n+k-1) + \dots + \beta_0 y(n) &= \alpha_m v(n+m) + \dots + \alpha_0 v(n) \\ \sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} y(n+\mu) &= \sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu} v(n+\nu). \end{aligned}$$

Aus der gebrochen-rationale Übertragungsfunktion können direkt die Koeffizienten der Differenzgleichung abgelesen werden (und umgekehrt).

Diskrete Systeme – Teil 2:

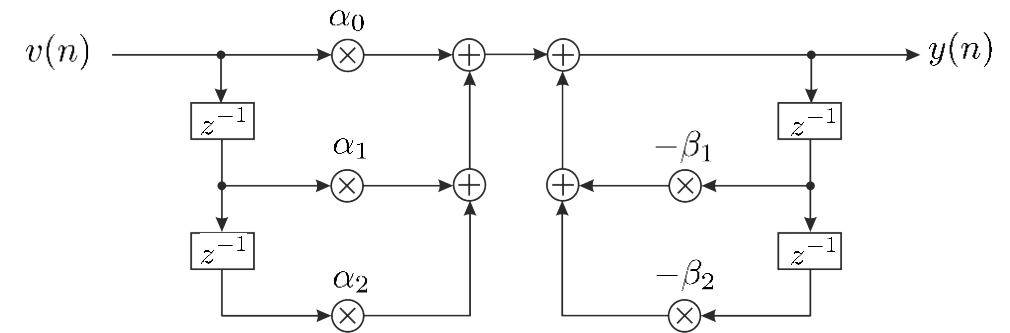
Beispiel für eine **FIR-Struktur** („FIR“ steht für „finite impulse response“)

$$y(n) = \alpha_0 v(n) + \alpha_1 v(n - 1) + \dots + \alpha_{N-1} v(n - N + 1)$$



Beispiel für eine **IIR-Struktur** („IIR“ steht für infinite impulse response“):

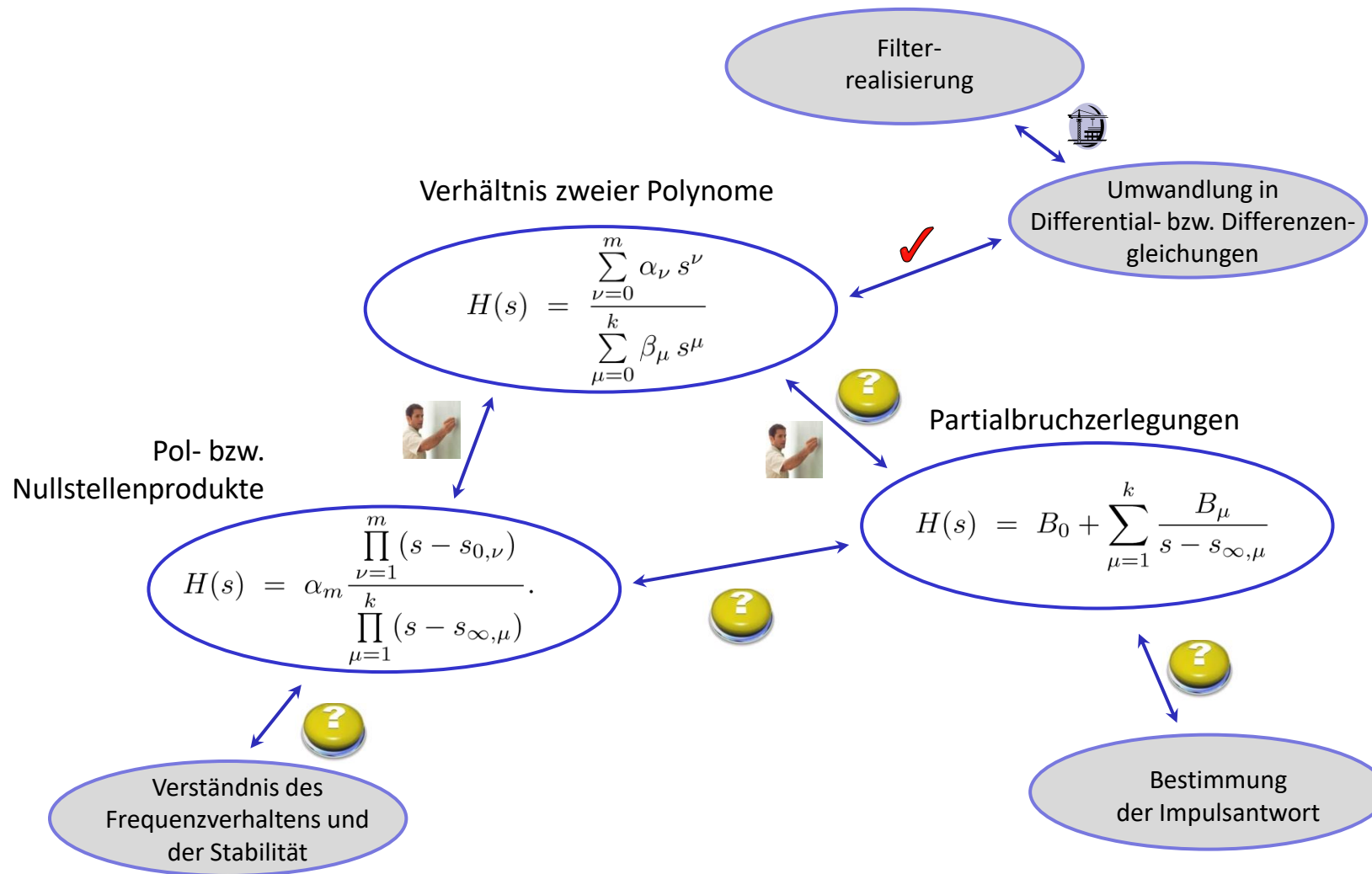
$$y(n) = \alpha_0 v(n) + \alpha_1 v(n - 1) + \alpha_2 v(n - 2) - \beta_1 y(n - 1) - \beta_2 y(n - 2)$$



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 1

Übersicht:



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 2

Darstellungsformen – Teil 1:

Bisher haben wir gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen als Quotient eines Zähler- und eines Nennerpolynoms dargestellt. Es galt für ...

- ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = \frac{\sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu} s^{\nu}}{\sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} s^{\mu}} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

- ... diskrete Systeme:

$$H(z) = \frac{\sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu} z^{\nu}}{\sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} z^{\mu}} = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

Polynome k-ten Grades besitzen k Nullstellen. Wir bezeichnen diese im Folgenden für ...

- ... kontinuierliche Systeme als

$$Z(s_{0,\nu}) = 0, \nu \in \{0, \dots, m\}$$

für die Nullstellen und

$$N(s_{\infty,\mu}) = 0, \mu \in \{0, \dots, k\}$$

für die Polstellen.

- ... diskrete Systeme als

$$Z(z_{0,\nu}) = 0, \nu \in \{0, \dots, m\}$$

für die Nullstellen und

$$N(z_{\infty,\mu}) = 0, \mu \in \{0, \dots, k\}$$

für die Polstellen.

Darstellungsformen – Teil 2:

Mit diesen Bezeichnungen können die Zähler- und Nennerpolynome **faktoriert** werden, d.h. man kann beide Polynome in folgende **Produktformen** bringen. Es gilt dann für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = \alpha_m \frac{\prod_{\nu=1}^m (s - s_{0,\nu})}{\prod_{\mu=1}^k (s - s_{\infty,\mu})}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H(z) = \alpha_m \frac{\prod_{\nu=1}^m (z - z_{0,\nu})}{\prod_{\mu=1}^k (z - z_{\infty,\mu})}$$

Der Vorfaktor α_m gilt dabei nur dann, wenn die Darstellung auf der vorherigen Seite so normiert wurde, dass gilt $\beta_k = 1$.

Wie bei den entsprechenden Folien zur Laplace- und z-Transformation unterscheiden wir im Folgenden noch zwischen „einfachen“ und „mehrfachen“ Null- bzw. Polstellen. Bezeichnet man die Vielfachheit der Pol- bzw. Nullstellen mit $k_\mu \geq 1$ bzw. $m_\nu \geq 1$, so gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{k_0} k_\mu = k \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=1}^{m_0} m_\nu = m.$$

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 4

Darstellungsformen – Teil 3:

Neben der Produktzerlegung kann auch – wieder wie im entsprechenden Abschnitt der Laplace- und z-Transformation bereits eingeführt – eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Sind nur einfache Polstellen vorhanden, d.h. es gilt $k_\mu = 1$ und $k_0 = k$, so ergibt sich für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = B_0 + \sum_{\mu=1}^k \frac{B_\mu}{s - s_{\infty,\mu}}$$

mit den Koeffizienten

$$B_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [H(s)] = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \alpha_k,$$

$$B_\mu = \lim_{s \rightarrow s_{\infty,\mu}} [H(s) (s - s_{\infty,\mu})].$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H(z) = B_0 + \sum_{\mu=1}^k \frac{B_\mu z}{z - z_{\infty,\mu}}$$

mit den Koeffizienten

$$B_0 = H(0) = \frac{\alpha_0}{\beta_0},$$

$$B_\mu = \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\mu}} \left[\frac{H(z)}{z} (z - z_{\infty,\mu}) \right].$$

Voraussetzung für die Gültigkeit der Bestimmung von B_0 ist, dass der Grad des Zählerpolynoms kleiner oder maximal gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist!

Zu beachten ist außerdem, dass für diese Umstellung lediglich die Polstellen, nicht aber die Nullstellen bekannt sein müssen (die Information darin „wandert“ in die Koeffizienten B_μ)!

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 5

Darstellungsformen – Teil 4:

Sind auch mehrfache Polstellen vorhanden, so entsteht wieder die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung, d.h. es gilt für ...

- ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = B_0 + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_{\mu}} \frac{B_{\mu,\kappa}}{(s - s_{\infty,\mu})^{\kappa}}$$

mit den Koeffizienten

$$B_{\mu,\kappa} = \lim_{s \rightarrow s_{\infty,\mu}} \left[\frac{d^{k_{\mu}-\kappa}}{(ds)^{k_{\mu}-\kappa}} \left[H(s) (s - s_{\infty,\mu})^{\kappa} \right] \right] \frac{1}{(k_{\mu} - \kappa)!}$$

- ... diskrete Systeme:

$$H(z) = B_0 + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_{\mu}} \frac{B_{\mu,\kappa} z}{(z - z_{\infty,\mu})^{\kappa}}$$

mit den Koeffizienten

$$B_{\mu,\kappa} = \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\mu}} \left[\frac{d^{k_{\mu}-\kappa}}{(dz)^{k_{\mu}-\kappa}} \left[\frac{H(z)}{z} (z - z_{\infty,\mu})^{\kappa} \right] \right] \frac{1}{(k_{\mu} - \kappa)!}$$

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 6

Zugehörige Impulsantworten – Teil 1:

Zur Wiederholung ...

□ ... für kontinuierliche Systeme:

$$\mathcal{L}\{e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s - s_\infty}$$

für $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$.

□ ... diskrete Systeme:

$$\mathcal{Z}\{z_\infty^n \gamma_{-1}(n)\} = \frac{z}{z - z_\infty}$$

für $|z| > |z_\infty|$.

Wendet man dies auf die Partialbruchzerlegungen (zumindest jene mit einfachen Polstellen) an, so ergibt sich für kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = B_0 + \sum_{\mu=1}^k \frac{B_\mu}{s - s_{\infty,\mu}}$$



$$h_0(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\mu=1}^k B_\mu e^{s_{\infty,\mu} t} \delta_{-1}(t).$$

Gewichteter Dirac-Stoß und gewichtete Summe von geschalteten Exponentiellen.

Kausale Impulsantwort, die zeitlich abklingt, wenn alle Polstellen auf der „linken komplexen Halbebene“ liegen!

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 7

Zugehörige Impulsantworten – Teil 2:

Für diskrete System mit einfachen Polstellen ergibt sich:

$$H(z) = B_0 + \sum_{\mu=1}^k \frac{B_{\mu} z}{z - z_{\infty, \mu}}$$



$$h_0(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\mu=1}^k B_{\mu} z_{\infty, \mu}^n \gamma_{-1}(n).$$

Gewichteter Impuls und gewichtete Summe von geschalteten Exponentiellen.

Kausale Impulsantwort, die zeitlich abklingt, wenn alle Polstellen innerhalb des „Einheitskreises“ liegen!

Beispiele an der Tafel ...

Zugehörige Impulsantworten – Teil 3:

Bei mehrfachen Polstellen ergibt sich in allgemeiner Form für kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = B_0 + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} \frac{B_{\mu,\kappa}}{(s - s_{\infty,\mu})^\kappa}$$

⋮

$$h_0(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} e^{s_{\infty,\mu} t} \delta_{-\kappa}(t).$$

Für diskrete Systeme:

$$H(z) = B_0 + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} \frac{B_{\mu,\kappa} z}{(z - z_{\infty,\mu})^\kappa}$$

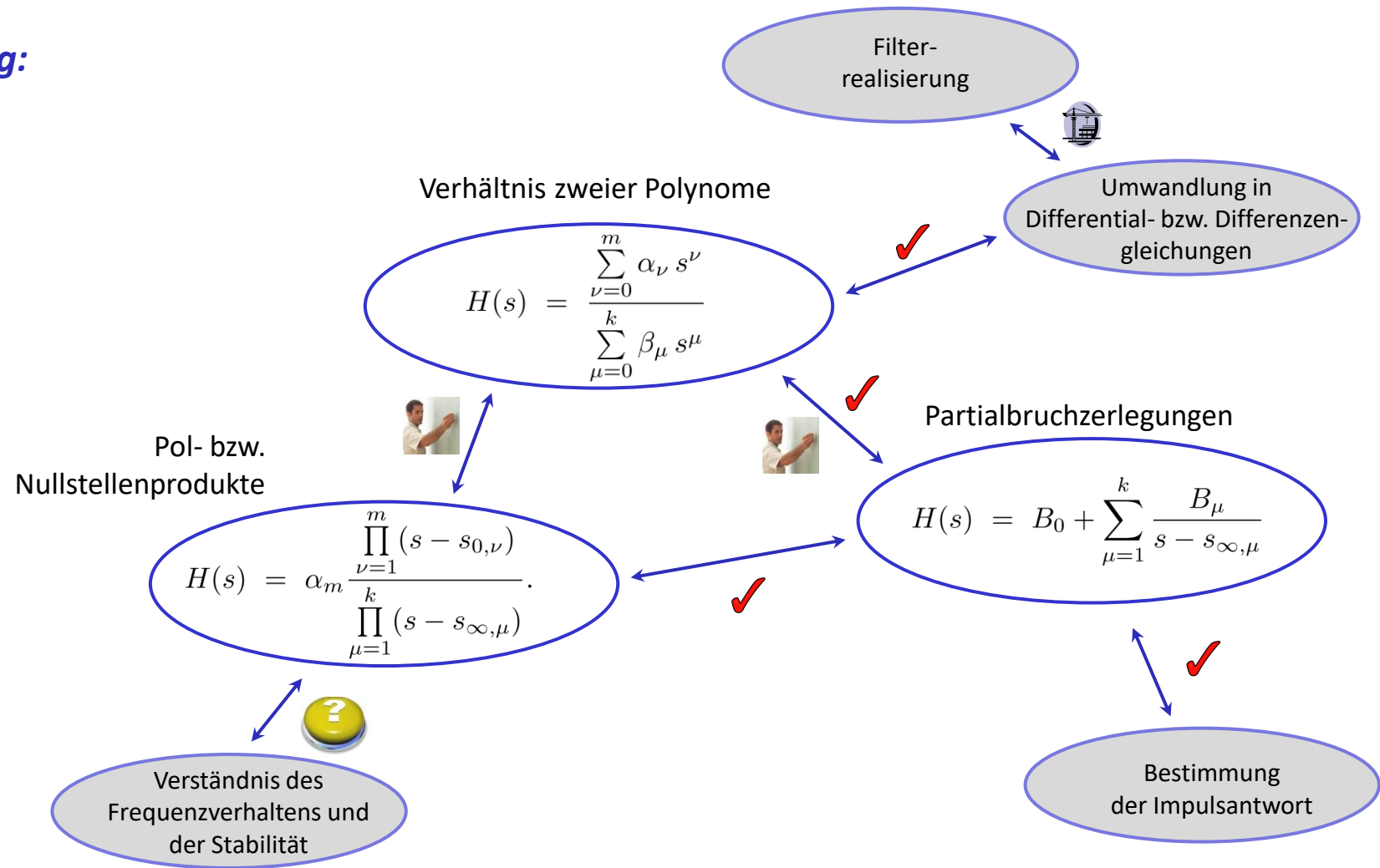
⋮

$$h_0(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} z_{\infty,\mu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n - \kappa + 1).$$

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Darstellungen gebrochen-rationaler Funktionen – Teil 9

Zusammenfassung:



Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 1:

Vor einigen Folien wurde die allgemeine **BIBO-Stabilität** konkretisiert für lineare Systeme. Nun liegt eine detaillierte Beschreibung der Impulsantwort $h_0(\dots)$ vor, damit kann die Stabilität für die hier behandelten Systeme noch weiter konkretisiert werden:

- Absolute Integrierbarkeit bzw. Summierbarkeit von $h_0(\dots)$ erfordert ganz sicher, dass $|h_0(\dots)|$ abklingt für $t \rightarrow \infty$ bzw. $n \rightarrow \infty$. D.h., es müssen alle **Exponentialanteile** der in der allgemeinen Darstellung

$$h_0(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} e^{s_{\infty,\mu} t} \delta_{-\kappa}(t)$$

bzw.

$$h_0(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} z_{\infty,\mu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n-\kappa+1)$$

abklingen.

- Das erfordert offensichtlich

$$\operatorname{Re}\{s_{\infty,\mu}\} < 0 \quad \forall \mu \quad \text{bzw.} \quad |z_{\infty,\mu}| < 1 \quad \forall \mu.$$

Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 2:

Die Bedingungen $\operatorname{Re}\{s_{\infty,\mu}\} < 0 \quad \forall \mu$ bzw. $|z_{\infty,\mu}| < 1 \quad \forall \mu$ definieren absolute (oder „strikte“) Konvergenz auch im Falle mehrfacher Pole trotz der dann auftretenden Faktoren t^k bzw. n^k bei den Exponentialtermen. Hierbei ist zu beachten, dass jede Potenz von t bzw. n langsamer wächst, als eine (sinkende) Exponentielle fällt.

- Absolute Instabilität tritt ein, wenn $\operatorname{Re}\{s_{\infty,\mu}\} > 0$ bzw. $|z_{\infty,\mu}| > 1$ gilt. Man spricht daher von **Grenzstabilität**, falls gilt:

$$\operatorname{Re}\{s_{\infty,\mu}\} \leq 0 \quad \forall \mu \quad \text{bzw.} \quad |z_{\infty,\mu}| \leq 1 \quad \forall \mu.$$

Grenzstabilität bedeutet offenbar, dass dieser Anteil (und damit $h_0(\dots)$) nicht abklingt, aber auch nicht anwächst: BIBO-Stabilität ist dann nicht gegeben, da keine absolute Integrierbarkeit bzw. Summierbarkeit mehr gilt.

Dann ist allerdings **Bedingung**, dass

$$k_{\mu} = 1, \quad \text{wenn } \operatorname{Re}\{s_{\infty,\mu}\} = 0 \quad \text{bzw.} \quad |z_{\infty,\mu}| = 1.$$

Andernfalls stünden jetzt den (nicht abklingenden) Exponentialfunktionen Faktoren t^k bzw. n^k gegenüber, die wachsen und damit zu Instabilitäten führen würden.

Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 3:

Man spricht statt von Grenzstabilität daher auch von bedingter Stabilität. Dafür gibt eine Erklärung:

- Für die Transformierten der Ausgangssignale gilt

$$Y(s) = V(s)H(s) \quad \text{bzw.} \quad Y(z) = V(z)H(z).$$

Wenn das System bedingt-stabil ist, dann darf das Eingangsspektrum $V(s)$ bzw. $V(z)$ keinen Pol an dieser Stelle aufweisen, sonst würden $Y(s)$ bzw. $Y(z)$ diesen Pol (mindestens) doppelt enthalten und damit zu Systemreaktionen gehören, die über alle Grenzen wachsen.

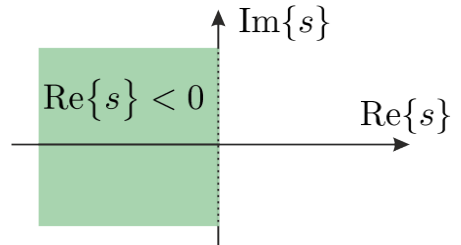
Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Stabilität – Teil 4

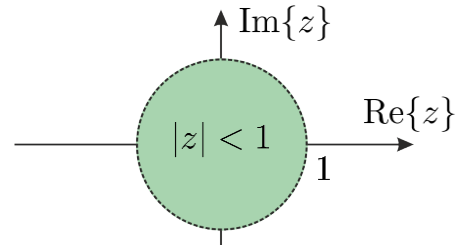
Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 4:

Pole stabiler Systeme liegen bei **strikt** Stabilität in

- der offenen linken Halbebene.

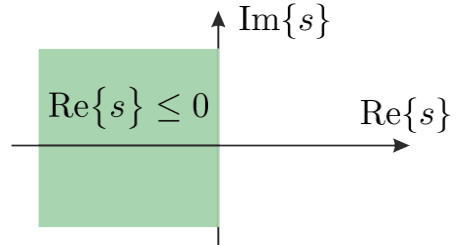


- dem offenen Einheitskreis.

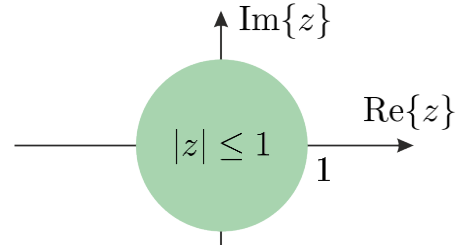


Pole stabiler Systeme liegen bei **Grenz**stabilität in

- der abgeschlossenen linken Halbebene.



- dem abgeschlossenen Einheitskreis.



Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 5:

Bemerkungen – Teil 1:

- Die bisherigen Überlegungen schließen auch Pole in $s \rightarrow \infty$ und $z \rightarrow \infty$ aus! Sie würden auftreten, wenn die maximale Zählerpotenz größer als die maximale Nennerpotenz, d.h. $m > k$, wäre:

$$H(s) = \frac{\alpha_m s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \dots + \alpha_0}{s^k + \beta_{k-1} s^{k-1} + \dots + \beta_0},$$

$$H(z) = \frac{\alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_0}{z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \dots + \beta_0}.$$

Für sehr große Werte von s und z überwiegen die höchsten Potenzen, d.h. es gilt:

$$H(s) \Big|_{s \text{ groß}} \propto \frac{s^m}{s^k} = s^{m-k} \quad \text{bzw.} \quad H(z) \Big|_{z \text{ groß}} \propto \frac{z^m}{z^k} = z^{m-k}$$

Für $m > k$ gilt dann $H(s) \rightarrow \infty$ bzw. $H(z) \rightarrow \infty$, d.h. es gibt zumindest einen Pol bei $s \rightarrow \infty$ bzw. $z \rightarrow \infty$.

Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 6:

Bemerkungen – Teil 2:

- Die Bedeutung solcher Pole im „Zeit“-Bereich kann wieder durch eine Partialbruchdarstellung veranschaulicht werden. Diese würde zusätzliche Terme vor dem B_0 -Glied gemäß

$$H(s) = \tilde{B}_{m-k} s^{m-k} + \dots + B_0 + \sum_{\mu=1}^k B_{\mu} \dots$$

bzw.

$$H(z) = \tilde{B}_{m-k} z^{m-k} + \dots + B_0 + \sum_{\mu=1}^k B_{\mu} \dots$$

liefern. Transformiert man dies in den „Zeit“-Bereich, so erhält man für kontinuierliche Systeme die Impulsantwort

$$h_0(t) = \tilde{B}_{m-k} \delta_{m-k}(t) + \dots$$

und daraus die Sprungantwort

$$h_{-1}(t) = \tilde{B}_{m-k} \delta_{m-k-1}(t) + \dots$$

Erweiterung der Stabilitätsaussagen – Teil 7:

Bemerkungen – Teil 3:

- Die Sprungantwort liefert einen unendlichen Wert an der Stelle $t = 0$, obwohl das Eingangssignal (der Sprung) begrenzt war. Dies widerspricht der Definition der BIBO-Stabilität.

- Für diskrete Systeme liefert die Rücktransformation

$$h_0(n) = \tilde{B}_{m-k} \gamma_0(n + (m - k)) + \dots$$

d.h. es gibt Anteile vor $n = 0$, was einer angenommenen **Kausalität** widerspräche.

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

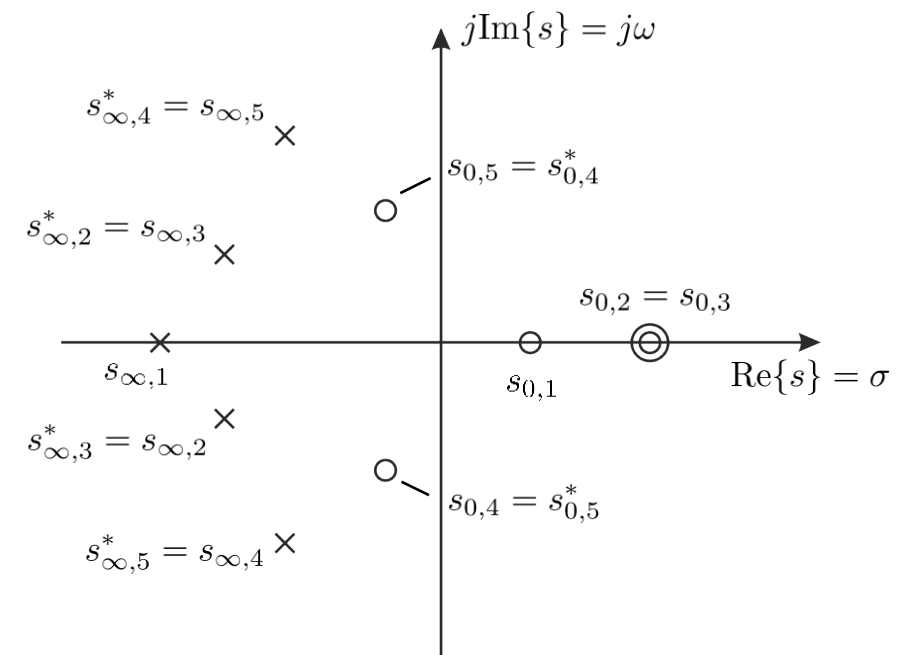
Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 1

Grundlegendes – Teil 1:

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen lassen sich durch die Kenntnis aller Pol- und Nullstellen bis auf einen konstanten Faktor α_m vollständig beschreiben. Es gilt für kontinuierliche Systeme

$$H(s) = \alpha_m \frac{\prod_{\nu=1}^m (s - s_{0,\nu})}{\prod_{\mu=1}^k (s - s_{\infty,\mu})}$$

Eine graphische Darstellung der Lagen der Pol- und der Nullstellen wird als sog. Pol-Nullstellen-Diagramm bezeichnet. Nullstellen werden dabei durch Kreise, Polstellen durch Kreuze gekennzeichnet. Rechts ist ein solches Diagramm für $k = 5$ Polstellen und $m = 5$ Nullstellen dargestellt.



Grundlegendes – Teil 2:

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion:

$$H(s) = 3 \frac{(s - 2)(s - 1 + j)(s + 1 - j)}{(s + 3)(s + 2 - 2j)(s + 2 + 2j)}$$

- Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm!
- Ist das zugehörige System stabil?
- Gehört das Pol-Nullstellen-Diagramm zu einem reellen oder zu einem komplexen System?

(Eigene Bearbeitung, dann gemeinsame Lösung an der Tafel)

Grundlegendes – Teil 3:

Mit dem Pol-Nullstellen-Diagramm ist auch eine graphische Deutung der Übertragungsfunktion möglich. Dazu wird zunächst folgende Umformung vorgenommen:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \alpha_m \frac{\prod_{\nu=1}^m (s - s_{0,\nu})}{\prod_{\mu=1}^k (s - s_{\infty,\mu})} \\
 &= \underbrace{\alpha_m \frac{\prod_{\nu=1}^m |s - s_{0,\nu}|}{\prod_{\mu=1}^k |s - s_{\infty,\mu}|}}_{= |H(s)|} \underbrace{e^{j \left[\sum_{\nu=1}^m \arg\{s - s_{0,\nu}\} - \sum_{\mu=1}^k \arg\{s - s_{\infty,\mu}\} \right]}}_{e^{j \arg[H(s)]}}.
 \end{aligned}$$

Im Folgenden werden nun einzelne Beiträge untersucht – angefangen mit einer einzelnen Nullstelle.

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

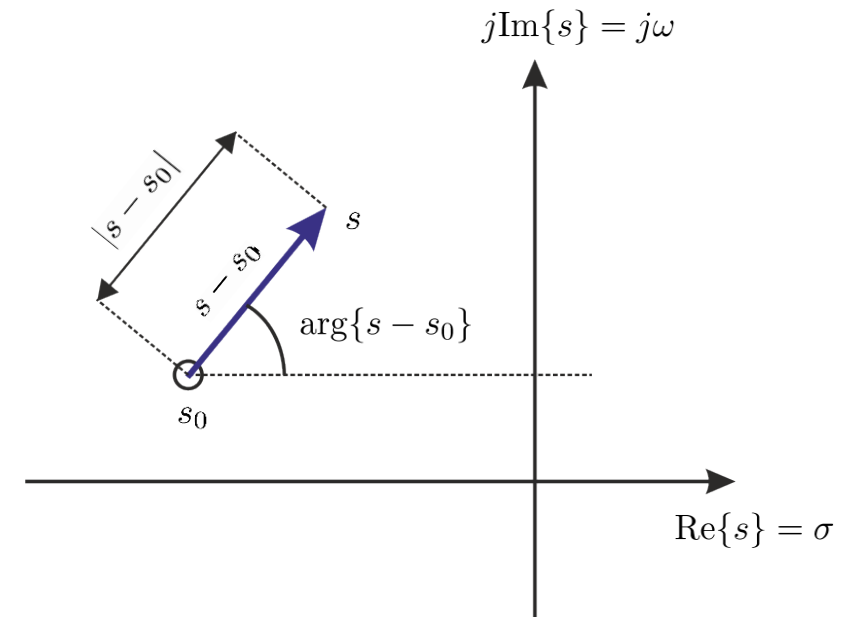
Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 4

Grundlegendes – Teil 4:

Beitrag einer einzelnen Nullstelle ($s - s_0$):

- Betrag: $|s - s_0|$ (Länge des Vektors von s nach s_0)
- Winkel: $\arg\{s - s_0\}$ (Winkel des Vektors gegen die σ -Achse)

Beides kann unmittelbar aus dem Pol-Nullstellen-Diagramm abgelesen werden (siehe rechts). Von besonderem Interesse sind dabei die Punkte $s = j\omega$. Diese ergeben den Frequenzgang des Systems.



Grundlegendes – Teil 5:

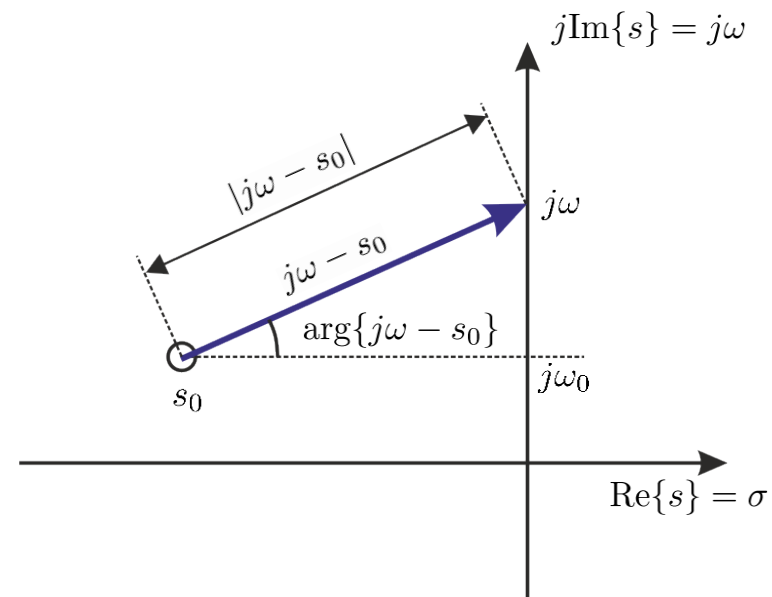
Beitrag einer einzelnen Nullstelle ($s - s_0$) zum Frequenzgang (d.h. ohne Beachtung der Beeinflussung durch andere Null- oder Polstellen):

□ Betrag:

$$\begin{aligned}
 |j\omega - s_0| &= |j\omega - \sigma_0 - j\omega_0| \\
 &= \sqrt{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} \\
 &\rightarrow |\omega - \omega_0| \quad \text{für } |\omega - \omega_0| \gg |\sigma_0|.
 \end{aligned}$$

□ Winkel:

$$\begin{aligned}
 \arg\{j\omega - s_0\} &= \arctan\left\{\frac{\omega - \omega_0}{-\sigma_0}\right\} \\
 &\doteq -b_0(\omega).
 \end{aligned}$$



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 6

Grundlegendes – Teil 6:

Anschaulicher Verlauf zunächst für $\sigma_0 \leq 0$:

□ $\omega \gg \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |j\omega - s_0| \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg\{j\omega - s_0\} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

□ $\omega = \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |j\omega - s_0| = |\sigma_0|,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \arg\{j\omega - s_0\} = 0.$$

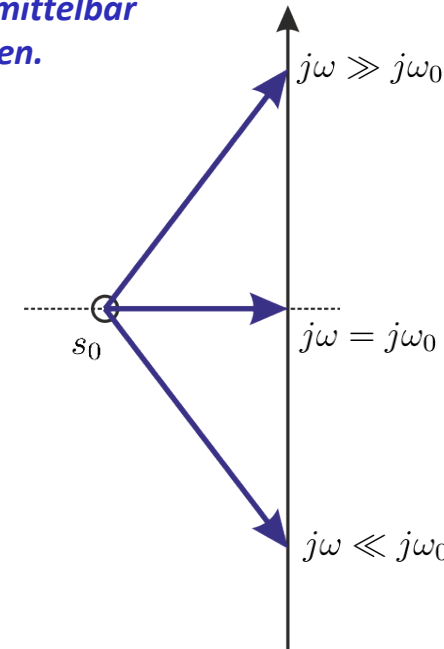
Minimum

□ $\omega \ll \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} |j\omega - s_0| \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg\{j\omega - s_0\} \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

Die Winkel lassen sich unmittelbar aus dem Diagramm ablesen.

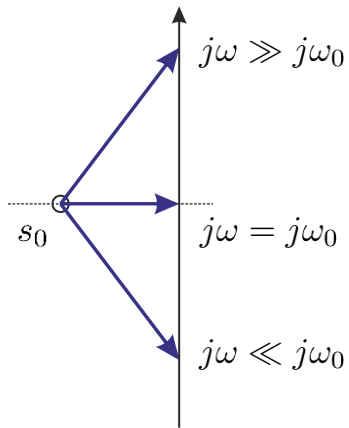


Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

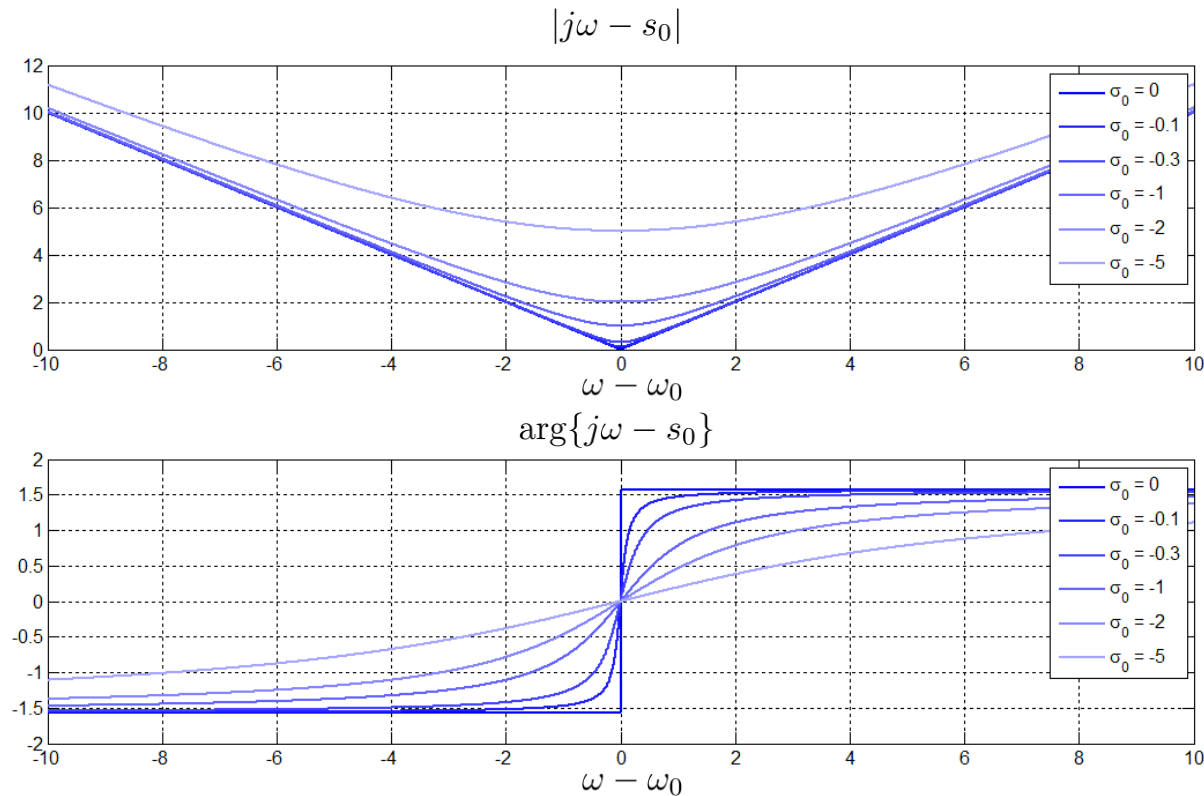
Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 7

Grundlegendes – Teil 7:

Verlauf für $\sigma_0 \leq 0$:



„Phasensprung“
um π bei $\sigma_0 = 0$.



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 8

Grundlegendes – Teil 8:

Anschaulicher Verlauf zunächst für $\sigma_0 > 0$:

□ $\omega \gg \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |j\omega - s_0| \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg\{j\omega - s_0\} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

□ $\omega = \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |j\omega - s_0| = |\sigma_0|,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \arg\{j\omega - s_0\} = \pm \pi.$$

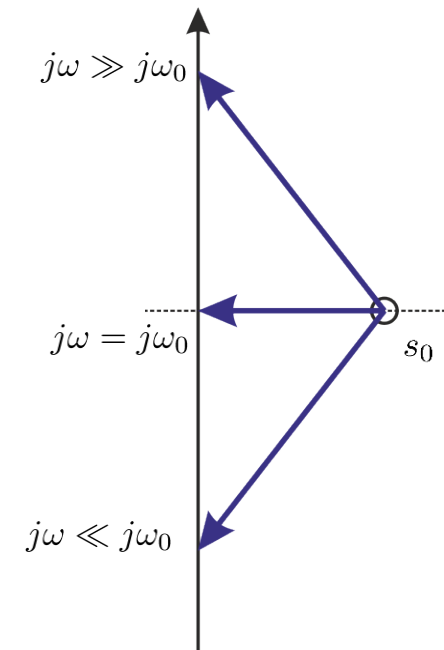
Minimum

□ $\omega \ll \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} |j\omega - s_0| \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg\{j\omega - s_0\} \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

Die Winkel lassen sich wieder unmittelbar aus dem Diagramm ablesen.



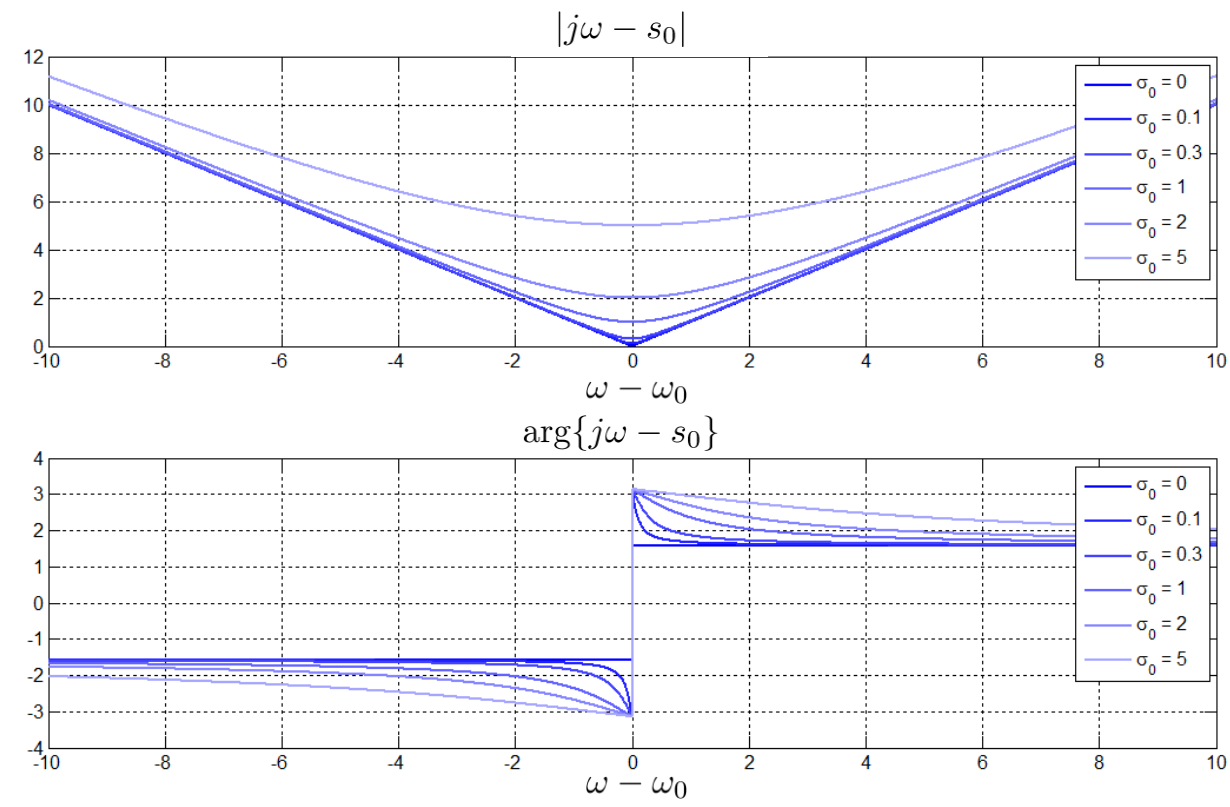
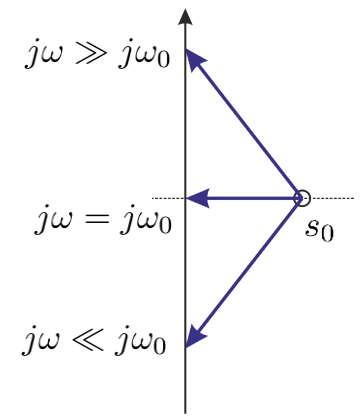
Der Betrag ändert sich nicht im Vergleich zu $\sigma_0 \leq 0$!

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 9

Grundlegendes – Teil 9:

Verlauf für $\sigma_0 > 0$:



Grundlegendes – Teil 10:

Beitrag einer einzelnen Polstelle $1/(s - s_\infty)$ zum Frequenzgang (allerdings muss hier wegen der Stabilität $\sigma_\infty < 0$ gelten):

□ Betrag:

$$\left| \frac{1}{j\omega - s_\infty} \right| = \frac{1}{|j\omega - \sigma_\infty - j\omega_\infty|} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_\infty^2 + (\omega - \omega_\infty)^2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{|\omega - \omega_\infty|} \quad \text{für } |\omega - \omega_\infty| \gg |\sigma_\infty|.$$

□ Winkel:

$$\begin{aligned} \arg\{j\omega - s_\infty\} &= -\arctan\left\{ \frac{\omega - \omega_\infty}{-\sigma_\infty} \right\} \\ &\doteq -b_\infty(\omega). \end{aligned}$$

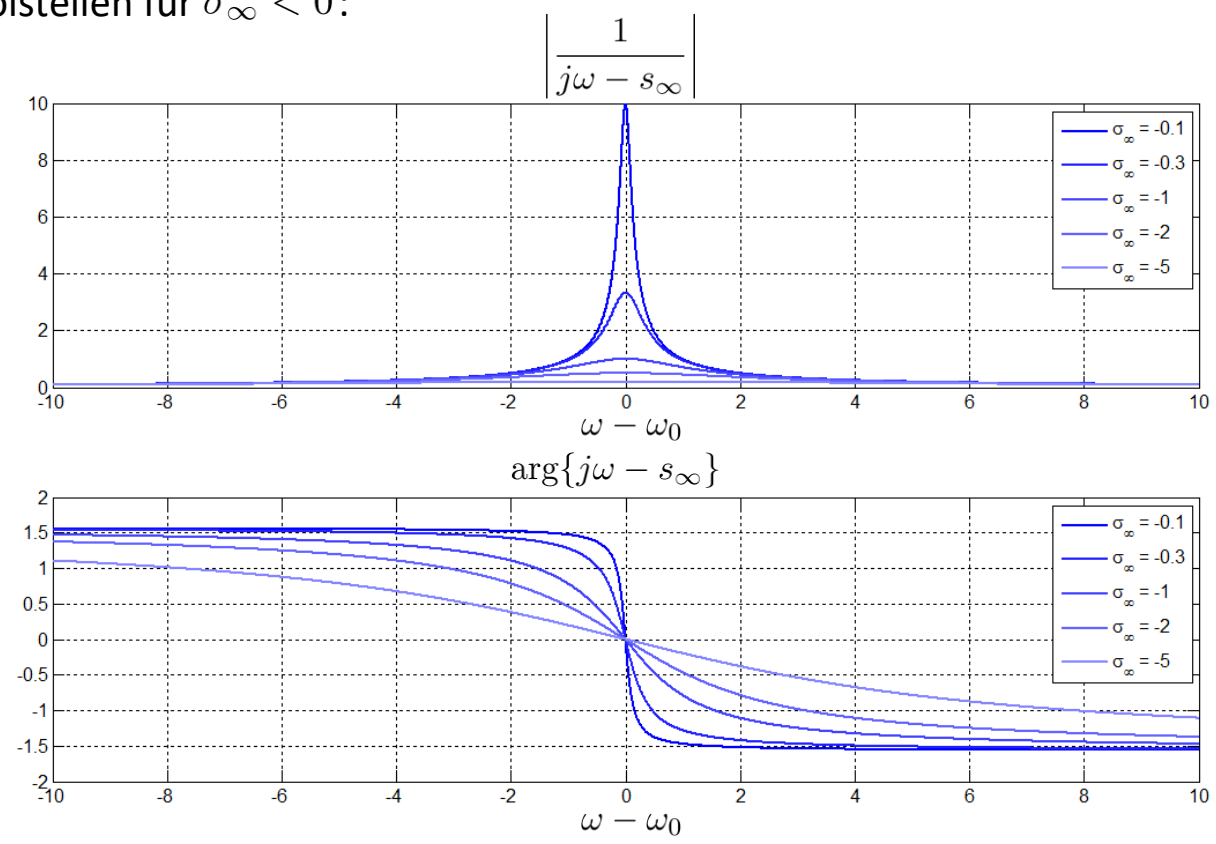
Die Phasenverläufe sind dabei sehr ähnlich (Unterschiede lediglich im Vorzeichen) zu den Phasenverläufen bei Nullstellen. Die Betragsverläufe stellen die Kehrwerte der Verläufe der Nullstellenverläufe dar.

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 11

Grundlegendes – Teil 11:

Verlauf des Einflusses von Polstellen für $\sigma_\infty < 0$:



Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 12

Grundlegendes – Teil 12:

Der Gesamtverlauf des Frequenzgangs ergibt sich aus dem Produkt der einzelnen Beträge bzw. der Summe der einzelnen Winkel. Hierbei ergeben sich Verschiebungen der einzelnen Minima bzw. Maxima (durch benachbarte Pol- bzw. Nullstellen).

Beobachtungen:

- Auf einem Weg durch die s -Ebene (insbesondere auf der $j\omega$ -Achse) wird der Betragsfrequenzgang „groß“ nahe bei Polen und „klein“ in der Nähe von Nullstellen (und unendlich groß in Polen und Null in Nullstellen).
- In der Nähe der Pole und Nullstellen finden starke Phasendrehungen statt. Der detaillierte Verlauf ist oft wenig aussagekräftig.

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

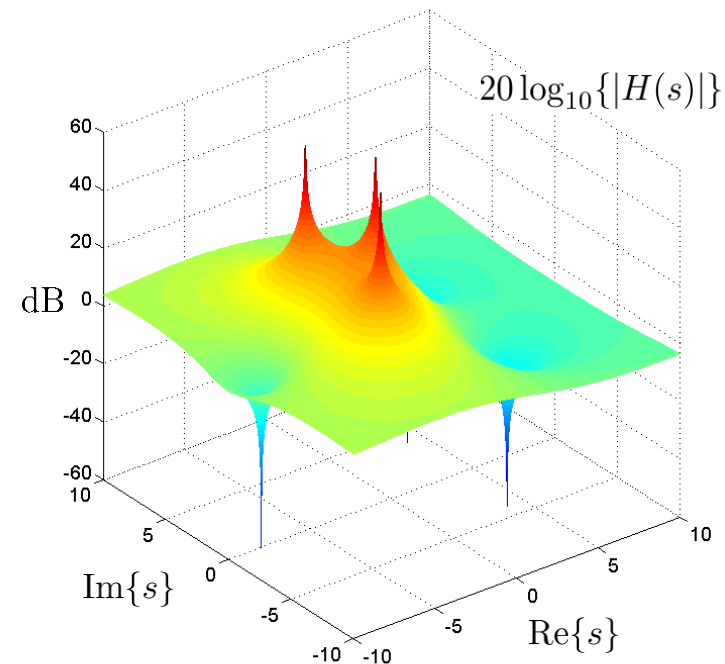
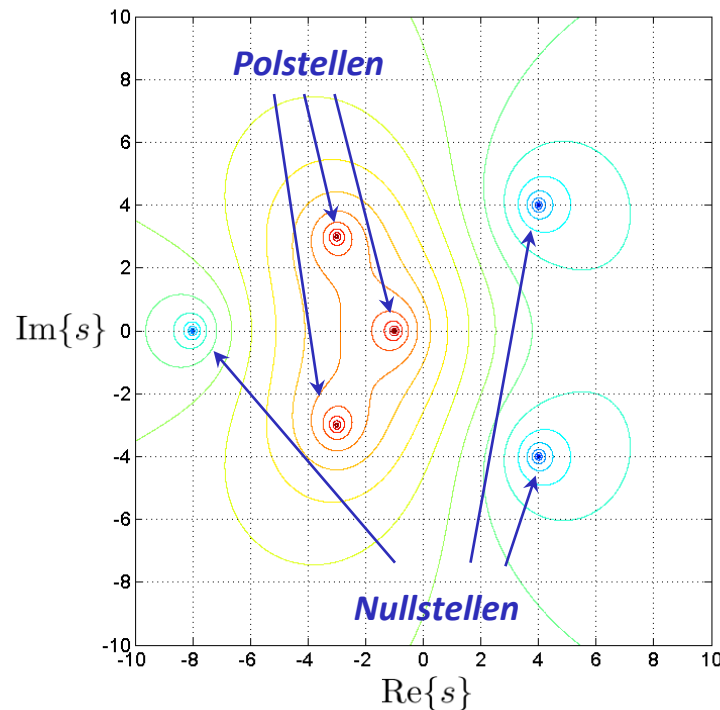
Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 13

Beispiel – Teil 1:

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{(s - (-8)) (s - (4 + 4j)) (s - (4 - 4j))}{(s - (-1)) (s - (-3 + 3j)) (s - (-3 - 3j))}$$

Höhenliniendiagramm und eine 3D-Darstellung des logarithmierten Betrags.



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

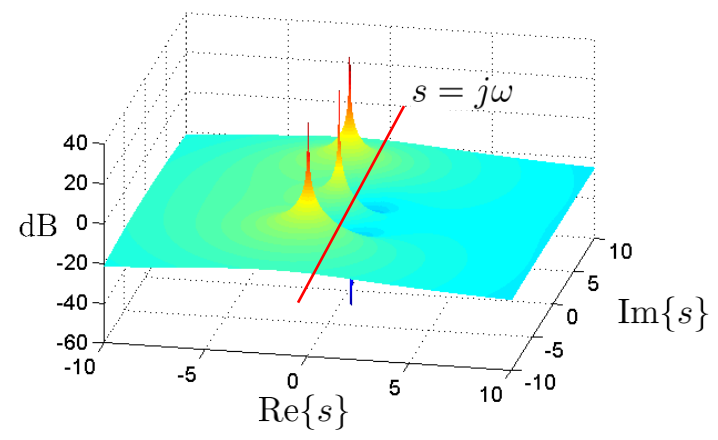
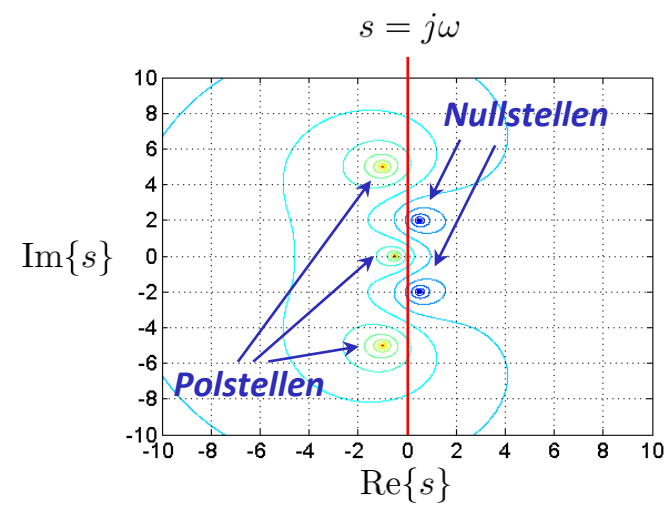
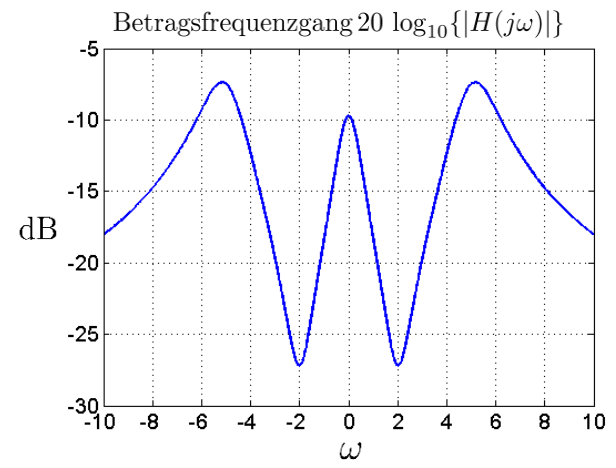
Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 14

Beispiel – Teil 2:

Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{(s - (\frac{1}{2} + 2j))(s - (\frac{1}{2} - 2j))}{(s - (-\frac{1}{2}))(s - (-1 + 5j))(s - (-1 - 5j))}$$

Höhenliniendiagramm, 3D-Darstellung des logarithmierten Betrags und logarithmierter Betragsfrequenzgang



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 15

Andere Darstellungen:

□ Bode-Diagramm:

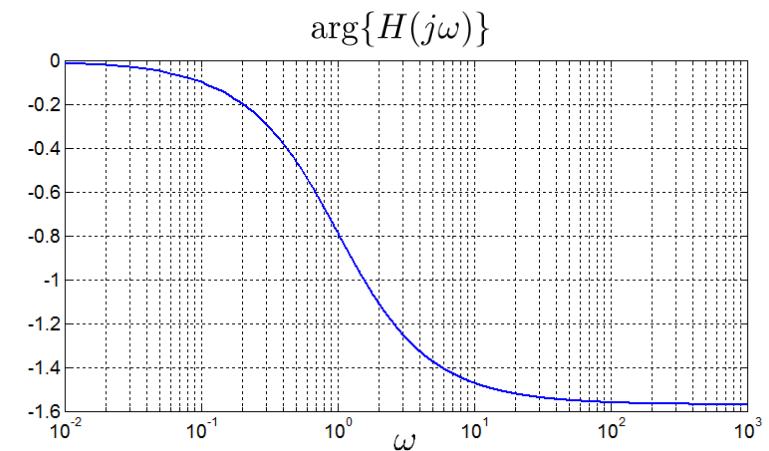
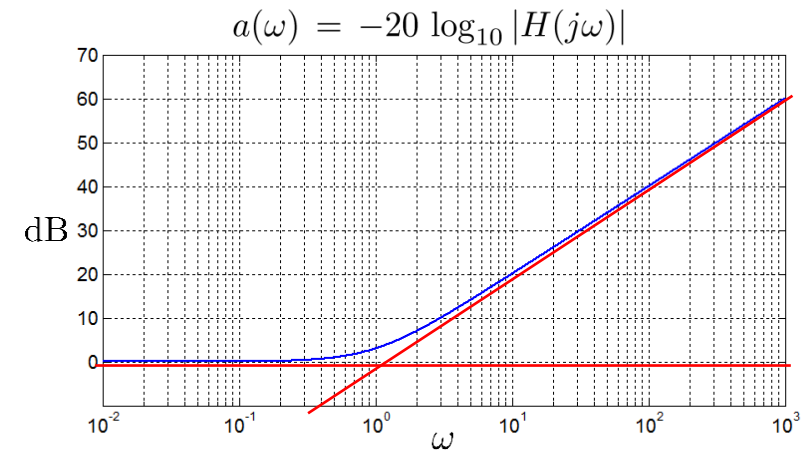
Hierbei wird (oft in vereinfachter Weise die Phase $\arg\{H(j\omega)\}$ und die logarithmische Dämpfung $a(\omega) = -20 \log_{10} |H(j\omega)|$ über einer logarithmischen Frequenzskala dargestellt (siehe rechts).

□ Ortskurve:

Darstellung der komplexen Funktion $H(j\omega)$ in Abhängigkeit der reellen Größe ω .

□ Gruppenlaufzeit:

Darstellung von $\tau_g(\omega) = -d \arg\{H(j\omega)\} / d\omega$ (aber Vorsicht: dies ist i.A. nicht als frequenzselektive Verzögerung anzusehen).



Übertragungsfunktionen von diskreten Systemen – Teil 1:

Für diskrete Systeme können entsprechende Überlegungen wie für kontinuierliche Systeme angestellt werden. Es gilt dabei:

- Das Pol-Nullstellen-Diagramm wird in der komplexen z -Ebene analysiert.
- Polstellen müssen aufgrund der Stabilitätsanforderungen im Einheitskreis liegen, d.h. es muss gelten: $|z_{\infty, \mu}| < 1$.
- Die graphische Darstellung erfolgt entsprechend der Darstellung in der komplexen Laplace-Ebene.
- Auch hier kann $|H(z)|$ und $\arg\{H(z)\}$ aus dem Pol-Nullstellen-Diagramm abgelesen werden bzw. das Diagramm kann zur „Konstruktion“ von Übertragungsfunktionen verwendet werden.
- Von besonderem Interesse sind die Punkte $z = e^{j\Omega}$ (Einheitskreis). Hier kann man den Frequenzgang eines diskreten Systems ablesen.

Übertragungsfunktionen von diskreten Systemen – Teil 2:

Betrachtung einer einzelnen Nullstelle. Es gilt für den Betrag (im Hinblick auf eine Frequenzgangbestimmung):

... Aufspalten in Real- und Imaginärteile ...

$$\left| e^{j\Omega} - z_0 \right| = \left| \cos(\Omega) + j \sin(\Omega) - \rho_0 \cos(\Omega_0) - j \rho_0 \sin(\Omega_0) \right|$$

... Betrag auflösen ...

$$= \sqrt{(\cos(\Omega) - \rho_0 \cos(\Omega_0))^2 + (\sin(\Omega) - \rho_0 \sin(\Omega_0))^2}$$

... Terme neu zusammenfassen ...

$$= \sqrt{\underbrace{\cos^2(\Omega) + \sin^2(\Omega)}_{= 1 \ \forall \ \Omega} + \underbrace{\rho_0^2 \cos^2(\Omega_0) + \rho_0^2 \sin^2(\Omega_0)}_{= \rho_0^2 \ \forall \ \Omega_0} - 2\rho_0 \underbrace{[\cos(\Omega) \cos(\Omega_0) + \sin(\Omega) \sin(\Omega_0)]}_{= \cos(\Omega - \Omega_0)}}$$

... Trigonometrische Vereinfachungen einsetzen ...

$$= \sqrt{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos(\Omega - \Omega_0)}.$$

← Periodisch mit 2π aufgrund des cos-Terms.

Für $\Omega = \Omega_0$ gilt dann

$$\left| e^{j\Omega} - z_0 \right| = \sqrt{1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos(0)} = 1 - \rho_0.$$

← Minimum!

Übertragungsfunktionen von diskreten Systemen – Teil 3:

Es gilt für den Winkel ergibt sich (wieder im Hinblick auf eine Frequenzgangbestimmung):

$$\arg \{ e^{j\Omega} - z_0 \} = \arctan \left(\frac{\sin(\Omega) - \rho_0 \sin(\Omega_0)}{\cos(\Omega) - \rho_0 \cos(\Omega_0)} \right).$$

Dabei gilt:

- ❑ Die Phase ist 2π -periodisch (wegen der sin- bzw. cos-Terme).
- ❑ Für den Winkel bei $\Omega = \Omega_0$ (d.h. „in der Nähe“ der Nullstelle auf dem Weg entlang des Einheitskreises gilt:

$$\begin{aligned} \arg \{ e^{j\Omega} - z_0 \} \Big|_{\Omega=\Omega_0} &= \arctan \left(\frac{\sin(\Omega_0) - \rho_0 \sin(\Omega_0)}{\cos(\Omega_0) - \rho_0 \cos(\Omega_0)} \right) \\ &\quad \dots \text{gleiche Terme ausklammern und kürzen} \dots \\ &= \arctan \left(\frac{\sin(\Omega_0) (1 - \rho_0)}{\cos(\Omega_0) (1 - \rho_0)} \right) = \arctan \left(\frac{\sin(\Omega_0)}{\cos(\Omega_0)} \right) \\ &\quad \dots \text{Definition des tan() einsetzen und } f^{-1}(f(x)) = x \text{ einsetzen} \dots \\ &= \arctan(\tan(\Omega_0)) = \Omega_0 \end{aligned}$$

← **Unterschied zu den kontinuierlichen Überlegungen!**

Übertragungsfunktionen von diskreten Systemen – Teil 5:

Der Beitrag einer Polstelle auf den Betrag und die Phase des Frequenzgangs eines diskreten Systems kann auf ähnliche Weise wie der Beitrag von Nullstellen bestimmt werden. Es ergibt sich dabei:

- Der Betragsverlauf ist der Kehrwert des Betragsverlaufs von Nullstellen:

$$\left| \frac{1}{e^{j\Omega} - z_\infty} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_\infty^2 - 2\rho_\infty \cos(\Omega - \Omega_\infty)}}.$$

- Der Phasenverlauf entspricht dem Phasenverlauf von Nullstellen, aber mit umgekehrten Vorzeichen:

$$\arg \left\{ \frac{1}{e^{j\Omega} - z_\infty} \right\} = -\arctan \left(\frac{\sin(\Omega) - \rho_\infty \sin(\Omega_\infty)}{\cos(\Omega) - \rho_\infty \cos(\Omega_\infty)} \right).$$

Analyse von diskreten Systemen – Teil 1:

Beispielverlauf von Betragsfrequenzgang, Phasenverlauf und Gruppenlaufzeit für eine einzelne Nullstelle bei $\Omega_0 = 0$ mit variablem Betrag ρ_0 , d.h. für folgende Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{z - \rho_0}{z}$$

(siehe nächste Folie)

Beispielverlauf von Betragsfrequenzgang, Phasenverlauf und Gruppenlaufzeit für eine einzelne Polstelle bei $\Omega_\infty = 0$ mit variablem Betrag ρ_∞ , d.h. für folgende Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{1}{z - \rho_\infty}$$

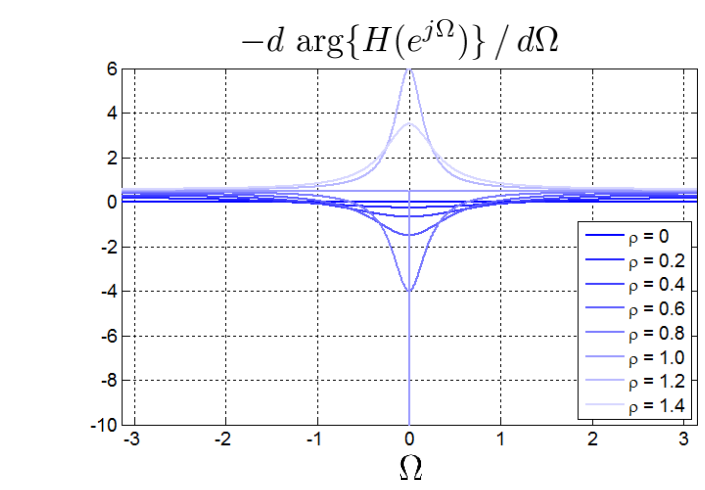
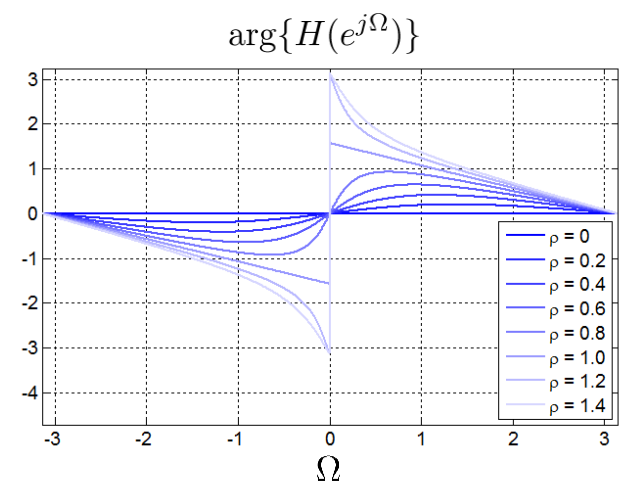
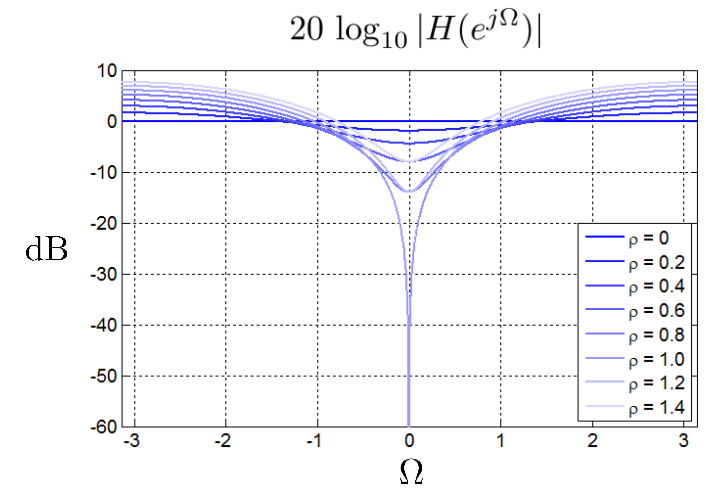
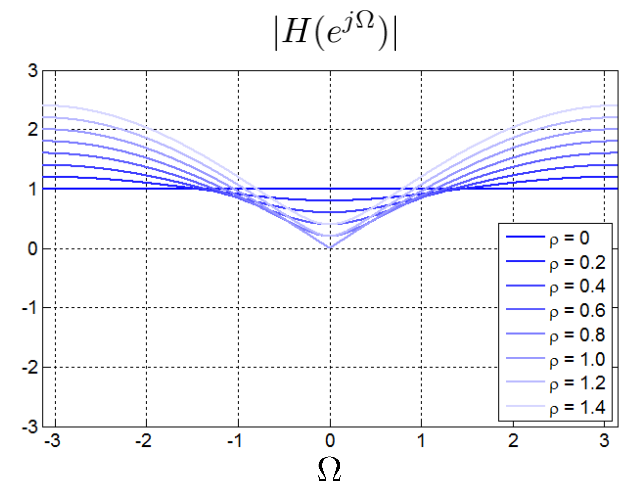
(siehe übernächste Folie)

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Pol-Nullstellen-Diagramme – Teil 21

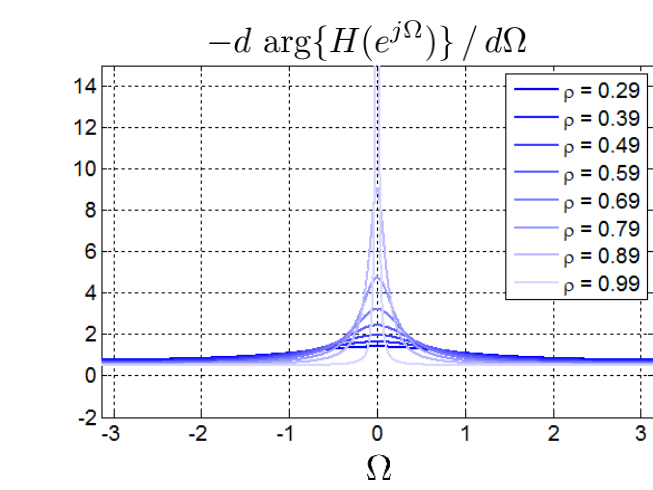
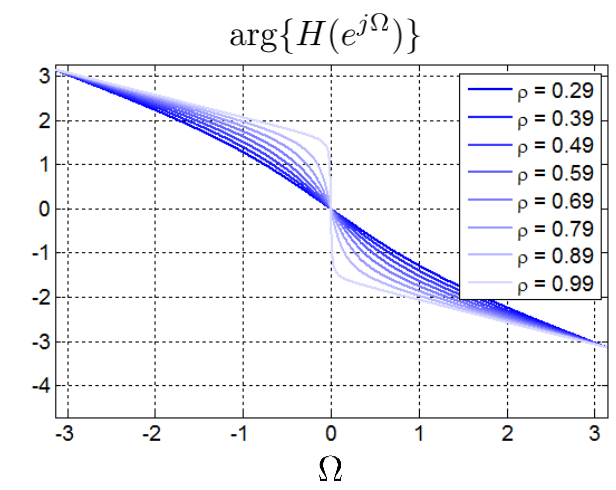
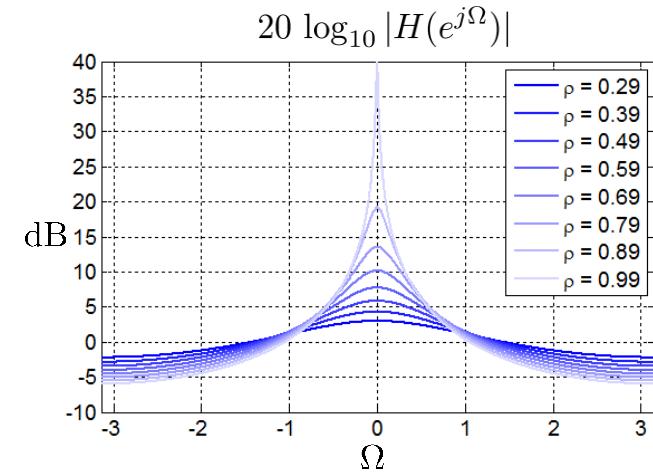
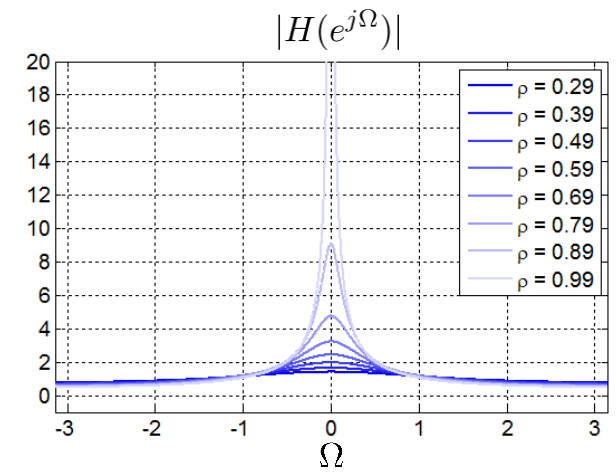
Analyse von diskreten Systemen – Teil 2:

$$H(z) = \frac{z - \rho_0}{z}$$



Analyse von diskreten Systemen – Teil 3:

$$H(z) = \frac{1}{z - \rho_\infty}$$



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

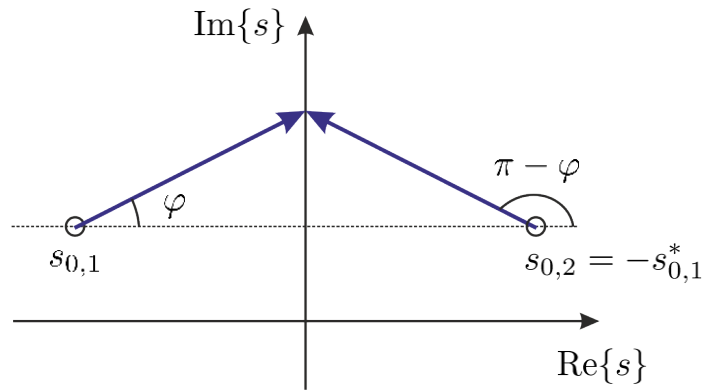
Sonderfälle: Spiegelbildliche Nullstellenpaare – Teil 1

Null- bzw. Linearphasenanteile – Teil 1:

Sollten einige Null- bzw. Polstellen eine besondere Betrags- und Phasenbeziehung zueinander aufweisen, so kann dies zu besonderen Systemen führen. Wir betrachten zunächst **spiegelbildliche Nullstellenpaare**.

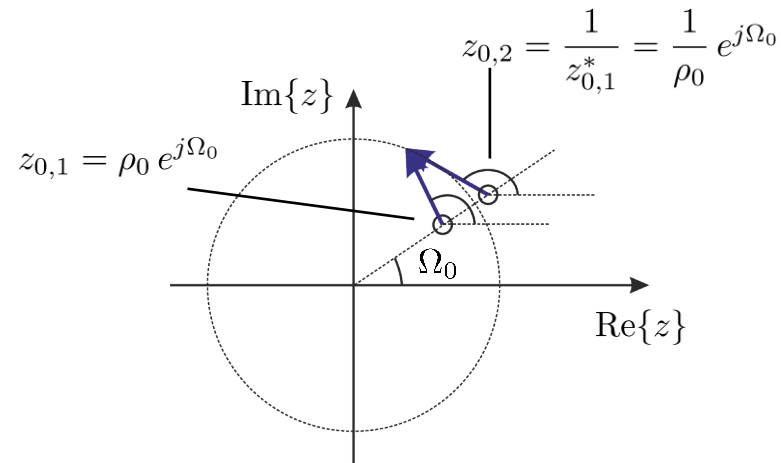
- ☐ Für kontinuierliche Systeme gilt dabei:

$$s_{0,2} = -s_{0,1}^*$$



- ☐ Für diskrete Systeme gilt dabei:

$$z_{0,2} = \frac{1}{z_{0,1}^*}$$



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Sonderfälle: Spiegelbildliche Nullstellenpaare – Teil 2

Null- bzw. Linearphasenanteile – Teil 2:

Für die **Beträge** (jene, die für die Frequenzgangüberlegungen wichtig sind) gilt dabei folgendes für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$|j\omega - s_{0,1}| = |j\omega - s_{0,2}| \quad \forall \omega.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$|e^{j\Omega} - z_{0,1}| = \rho_0 |e^{j\Omega} - z_{0,2}| \quad \forall \Omega.$$

Interessanter ist hierbei allerdings die **Phasenbetrachtung**. Dabei ergibt sich für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\arg\{j\omega - s_{0,1}\} = \pi - \arg\{j\omega - s_{0,2}\}$$

⇒

$$\arg\{j\omega - s_{0,1}\} + \arg\{j\omega - s_{0,2}\} = \pi \quad \forall \omega.$$

← **konstant!**

Null- bzw. Linearphasenanteile – Teil 3:

□ ... diskrete Systeme:

$$\begin{aligned}
 & \arg \left\{ [e^{j\Omega} - \rho_0 e^{j\Omega_0}] \left[e^{j\Omega} - \frac{1}{\rho_0} e^{j\Omega_0} \right] \right\} \\
 = & \arg \left\{ e^{j2\Omega} + e^{j2\Omega_0} - \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right) e^{j(\Omega+\Omega_0)} \right\} \\
 = & \arg \left\{ e^{j(\Omega+\Omega_0)} \left[e^{j(\Omega-\Omega_0)} + e^{-j(\Omega-\Omega_0)} - \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right) \right] \right\} \\
 = & \arg \left\{ e^{j(\Omega+\Omega_0)} \underbrace{\left[2 \cos(\Omega - \Omega_0) - \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right) \right]}_{\text{reell}} \right\} \\
 = & \arg \left\{ e^{j(\Omega+\Omega_0)} \right\} \\
 = & \Omega + \Omega_0.
 \end{aligned}$$

(affin) linear in Bezug auf die Kreisfrequenz!

Sonderfälle: Spiegelbildliche Nullstellenpaare – Teil 4

Null- bzw. Linearphasenanteile – Teil 4:

Zusammengefasst kann man sagen, dass solche Nullstellenpaare ...

- ❑ für kontinuierliche Systeme **keinen Beitrag** zur Phase liefern (eine sog. „Null-Phasen-Konfiguration“).
- ❑ für diskrete Systeme **einen linearen Beitrag** zur Phase liefern (eine sog. „Linear-Phasen-Konfiguration“).

Entsprechende Überlegungen gelten natürlich auch für entsprechende Polstellenpaare.

Diese sind aber aus Stabilitätsgründen nicht zulässig!

Da Nullstellen für stabile kontinuierliche bzw. für kausale diskrete Systeme allein nicht vorkommen, folgt ...

- ❑ ... daraus, dass es **keine kontinuierlichen Nullphasensysteme** gibt!
- ❑ daraus, dass es **diskrete linearphasige Systeme** gibt, wenn man auf geeignete Weise Polstellen ergänzt

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

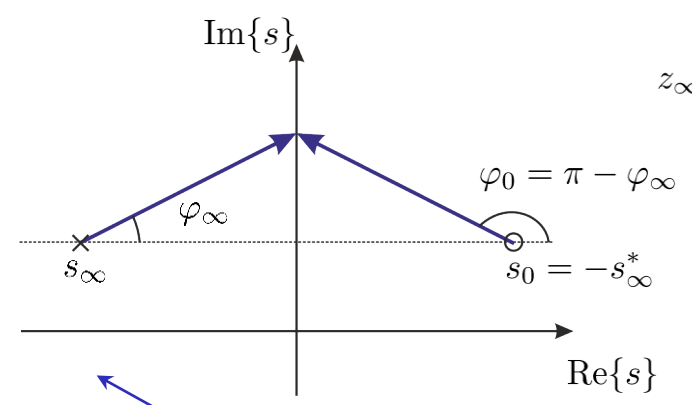
Sonderfälle: Spiegelbildliche Pol-Nullstellen-Paare – Teil 1

Allpassanteile – Teil 1:

Nachdem zuvor gleichartige Pol- bzw. Nullstellenpaare betrachtet wurden, sollen nun **spiegelbildliche Pol-Nullstellen-Paare** betrachtet werden. Hierbei gilt für ...

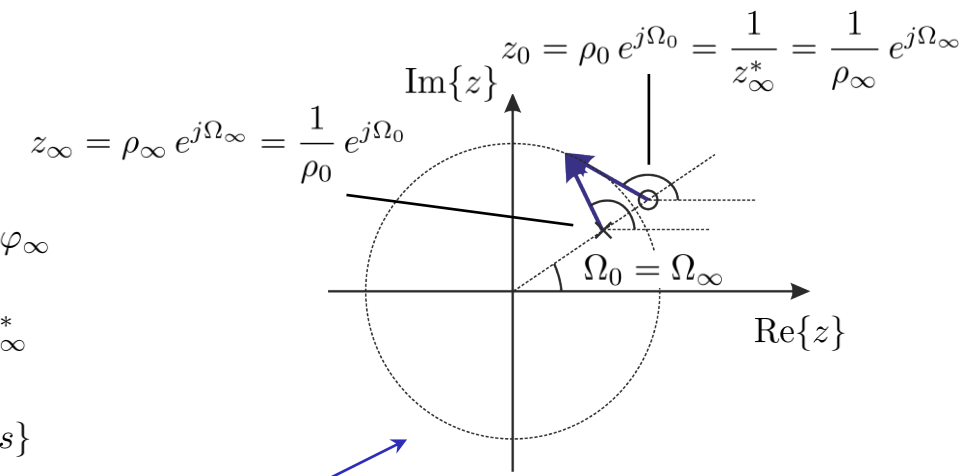
☐ ... kontinuierliche Systeme:

$$s_0 = -s_\infty^*$$



☐ ... diskrete Systeme:

$$z_0 = \frac{1}{z_\infty^*}$$



Eindeutige Zuordnung von Pol- bzw. Nullstelle, da die Polstelle auf der linken s-Ebene bzw. im Einheitskreis (z-Ebene) aufgrund der Stabilitätsforderung liegen muss!

Sonderfälle: Spiegelbildliche Pol-Nullstellen-Paare – Teil 2

Allpassanteile – Teil 2:

Für die **Beträge** (jene, die für die Frequenzgangüberlegungen wichtig sind) gilt dabei für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\frac{|j\omega - s_0|}{|j\omega - s_\infty|} = 1 \quad \forall \omega.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\frac{|e^{j\Omega} - z_0|}{|e^{j\Omega} - z_\infty|} = \rho_0 \quad \forall \Omega.$$

Weniger interessant ist hierbei die **Phasenbetrachtung**. Aus der Betragsüberlegung folgt aber, dass System mit spiegelbildlichen Pol-Nullstellen-Paaren (einen allgemeinen Phasenbeitrag) und keinen Beitrag zum Betragsverlauf (außer einem konstanten Faktor) liefern.

Systeme, die nur Pol-Nullstellen-Paare in dieser Konfiguration enthalten, besitzen demnach einen konstanten Betragsfrequenzgang. Sie reproduzieren alle Frequenzanteile mit unveränderten Amplituden (die einzelnen Null- bzw. Polstellenbeträge können durch einen Korrekturfaktor kompensiert werden) und heißen deshalb **Allpass-Systeme**.

Sonderfälle: Spiegelbildliche Pol-Nullstellen-Paare – Teil 3

Allpassanteile – Teil 3:

Bemerkungen:

- Systeme, die zum Teil solche Konfigurationen aufweisen, besitzen sog. *Allpass-Anteile*.
- Durch *Hinzufügen von Allpass-Anteilen* ändert sich der Phasenverlauf, nicht aber der Betragsfrequenzgang. Dies wird z.B. verwendet, um den Gruppenlaufzeitverlauf von Systemen näherungsweise konstant zu bekommen, d.h. einen näherungsweise linearen Phasenverlauf zu erzeugen.
- Allpass-Systeme/-Anteile sind offenbar *stabil* realisierbar.

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Sonderfälle: Minimal-, maximal- und gemischtphasige Systeme – Teil 1

Minimalphasige Systeme:

Systeme ohne Allpassanteile besitzen Nullstellen, die alle ...

- ... in der „linken“ s-Ebene, d.h.

$$\operatorname{Re}\{s_{0,\mu}\} \leq 0 \quad \forall \mu,$$

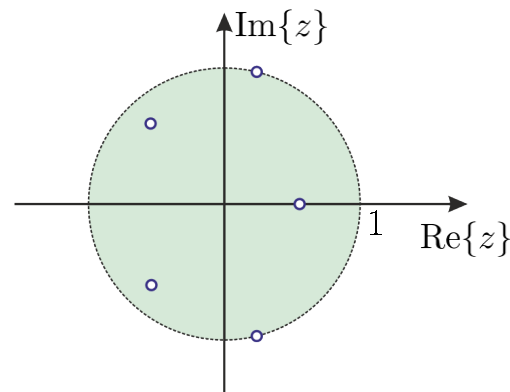
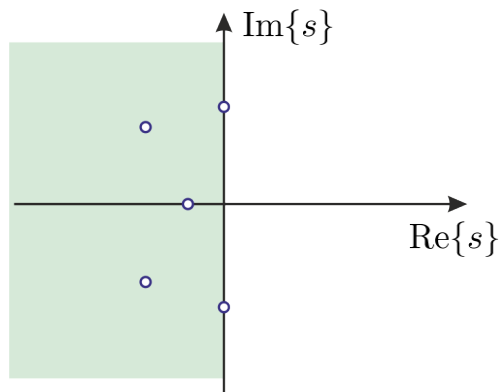
liegen (für kontinuierliche Systeme).

- ... im Einheitskreis, d.h.

$$|z_{0,\mu}| \leq 1 \quad \forall \mu,$$

liegen (für diskrete Systeme).

Solche Systeme nennt man **minimalphasig**.



Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Sonderfälle: Minimal-, maximal- und gemischtphasige Systeme – Teil 2

Maximalphasige Systeme:

Systeme, deren Nullstellen alle ...

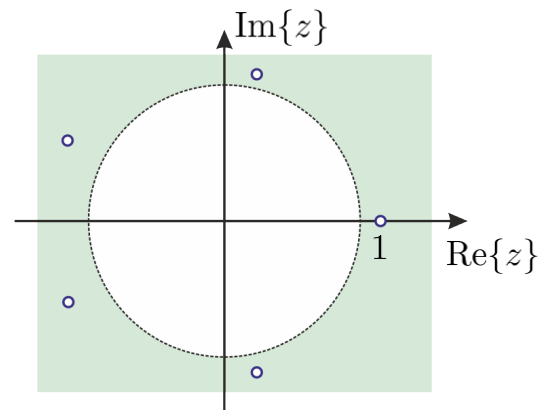
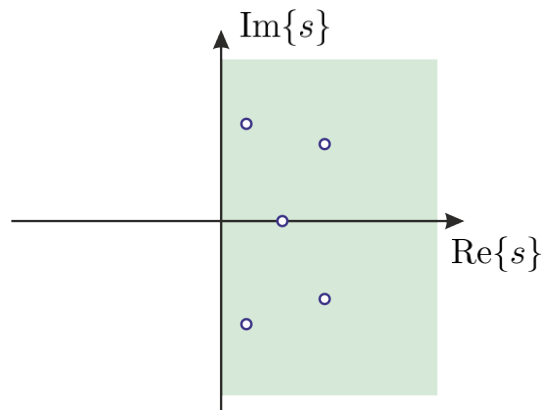
- ... in der „rechten“ s-Ebene liegen, d.h.

$$\operatorname{Re}\{s_{0,\mu}\} > 0 \quad \forall \mu,$$

heißen **maximalphasig**.

- ... außerhalb des Einheitskreises liegen, d.h.

$$|z_{0,\mu}| > 1 \quad \forall \mu,$$



**Daraus folgt: Stabile
Allpässe sind offenbar
maximalphasig!**

Gemischtphasige Systeme – Teil 1:

Systeme, mit Nullstellen ...

- ... sowohl in der linken als auch in der rechten s -Halbebene (kontinuierliche Systeme)

- ... sowohl innerhalb als auch außerhalb des Einheitskreises in der z -Ebene (diskrete Systeme)

heißen ***gemischtphasig***.

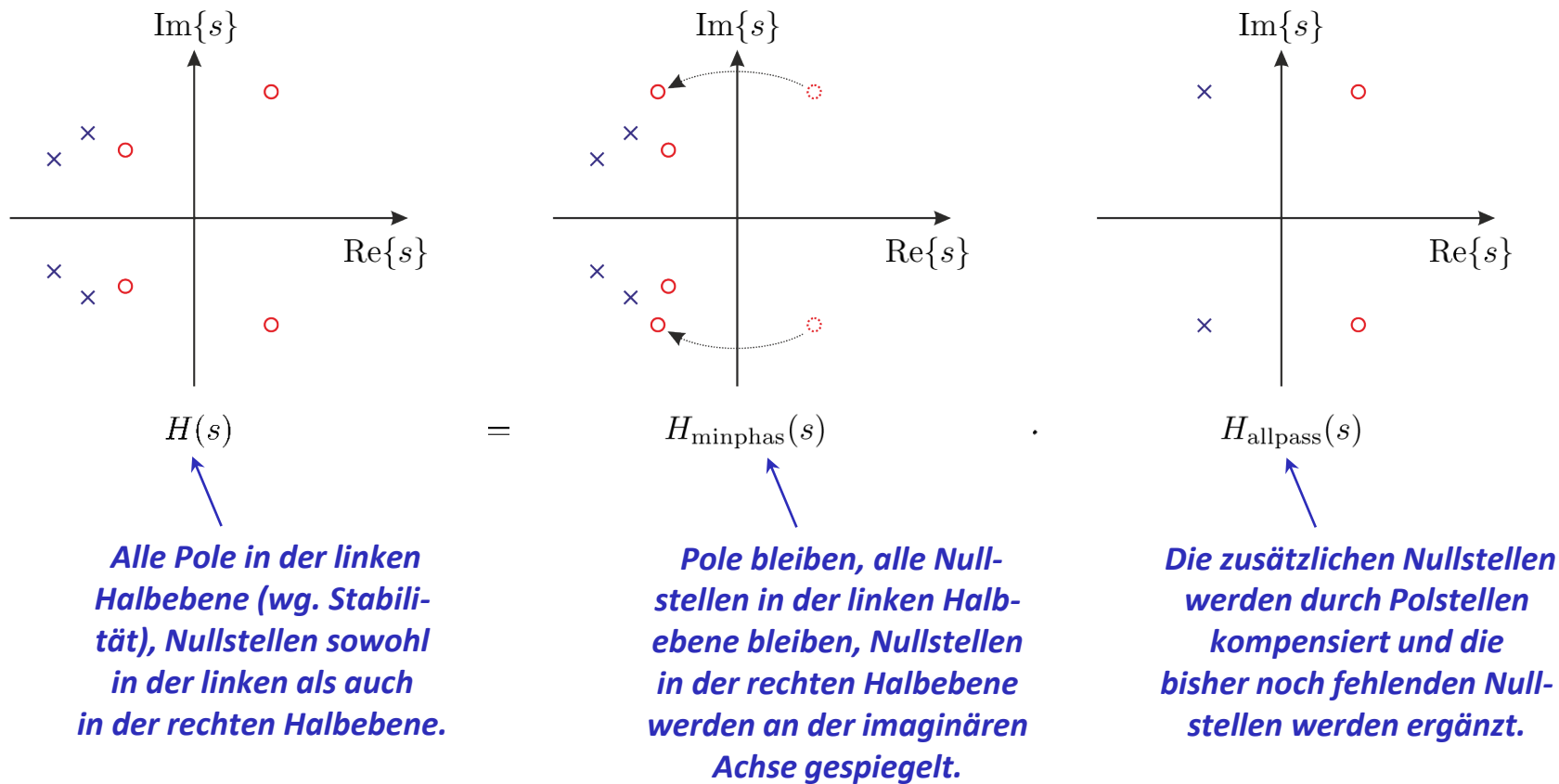
Jedes gemischtphasige System kann zerlegt werden in einen minimalphasigen Anteil und einen Allpass-Anteil (siehe kontinuierliche Beispiele auf der nächsten Folie).

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Sonderfälle: Minimal-, maximal- und gemischtphasige Systeme – Teil 4

Gemischtphasige Systeme – Teil 2:

Beispiel für die Zerlegung eines kontinuierlichen Systems mit der Übertragungsfunktion $H(s)$:



Gemischtphasige Systeme – Teil 3:

Hierbei gilt:

- Für den Betragsfrequenzgang ergibt sich:

$$|H(j\omega)| = |H_{\text{minphas}}(j\omega)| \underbrace{|H_{\text{allpass}}(j\omega)|}_{= 1 \forall \omega} = |H_{\text{minphas}}(j\omega)|.$$

- Die zusätzlichen Pole in $H_{\text{allpass}}(s)$ und die zusätzlichen Nullen in $H_{\text{minphas}}(s)$ kürzen sich bei der Multiplikation/Kaskadierung.

Bemerkungen:

- Man kann zu jedem gemischtphasigen System ein minimalphasiges System mit identischem Betragsfrequenzgang finden.
- Man kann jedes System in seinem Phasenfrequenzgang verändern, ohne den Betragsfrequenzgang zu beeinflussen, indem man Allpassanteile ergänzt.

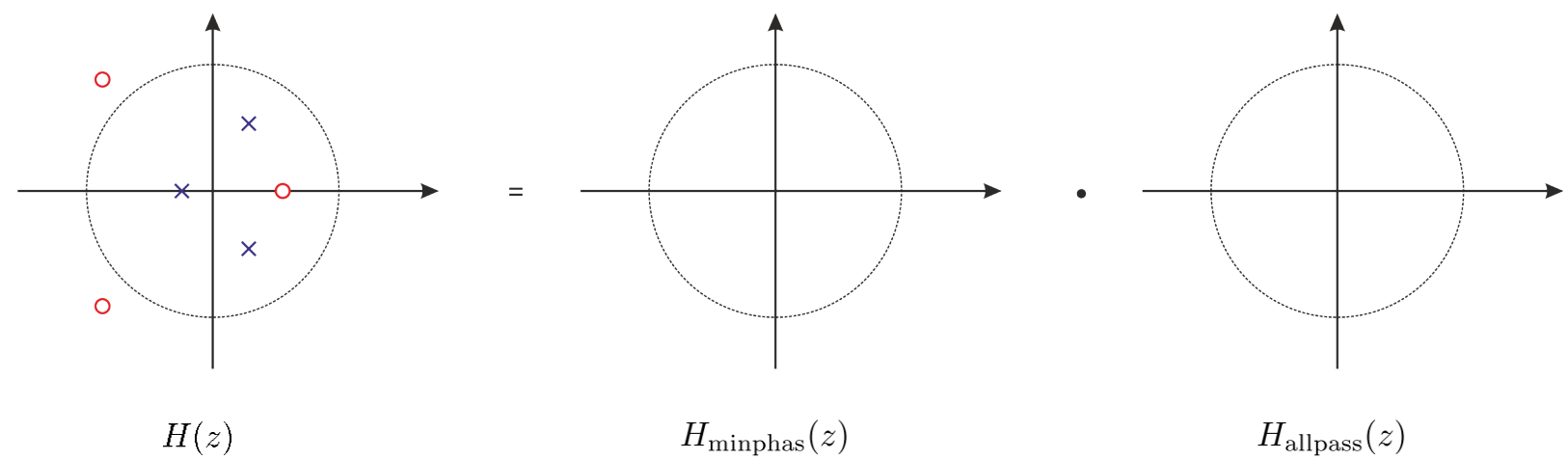
Analoge Überlegungen gelten für diskrete Systeme!

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Sonderfälle: Minimal-, maximal- und gemischtphasige Systeme – Teil 6

Gemischtphasige Systeme – Teil 4:

Beispiel für ein diskretes System:



Bestimmen Sie den minimalphasigen und den Allpass-Anteil des Systems!

Lösung (nach eigener Bearbeitung) an der Tafel!

Reine Allpasssysteme:

Reine Allpasssysteme haben wegen ihrer symmetrischen Pol-Nullstellen-Abhängigkeiten auch Symmetrien in ihrer Darstellung als gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen. Insbesondere gilt für **reelle Allpasssysteme**, dass es zu jedem komplexen Pol-Nullstellenpaar auch ein entsprechendes konjugiert komplexes Pol-Nullstellenpaar geben muss. Das heißt, reelle Allpasssysteme bestehen aus folgenden Grundelementen:

□ Für kontinuierliche Systeme:

$$H_{\text{ap},1}(s) = K_1 \frac{s - \sigma_0}{s + \sigma_0},$$

$$H_{\text{ap},2}(s) = K_2 \frac{(s - s_0)(s - s_0^*)}{(s + s_0^*)(s + s_0)}.$$

□ Für diskrete Systeme:

$$H_{\text{ap},1}(z) = K_1 \frac{z - \rho_0}{z - \frac{1}{\rho_0}},$$

$$H_{\text{ap},2}(z) = K_2 \frac{(z - z_0)(z - z_0^*)}{(z - \frac{1}{z_0^*})(z - \frac{1}{z_0})}.$$

Durch diese besondere Form der Basisallpässe können reelle, reine Allpassfilter in folgende Form gebracht werden ($N(\dots)$ ist dabei ein entsprechendes Polynom in s bzw. z):

$$H_{\text{ap, reell}}(s) = K \frac{N(-s)}{N(s)}.$$

$$H_{\text{ap, reell}}(z) = K \frac{N(1/z)}{N(z)}.$$

Frequenzselektive Filter – Teil 1

Allgemeines:

Frequenzselektive Filter lassen nicht alle Frequenzkomponenten mit unveränderten Amplituden-Reaktionen zum Ausgang gelangen. Sie betonen bestimmte Anteile und schwächen andere ab oder unterdrücken bestimmte Anteile vollständig.

Ideale und reale frequenzselektive Filter – Teil 1:

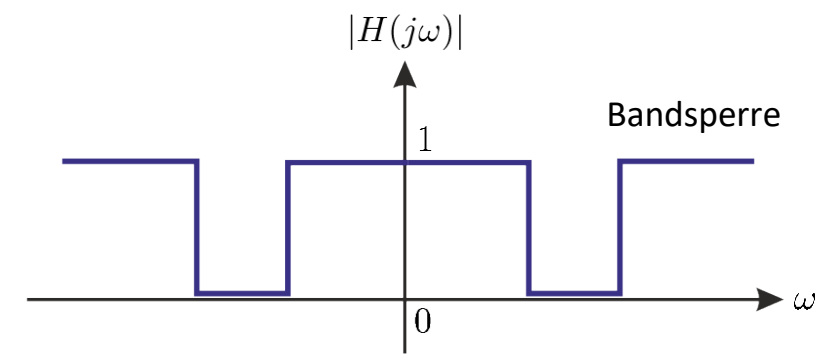
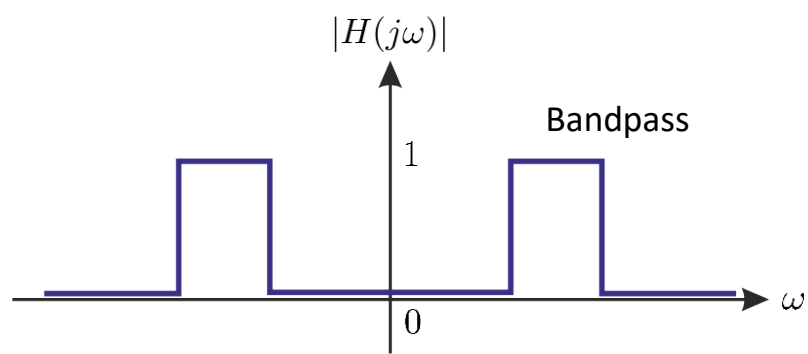
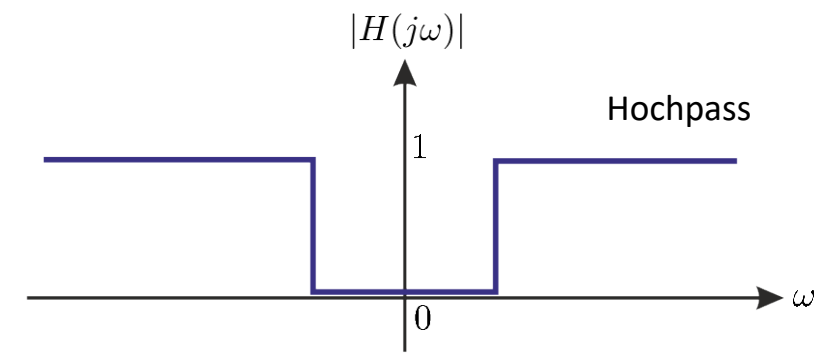
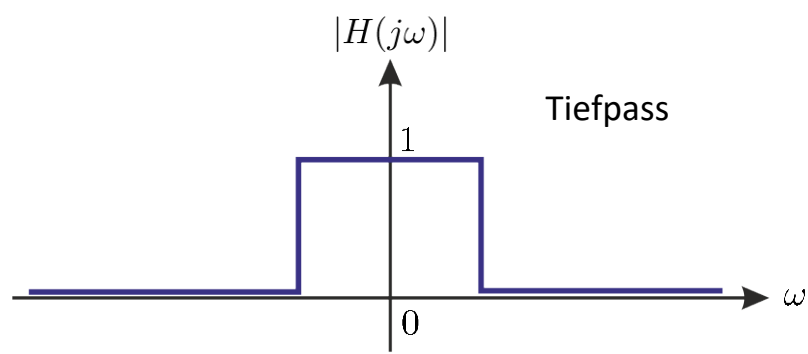
Die bekanntesten Filtertypen dürfen **Tiefpass-, Hochpass-, Bandpass- und Bandsperrfilter** sein. Sie versuchen bestimmte Frequenzen bzw. Frequenzbereiche „durchzulassen“ und andere Frequenzen bzw. Frequenzbereiche zu „sperrern“.

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Frequenzselektive Filter – Teil 2

Ideale und reale frequenzselektive Filter – Teil 2:

Reelle, ideale, kontinuierliche Filter

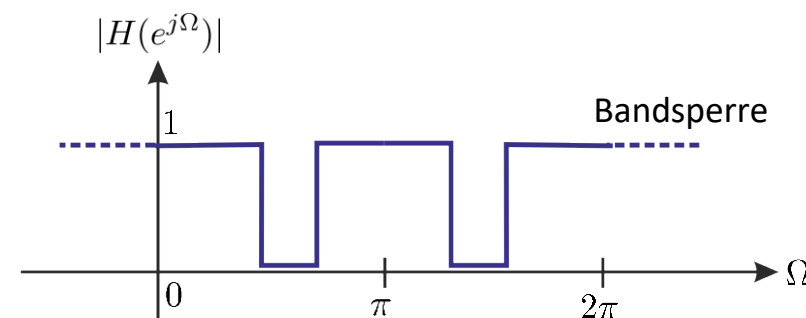
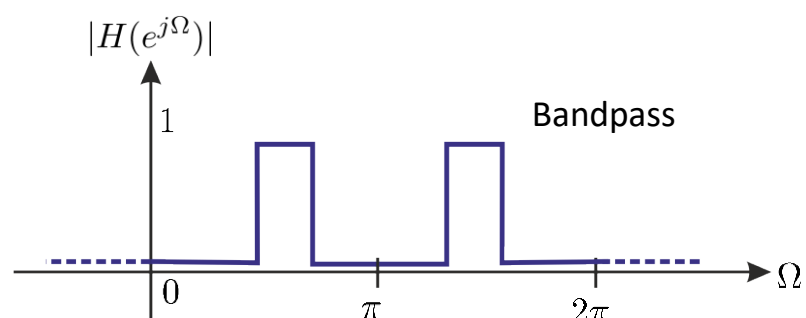
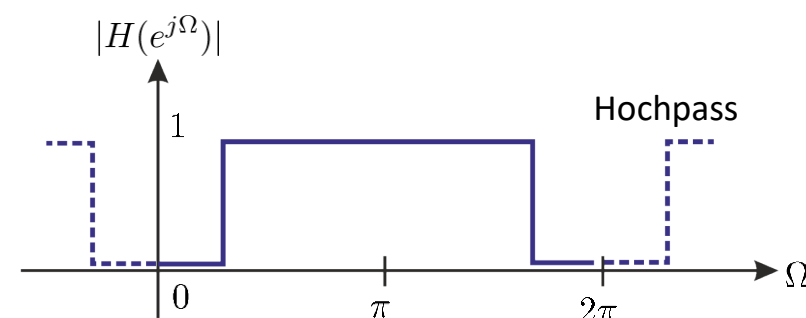
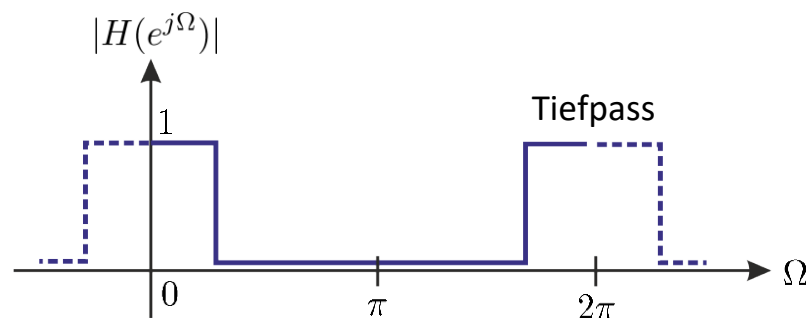


Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Frequenzselektive Filter – Teil 3

Ideale und reale frequenzselektive Filter – Teil 3:

Reelle, ideale, diskrete Filter

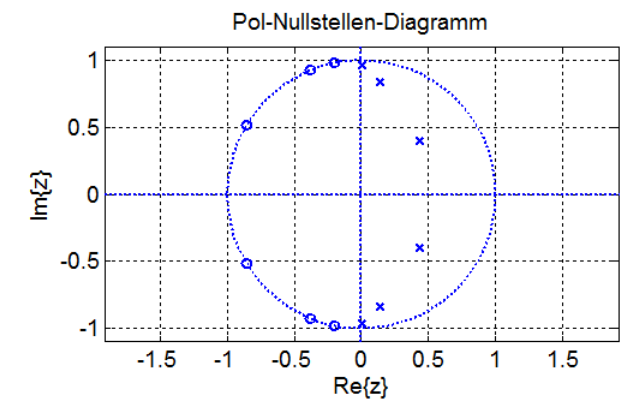
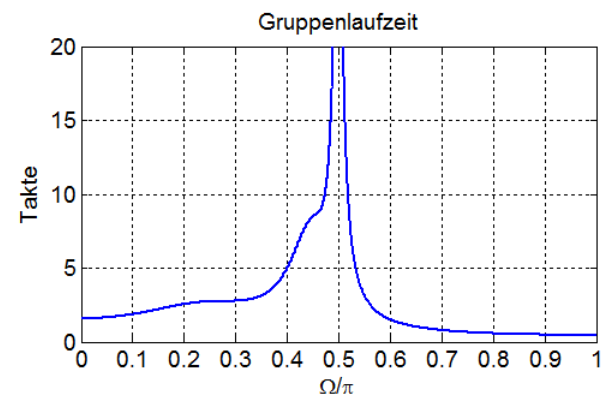
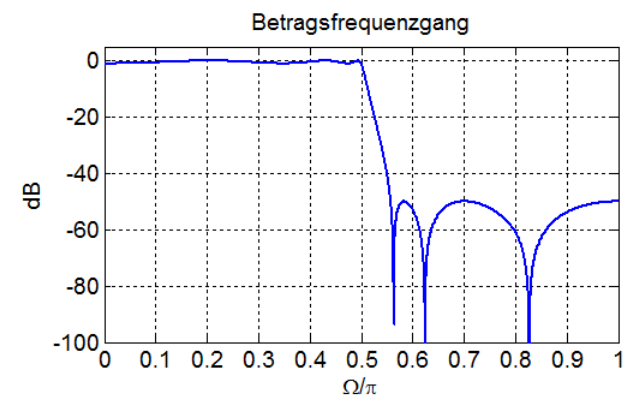
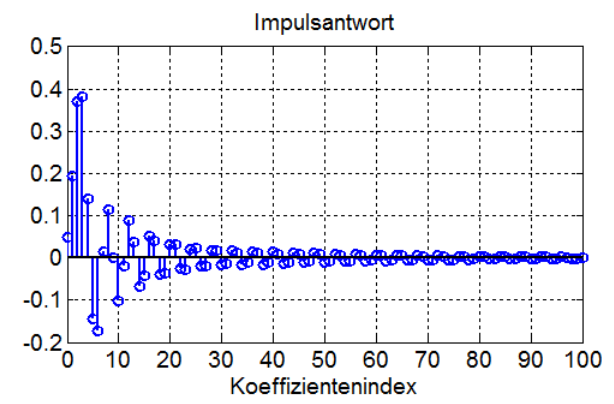


Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Frequenzselektive Filter – Teil 4

Ideale und reale frequenzselektive Filter – Teil 4:

Beispiel für ein zeitdiskretes Tiefpassfilter mit Polen und Nullstellen:

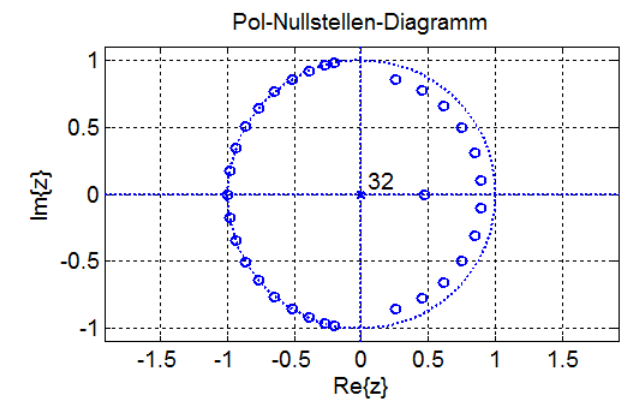
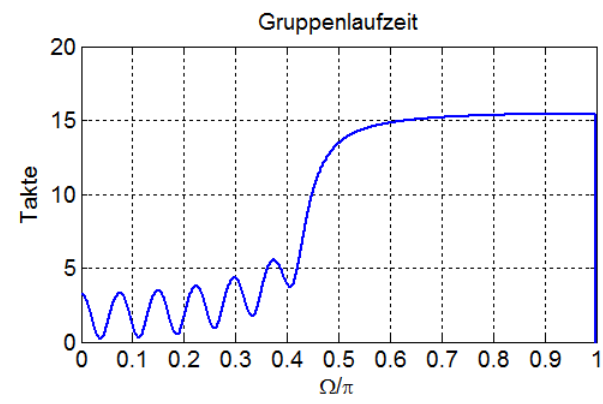
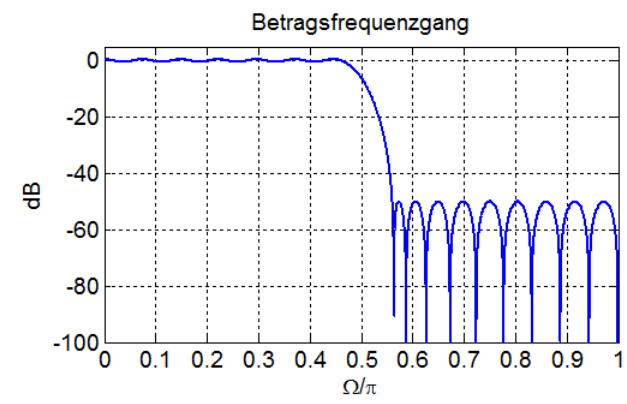
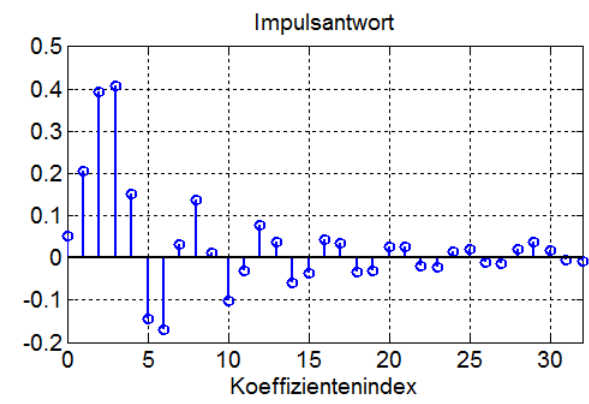


Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Frequenzselektive Filter – Teil 5

Ideale und reale frequenzselektive Filter – Teil 5:

Beispiel für ein phasenminimales zeitdiskretes Tiefpassfilter:

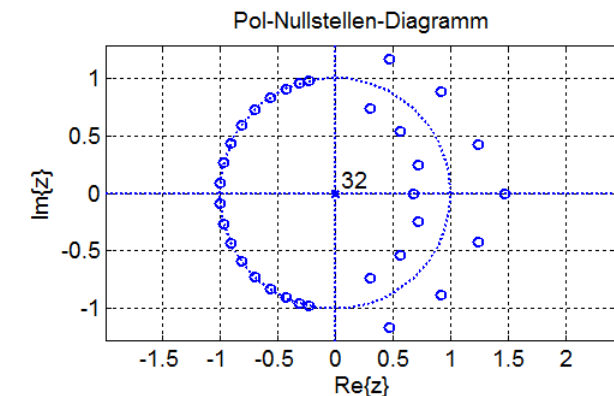
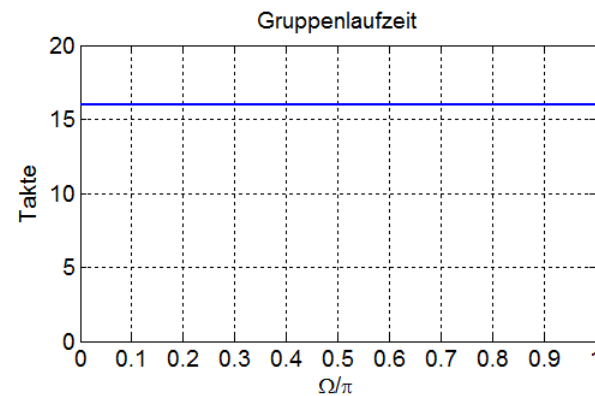
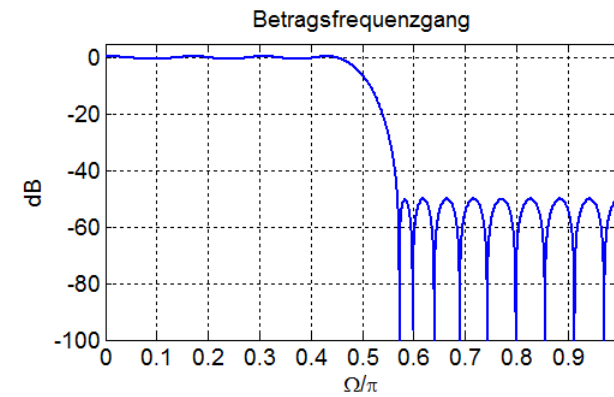
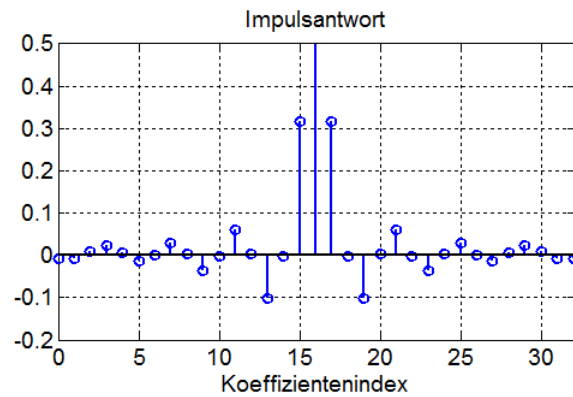


Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Frequenzselektive Filter – Teil 6

Ideale und reale frequenzselektive Filter – Teil 6:

Beispiel für ein linearphasiges zeitdiskretes Tiefpassfilter:



Begriffserklärungen:

Unter dem Begriff des Einschwingens eines Systems versteht man die Systemreaktion auf eine plötzliche, einmalige Änderung der Anregung. Dies kann z.B. die Reaktion auf ...

- einen Impuls (= plötzlicher Stoß, dann wieder Ruhe) sein. Dies wird durch die Impulsantwort $h_0(\dots)$ beschrieben.
- einen Sprung (= plötzliche Änderung, dann Konstanz) sein. Dies wird durch die Sprungantwort $h_{-1}(\dots)$ beschrieben.
- eine geschaltete Exponentielle (= ab einem bestimmten Zeitpunkt wird eine verallgemeinerte Schwingung auf den Systemeingang gegeben) sein. Dies kommt z.B. beim Einschalten einer Wechselspannungsquelle vor.
- ein allgemeines Signal, das zu einem festen Zeitpunkt eingeschaltet wird.

Unter bestimmten Annahmen über das System bzw. das Anregungssignal kann das Einschwing-verhalten bereits mit den bisher bekannten Methoden beschrieben werden.

Bestimmung des Einschwingverhaltens – Teil 1:

Nimmt man an, dass die Übertragungsfunktion des Systems gebrochen-rational ist, so konnten wir bereits dessen Impulsantwort bestimmen. Es gilt für kontinuierliche Systeme

$$h_0(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} e^{s_\infty, \mu t} \delta_{-\kappa}(t)$$

und für diskrete Systeme

$$h_0(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} z_{\infty, \mu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n-\kappa+1).$$

Durch Integration

$$h_{-1}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h_0(\tau) d\tau$$

kann hieraus die Sprungantwort von kontinuierlichen Systemen bestimmt werden, d.h. es ergibt sich:

$$h_{-1}(t) = B_0 \delta_{-1}(t) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} \int_{\tau=-\infty}^t e^{s_\infty, \mu \tau} \delta_{-\kappa}(\tau) d\tau = B_0 \delta_{-1}(t) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_{\mu,\kappa} \int_{\tau=0}^t e^{s_\infty, \mu \tau} \delta_{-\kappa}(\tau) d\tau.$$

Bestimmung des Einschwingverhaltens – Teil 2:

Für diskrete Systeme ergibt sich aus der Impulsantwort

$$h_0(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_\mu z_{\infty,\mu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n-\kappa+1)$$

durch Summation die Sprungantwort:

$$h_{-1}(n) = \sum_{i=-\infty}^n h_0(i).$$

Für den oben dargestellten Fall von gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} h_{-1}(n) &= B_0 \gamma_{-1}(n) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_\mu \sum_{i=-\infty}^n z_{\infty,\mu}^{i-\kappa+1} \binom{i}{\kappa-1} \gamma_{-1}(i-\kappa+1) \\ &= B_0 \gamma_{-1}(n) + \sum_{\mu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} B_\mu \sum_{i=\kappa-1}^n z_{\infty,\mu}^{i-\kappa+1} \binom{i}{\kappa-1}. \end{aligned}$$

Bestimmung des Einschwingverhaltens – Teil 3:

Will man vermeiden, das Integral bzw. die Summe, die sich aufgrund der Berechnung aus der Sprungantwort aus der Impulsantwort ergab, explizit zu bestimmen, so kann auch eine entsprechende Rechnung im Laplace- bzw. z-Bereich erfolgen. Die Faltung mit einem Sprung entspricht der Multiplikation mit

$$H_{-1}(s) = H(s) \frac{1}{s}$$

Transformierte Sprungfunktion (points to $\frac{1}{s}$)
Transformierte Impulsantwort (points to $H(s)$)

für kontinuierliche Systeme bzw. mit

$$H_{-1}(z) = H(z) \frac{z}{z-1}$$

Transformierte Sprungfolge (points to $\frac{z}{z-1}$)
Transformierte Impulsantwort (points to $H(z)$)

für diskrete Systeme. Das Ergebnis bleibt dabei gebrochen-rational, so dass man hierauf wiederum eine Partialbruchzerlegung anwenden kann und direkt die Sprungantwort ablesen kann.

Bestimmung des Einschwingverhaltens – Teil 4:

Ist das Einschwingverhalten für **geschaltete Exponentielle**, für **geschaltete modulierte Rampen** oder ähnliche Signale von Interesse, so kann einfach in der vorigen Überlegung die Transformierte des Sprungs durch eine entsprechende Transformierte ersetzt werden:

$$\frac{1}{s} \implies \frac{1}{s - s_\infty}, \frac{1}{(s - s_\infty)^2}, \dots$$

bzw.

$$\frac{z}{z - 1} \implies \frac{z}{z - z_\infty}, \frac{z z_\infty}{(z - z_\infty)^2}, \dots$$

Man erhält damit wieder eine gebrochen-rationale Spektraldarstellung, die mit den bekannten Methoden in den Zeitbereich transformiert werden kann.

Bestimmung des Einschwingverhaltens – Teil 6:

Kann das Spektrum (bzw. die Übertragungsfunktion) des Anregungssignal des Systems ebenfalls als gebrochen-rationale Funktion dargestellt werden, so ergibt sich auch für das Ausgangssignal des Systems eine gebrochen-rationale Übertragungsfunktion.

Zerlegt man diese mittels einer Partialbruchzerlegung, so entstehen Anteile, die entweder von Polen des Systems oder von Anregungssignal herrühren. Den erstgenannten Anteil nennt man des **Einschwinganteil** (System), der zweitgenannten Anteil wird **Erregeranteil** (Anregungssignal) genannt.

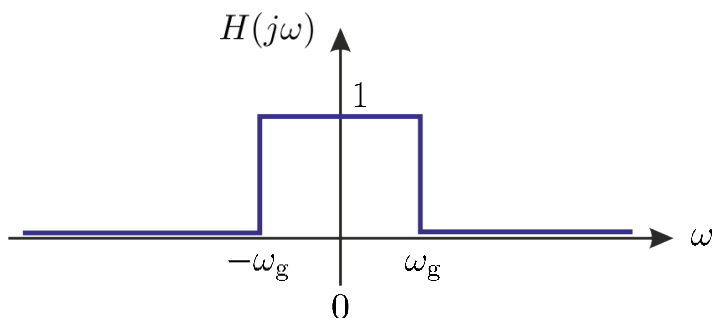
Einschwingverhalten idealer Filter – Teil 1:

Gemäß der bisherigen Beschreibung werden ideale Filter durch ihren Frequenzgang beschrieben. Aus diesem Grund findet für die Bestimmung des Zeitverhaltens auch die Fourier-Transformation (anstelle der Laplace- bzw. z-Transformation) Anwendung.

Für ein ideales Tiefpassfilter gilt beispielsweise ...

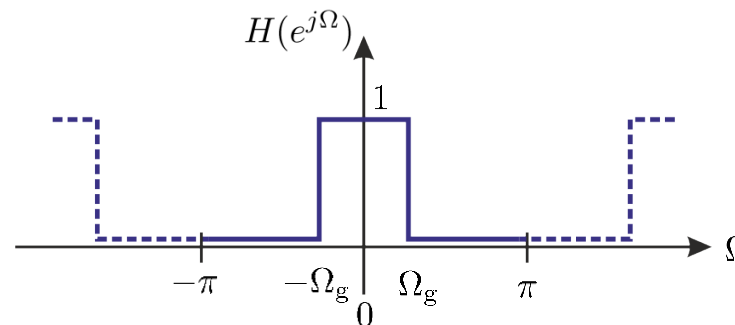
□ im Kontinuierlichen:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



□ im Diskreten:

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_g, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Einschwingverhalten idealer Filter – Teil 2:

Für kontinuierliche ideale Tiefpassfilter kann die Impulsantwort durch Anwendung der inversen Fourier-Transformation bestimmt werden:

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Lösung (nach eigener Bearbeitung) an der Tafel!

Einschwingverhalten idealer Filter – Teil 3:

Für ein ideales diskretes Tiefpassfilter ergibt sich analog zur kontinuierlichen Herleitung:

$$h_0(n) = \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin(\Omega_g n)}{\Omega_g n}.$$

Wie bei der kontinuierlichen muss auch hier der Stelle $t = 0$ bzw. $n = 0$ besondere Beachtung geschenkt werden. Zum einen könnte man die Regel von l'Hôpital anwenden, zum anderen gilt aber auch

$$\begin{aligned} h_0(t = 0) &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega}_{\text{Fläche unter } H(j\omega)} \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\omega_g = \frac{\omega_g}{\pi}. \end{aligned}$$

Analog dazu gilt für diskrete ideale Tiefpassfilter

$$h_0(n = 0) = \frac{\Omega_g}{\pi}.$$

Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

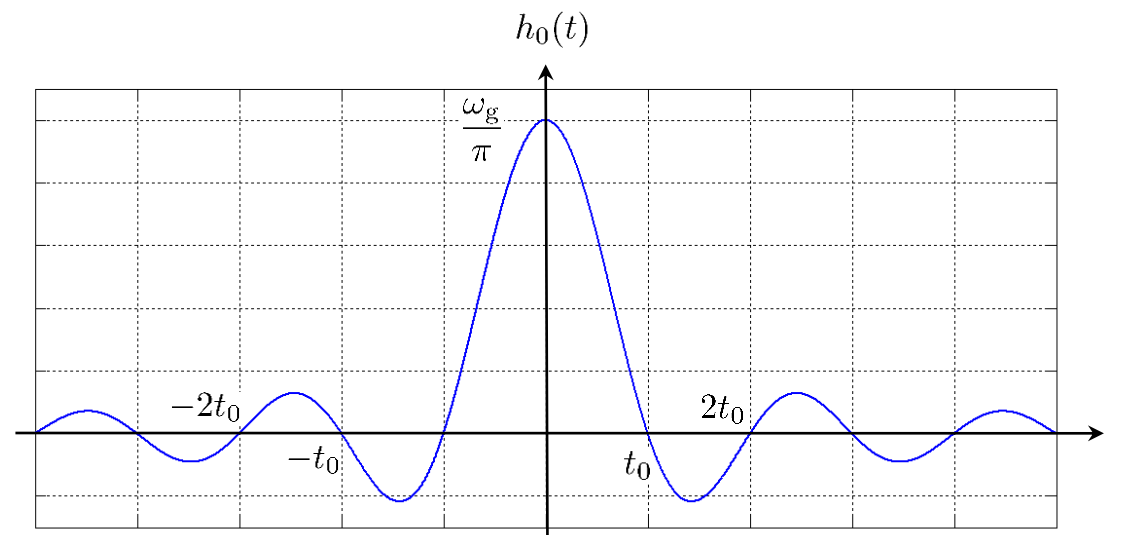
Einschwingvorgänge – Teil 10

Einschwingverhalten idealer Filter – Teil 4:

Analysiert man $h_0(t)$ weiter, so stellt man fest, dass es äquidistante Nullstellen wegen des Sinus-Terms im Zähler der Impulsantwort gibt. Die erste Nullstelle entsteht bei $\omega_g t_0 = \pi$, d.h. der Abstand der Nullstellen beträgt:

$$t_0 = \frac{\pi}{\omega_g}$$

Skizze der Impulsantwort:

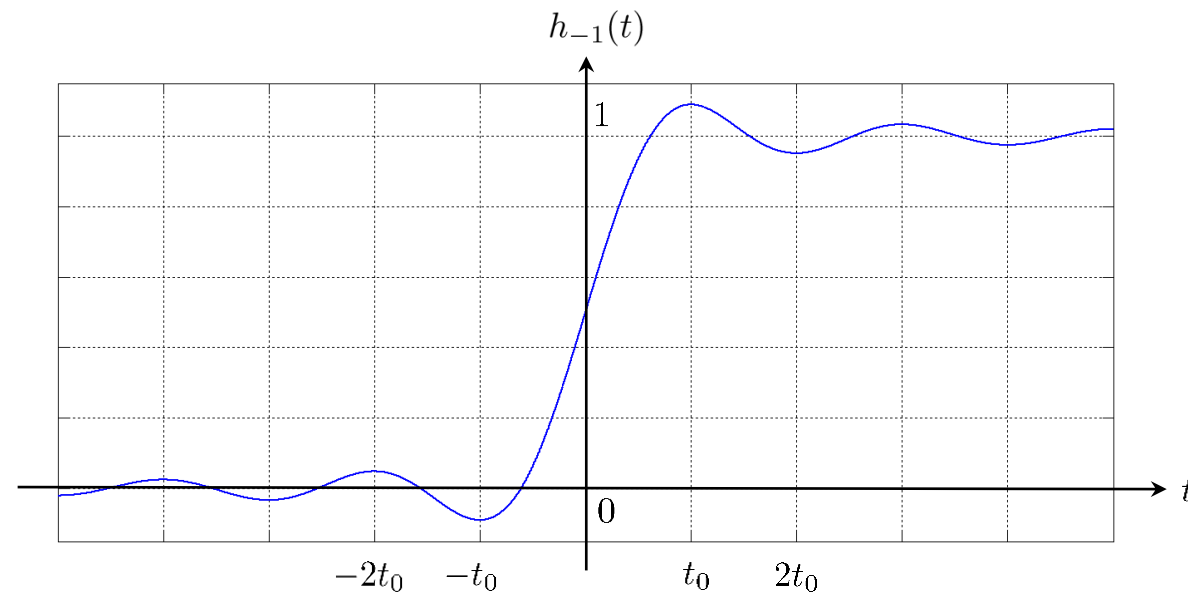


System ist nicht kausal!

Einschwingverhalten idealer Filter – Teil 5:

Die **Sprungantwort** $h_{-1}(\dots)$ ergibt sich durch Integration bzw. Summation der Impulsantwort $h_0(\dots)$.

Skizze für den kontinuierlichen Fall:



Abschließende Zusammenfassung

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme**
 - Reaktion auf Elementarsignale
 - Reaktion auf beliebige Signale
 - Zusammenhänge zwischen den Systemkenngrößen
 - Stabilität linearer Systeme
 - Besondere Symmetrien bei reellwertigen Systemen
 - Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen
- Modulation