Signale und Systeme II

Modulklausur Sommersemester 2023

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 18.09.2023

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/35	/32	/33

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme II

Modulklausur Sommersemester 2023

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	CAP3, Hörsaal 2
Datum:	18.09.2023
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

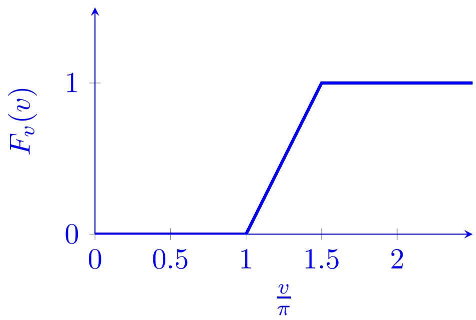
Aufgabe 1 (35 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(v)$ des ergodischen Zufallsprozesses mit statistisch unabhängigen Werten:

$$F_v(v) = \begin{cases} 0, & \text{für } v < \pi, \\ \frac{2}{\pi}(v - \pi), & \text{für } \pi \leq v < \frac{3\pi}{2}, \\ 1, & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq v. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(v)$. (2 P)



(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_v(v)$. (2 P)

$$f_v(v) = \begin{cases} 0, & \text{für } v < \pi, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{für } \pi \leq v < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq v. \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie (3 P)

(i) den linearen Mittelwert m_v,

(ii) die Varianz σ_v^2 und

(iii) (als Zahlenwert) den quadratischen Mittelwert $m_v^{(2)}$

der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_v(v)$.

(i)

$$m_v = \int_{-\infty}^{\infty} v f_v(v) dv$$

$$m_v = \frac{v_{max} + v_{min}}{2} = \frac{\frac{3\pi}{2} + \pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

(ii)

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{12}(v_{max} - v_{min})^2 = \frac{\pi^2}{48}$$

(iii)

$$m_v^{(2)} = m_v^2 + \sigma_v^2 \approx 15{,}63$$

(d) Bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{vv}(e^{j\Omega})$. (4 P)
Da der Prozess statistisch unabhängige Werte aufweist, sind diese auch unkorreliert und es ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion:

$$s_{vv}(\kappa) = m_v^2 + \sigma_v^2 \gamma_0(\kappa).$$

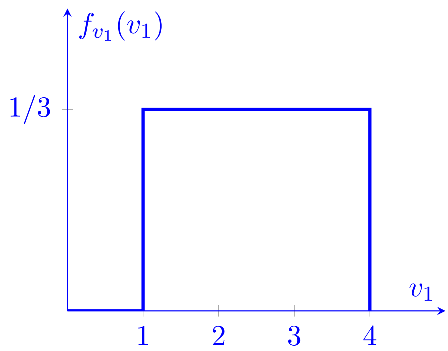
Für das Leistungsdichtespektrum gilt somit:

$$S_{vv}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{s_{vv}(\kappa)\} = 2\pi \cdot m_v^2 \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \lambda 2\pi) + \sigma_v^2.$$

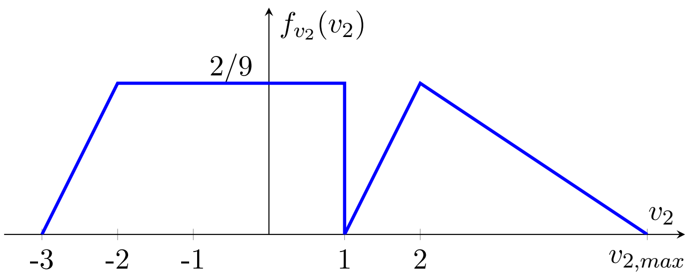
Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei ein gleichverteilter, diskreter Zufallsprozess $v_1(n)$, dessen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion innerhalb des Wertebereichs $v_1 \in [1,\ 4]$ ungleich von null definiert ist.

(e) Bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{v_1}(v_1)$ und zeichnen Sie diese. Bitte beschriften Sie alle Achsen! (2 P)
Da es sich um einen gleichverteilten Zufallsprozess handelt ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:



Des Weiteren soll ein zweiter, von $v_1(n)$ statistisch unabhängiger, Zufallsprozess $v_2(n)$ betrachtet werden. Dieser ist durch die folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion definiert:



(f) Bestimmen Sie den Wert $v_{2,max}$. (2 P)

Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{v_2}(v_2)dv_2 = 1$$

und scharfem Hinsehen ergibt sich $v_{2,max} = 3$

(g) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{v_2}(v_2)$ in mathematischer Form an. (3 P)

$$f_{v_2}(v_2) = \begin{cases} \frac{2}{9}v_2 + \frac{2}{3}, & \text{für } -3 \le v_2 < -2, \\ \frac{2}{9}, & \text{für } -2 \le v_2 < 1, \\ \frac{2}{9}v_2 - \frac{2}{9}, & \text{für } 1 \le v_2 < 2, \\ -\frac{2}{9}v_2 + \frac{2}{3}, & \text{für } 2 \le v_2 < 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

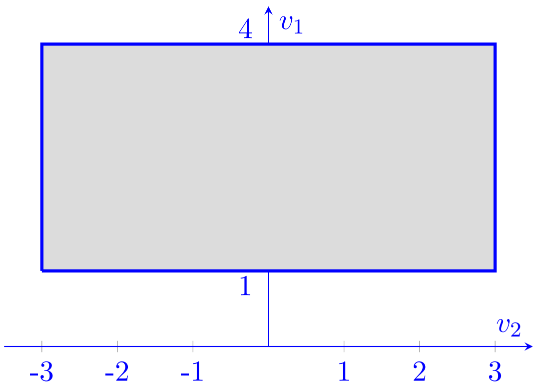
(h) Bestimmen Sie die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{v_1,v_2}(v_1, v_2)$ der beiden Prozesse $v_1(n)$ und $v_2(n)$. Markieren Sie in einer von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene den Bereich in dem gilt $f_{v_1,v_2}(v_1, v_2) > 0$. (6 P)

Da statistische Unabhängigkeit vorliegt gilt:

$$f_{v_1,v_2} = f_{v_1}(v_1) \cdot f_{v_2}(v_2).$$

Somit ergibt sich:

$$f_{v_1,v_2} = \begin{cases} \frac{2}{27}v_2 + \frac{2}{9}, & \text{für } 1 \le v_1 < 4 \text{ und } -3 \le v_2 < -2, \\ \frac{2}{27}, & \text{für } 1 \le v_1 < 4 \text{ und } -2 \le v_2 < 1, \\ \frac{2}{27}v_2 - \frac{2}{27}, & \text{für } 1 \le v_1 < 4 \text{ und } 1 \le v_2 < 2, \\ -\frac{2}{27}v_2 + \frac{2}{9}, & \text{für } 1 \le v_1 < 4 \text{ und } 2 \le v_2 < 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei die folgende Verbundwahrscheinlichkeitsdichten und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

$$f_a(a) = \begin{cases} \frac{2}{5}a + \frac{1}{4}, & \text{für } 2 \leq a < 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{für } -2 \leq b < -1, \\ -\frac{1}{4}b, & \text{für } -1 \leq b < 0, \\ \frac{1}{4}b, & \text{für } 0 \leq b < 1, \\ \frac{1}{4}, & \text{für } 1 \leq b < 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

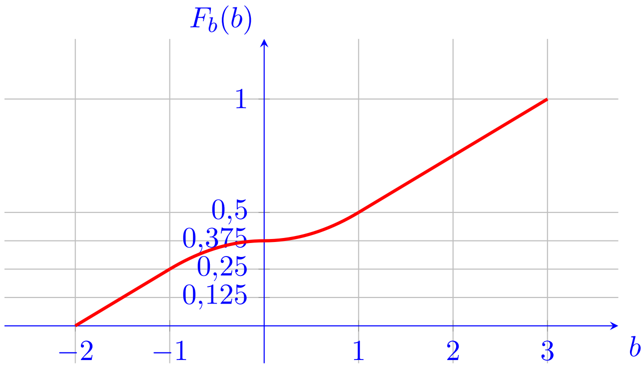
$$F_c(c) = \begin{cases} 0, & \text{für } c < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\pi}c + \frac{1}{2}, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq c < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad F_d(d) = \begin{cases} 0, & \text{für } d < \frac{3}{4}, \\ d - \frac{3}{4}, & \text{für } \frac{3}{4} \leq d < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{4}, & \text{für } \frac{3}{2} \leq d < \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{3}d - \frac{1}{9}, & \text{für } \frac{5}{2} \leq d < \frac{7}{2}, \\ 1, & \text{für } \frac{7}{2} \leq d. \end{cases}$$

(i) Welche der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. Verteilungsfunktionen sind korrekt? Geben Sie Sie diese an und erläutern Sie, welche Bedingungen dafür erfüllt sein müssen! (5 P)

Dichte: Integral identisch 1, keine Funktionswerte kleiner 0 -> erfüllt von $f_b(b)$

Verteilungsfunktion: Grenzwert gegen $-\infty$ identisch 0, Grenzwert gegen ∞ identisch 1, monoton steigend -> erfüllt von $F_c(c)$

(j) Skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_?(?)$ zu der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_?(?)$, die Sie in (i) als Kandidaten identifiziert haben. (4 P)



(k) Geben Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $f_?(?)$ zu der Verteilungsfunktion $F_?(?)$, die Sie in (i) als Kandidaten identifiziert haben, als Funktion an! (2 P)

$$f_c(c) = \begin{cases} 0, & \text{für } c < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\pi}, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq c < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende Differenzengleichung eines linearen zeitinvarianten Systems mit Eingang $v(n)$ und Ausgang $y(n)$:

$$y(n+1) = 2y(n+2) - 2v(n+1) - v(n) + 2v(n-1) - 4v(n-2) + 4v(n-3).$$

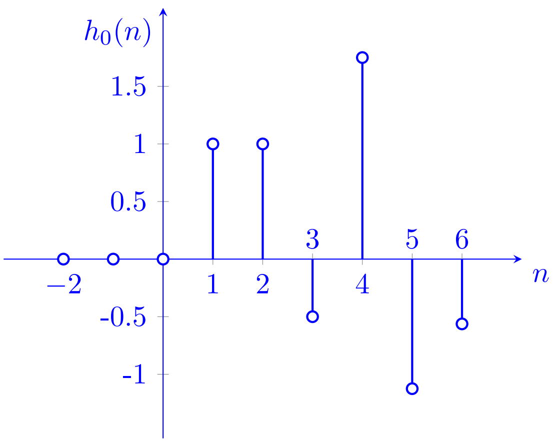
(a) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems? (3 P)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - z^{-3} + 2z^{-4} - 2z^{-5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$
$$= z^{-1}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}z^{-2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - z^{-3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 2z^{-4}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 2z^{-5}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

(b) Wie lautet die Impulsantwort des Systems? Zeichnen Sie diese für $-3 < n < 7$. (6 P)

Inverse z-Transformation des Ergebnisses aus *(a)* (bzw. Anregung des Systems mit $v(n) = \gamma_0$) ergibt:

$$h_0(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\gamma_{-1}(n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\gamma_{-1}(n-2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\gamma_{-1}(n-3)$$
$$+ 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\gamma_{-1}(n-4) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\gamma_{-1}(n-5)$$



(c) Besitzt das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie sowohl anhand Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe *(a)* als auch anhand Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe *(b)*. (1,5 P)

Nein, da der Zählergrad in der Übertragungsfunktion $H(z)$ kleiner als der Nennergrad ist und die Impulsantwort $h(n)$ an der Stelle $h(0) = 0$ ist.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Das Zustandsraummodell sei durch die folgenden Zustandsgleichungen beschrieben:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}(n), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{v}(n). \tag{2}$$

Zudem ist ein System definiert, das mit den folgenden vier Matrizen parametrisiert sei:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. (6 P)
Hinweis: Vereinfachen Sie im letzten Schritt das Ergebnis so, dass der höchste Nennergrad in der Übertragungsmatrix 1 ist.

$$\begin{aligned}
H(z) &= \boldsymbol{C} \cdot [z \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[z \cdot \boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-\frac{1}{4})} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & z-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-\frac{1}{4})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2z-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{3+z-1}{(z-1)(z-\frac{1}{4})} \\
&= \frac{z+2}{(z-1)(z-\frac{1}{4})}
\end{aligned}$$

(e) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$. (2 P)
Aufgrund eines Fehlers war die ursprüngliche Lösung von Aufgabe d):

$$H(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4}}$$

Dementsprechend wäre die Lösung für e):

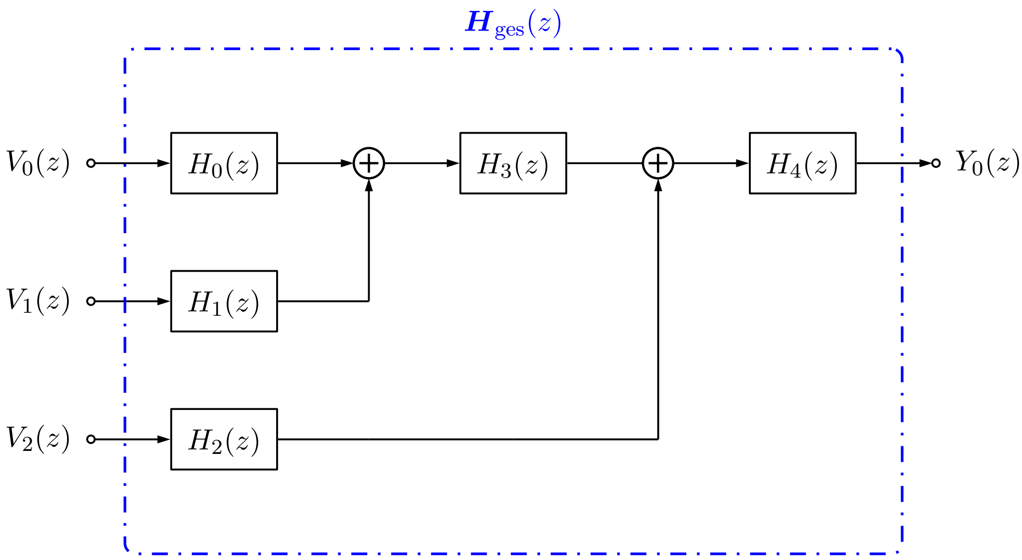
$$\begin{aligned}
h_0(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{3}{z-\frac{1}{4}} \right\} \\
&= 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \gamma_{-1}(n-1), \qquad \forall\, |z| > \left|\frac{1}{4}\right|
\end{aligned}$$

Da durch die komplexere Lösung in d) die Aufgabe e) umfangreicher geworden ist, wurde die Korrektur dementsprechend angepasst.

(f) Ist das System $H(z)$ stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 P)
Ja, da das System $H(z)$ eine Polstelle von $z_{\infty,0} = \frac{1}{4}$ besitzt und damit die Stabilitätsbedingung $|z_\infty| < 1$ erfüllt.

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Es sei nun nachfolgendes System gegeben:



(g) Bestimmen Sie $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$ in Abhängigkeit von $H_i(z)$, $i \in [0,1,2,3,4]$. Was beschreiben die einzelnen Elemente von $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$? (5 P)
Es seien $\boldsymbol{V}(z) = [V_0(z), V_1(z), V_2(z)]^{\mathrm{T}}$, wobei $V_i(z)$ die z-Transformation von $v_i(n)$ mit $i \in [0,1,2]$ beschreibt.

$$Y_0(z) = \boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)\ \boldsymbol{V}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{1,0}(z) & H_{2,0}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0(z) \\ V_1(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix}$$

$H_{i,0}$ beschreibt somit den Einfluss von Eingang v_i auf Ausgang y_0. Somit ergibt sich:

$$\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z)H_3(z)H_4(z) & H_1(z)H_3(z)H_4(z) & H_2(z)H_4(z) \end{bmatrix}.$$

Es werde nun lediglich der Übertragungspfad von $V_0(z)$ auf $Y_0(z)$ betrachtet ($V_1(z)$ und $V_2(z)$ sind Null und daher zu vernachlässigen). Außerdem gelte:

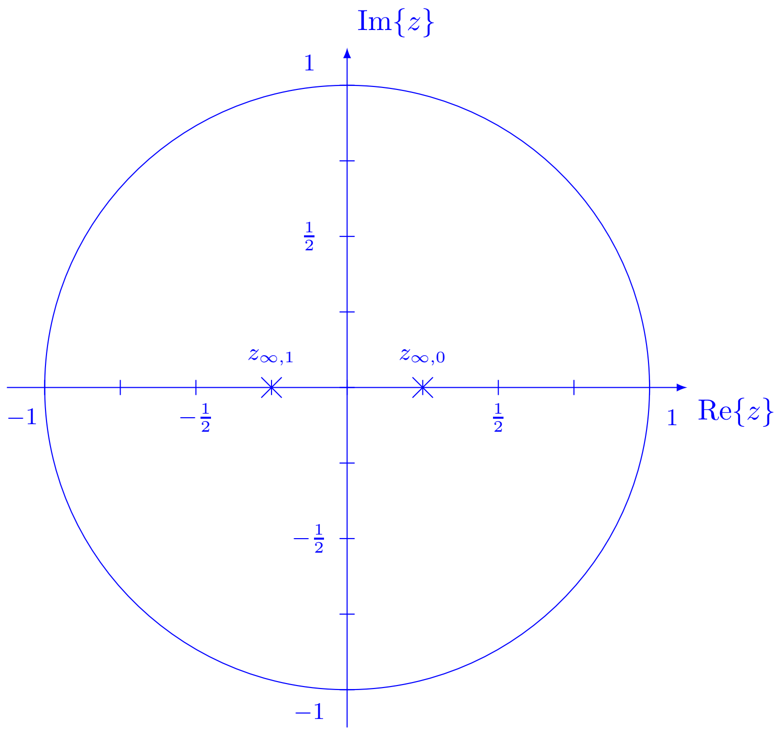
$$H_0(z) = \frac{z - \frac{1}{4}}{z + \frac{1}{4}}, \qquad H_1(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{4}}, \qquad H_2(z) = \frac{z + \frac{1}{4}}{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}},$$

$$H_3(z) = \frac{z + \frac{1}{4}}{(z - \frac{1}{4})(z + 1)}, \qquad H_4(z) = \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{16}}.$$

(h) Zeichnen Sie das Pol/Nullstellen Diagramm für den betrachteten Übertragungspfad. (4,5 P)

$$
\begin{aligned}
H_{0,0}(z) &= H_0(z)\ H_3(z)\ H_4(z) \\
&= \frac{z-\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{4}}\ \frac{z+\frac{1}{4}}{(z-\frac{1}{4})(z+1)}\ \frac{z+1}{z^2-\frac{1}{16}} \\
&= \frac{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{4})(z+1)}{(z+\frac{1}{4})(z-\frac{1}{4})(z+1)(z^2-\frac{1}{16})} \\
&= \frac{1}{z^2-\frac{1}{16}} \\
&= \frac{1}{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{4})}
\end{aligned}
$$

Das System besitzt zwei Polstellen. Die erste Polstelle befindet sich bei $z_{\infty,0} = \frac{1}{4}$ und die zweite bei $z_{\infty,1} = -\frac{1}{4}$. Somit ergibt sich das nachfolgendes Pol-/Nullstellendiagramm:



(i) Ist das betrachtete Teilsystem: (3 P)

(i) stabil,
Ja das System ist stabil, da alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

(ii) kausal,
Ja, da der Zählergrad des Systems kleiner als der Nennergrad des Systems

ist und somit der Ausgang $y(n)$ nicht von zukünftigen Eingangswerten $v(n)$ abhängt.

(iii) oder minimalphasig?
Ja, da keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

(a) Was bewirken Amplitudenfehler bei winkelmodulierten Signalen und wie kann diese Signalverfälschung empfangsseitig kompensiert werden? (2 P)

Amplitudenfehler sind bei Winkelmodulation unkritisch. Die Verfälschung kann (weitgehend) durch einen Begrenzer-Verstärker mit anschließendem Bandpassfilter kompensiert werden.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben sei das System aus Abbildung 1 zur Übertragung des Signals $v(n)$.

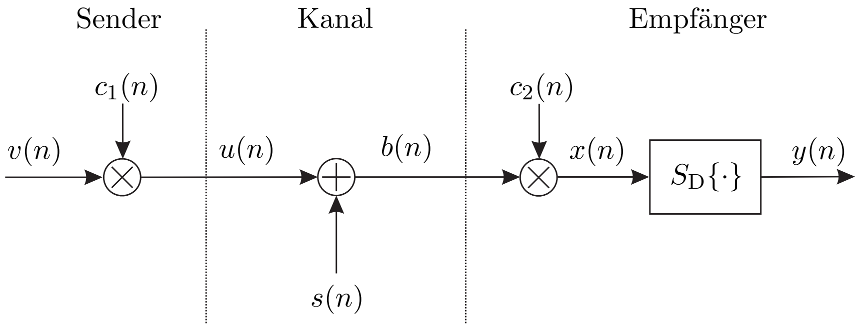


Abbildung 1: Übertragungsstrecke

Das Spektrum $V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}$ sei durch

$$V(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4} - |\Omega + \lambda \cdot 2\pi|\right)}{\frac{\pi}{4}} & , \text{ falls } \frac{-\pi}{4} \leq \Omega + \lambda \cdot 2\pi \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

gegeben.

(b) Skizzieren Sie den Realteil des Spektrums $V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}$ im Bereich von $-\pi < \Omega < \pi$. Beschriften Sie alle Achsen! (2 P)

Der Realteil des Spektrums $V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}$ ist in Abbildung 2 dargestellt.

(c) Zur Modulation wird das Trägersignal $c_1(n) = 2\cos(\Omega_c n)$ mit $\Omega_c = \frac{3}{4}\pi$ verwendet. Berechnen Sie das Spektrum $U(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{u(n)\}$ in Abhängigkeit von $V(e^{j\Omega})$ und zeichnen Sie den Realteil des Spektrums $U(e^{j\Omega})$ im Bereich von $-2\pi < \Omega < 2\pi$. Beschriften Sie alle Achsen! Welche Modulationsart liegt vor? (5 P)

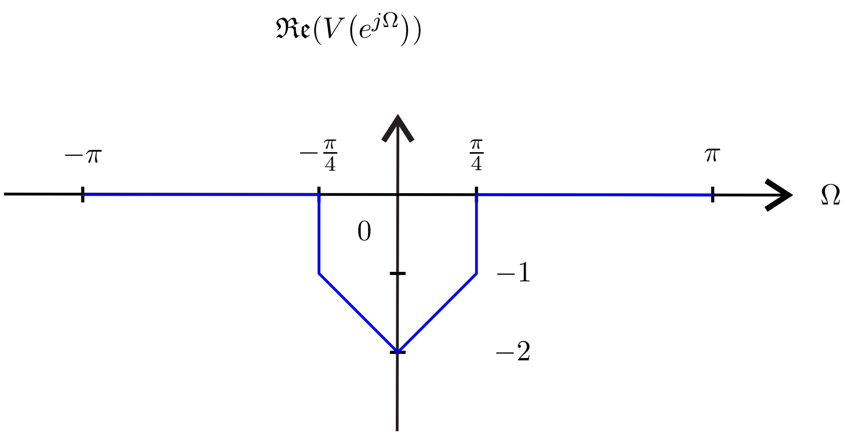


Abbildung 2: Spektrum

Es handelt sich um eine Zweiseitenbandmodulation. Für das Spektrum gilt:

$$
\begin{aligned}
U(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{u(n)\} \\
&= \mathcal{F}\{v(n)\cdot c_1(n)\} \\
&= \mathcal{F}\{v(n)\cdot 2\cos(2\pi\Omega_c n)\} \\
&= \frac{1}{2\pi}V(e^{j\Omega}) \circledast \left[2\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega+\Omega_c-2\pi\lambda)+\delta_0(\Omega-\Omega_c-2\pi\lambda)]\right] \\
&= \left[V(e^{j(\Omega+\Omega_c)}) + V(e^{j(\Omega-\Omega_c)})\right]
\end{aligned}
$$

Für das Spektrum folgt:

$$
U(e^{j\Omega}) = \left[V(e^{j(\Omega+\Omega_c)}) + V(e^{j(\Omega-\Omega_c)})\right]
$$

Die Skizze ist Abbildung 3 dargestellt.

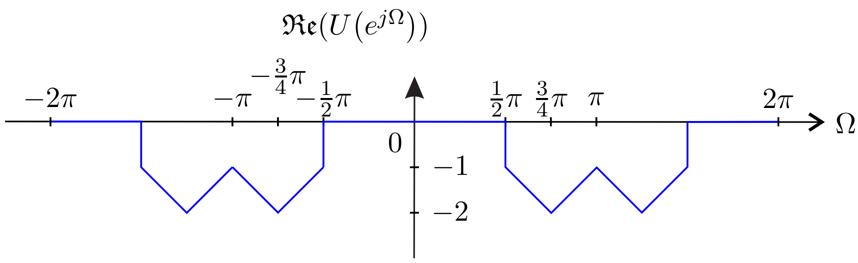


Abbildung 3: Spektrum

(d) Aufgrund einer nicht störungsfreien Signalübertragung koppelt das Signal $s(n)$ mit dem reellen Spektrum aus Abbildung 4 additiv ein. Berechnen Sie das Spektrum $B(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{b(n)\}$ in Abhängigkeit von $U(e^{j\Omega})$ und $S(e^{j\Omega})$ und skizzieren Sie im Bereich von $-\pi < \Omega < \pi$ den Realteil des Spektrums $B(e^{j\Omega})$. Beschriften Sie alle Achsen! (3 P)

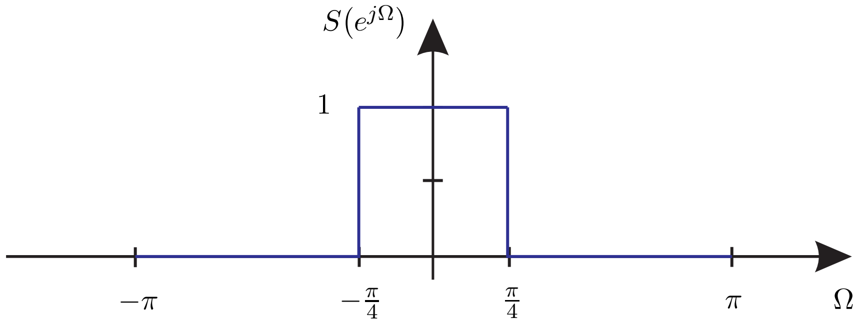


Abbildung 4: Spektrum

Für $B(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{b(n)\}$ ergibt sich

$$B(e^{j\Omega}) = U(e^{j\Omega}) + S(e^{j\Omega}).$$

Für das Spektrum folgt

$$B(e^{j\Omega}) = U(e^{j\Omega}) + S(e^{j\Omega}).$$

Die Skizze ist Abbildung 5 dargestellt.

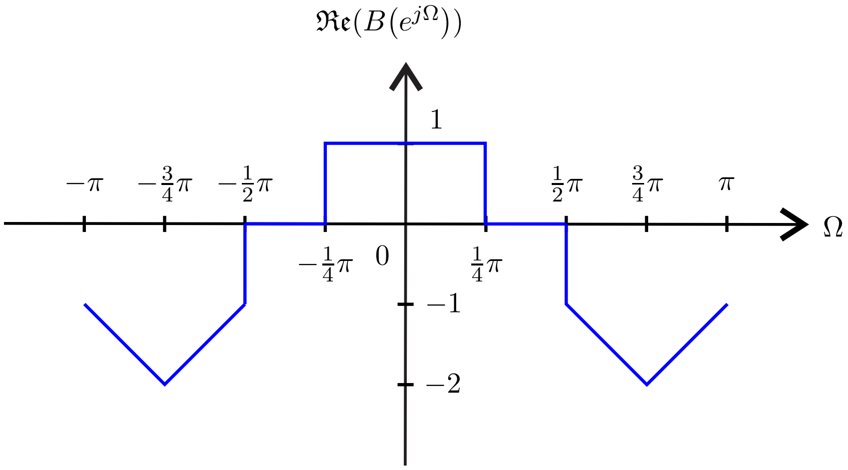


Abbildung 5: Spektrum

(e) Die Demodulation erfolgt mit dem Signal $c_2(n) = \cos(\Omega_c n + \Delta)$ wobei Δ einen Phasenfehler beschreibt. Berechnen Sie das Spektrum $X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\}$ in Abhängigkeit von $V(e^{j\Omega})$, $S(e^{j\Omega})$, Δ und Ω_c. (10 P)

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{x(n)\} \\
&= \mathcal{F}\{b(n)\cdot c_2(n)\} \\
&= \mathcal{F}\{(v(n)\cdot c_1(n)+s(n))\cdot c_2(n)\} \\
&= \mathcal{F}\{v(n)\cdot c_1(n)\cdot c_2(n)+s(n)\cdot c_2(n)\} \\
&= \mathcal{F}\{v(n)\cdot 2\cos(\Omega_c n)\cdot\cos(\Omega_c n+\Delta)+s(n)\cdot\cos(\Omega_c n+\Delta)\} \\
&= \underbrace{\mathcal{F}\{v(n)\cdot[\cos(-\Delta)+\cos(2\Omega_c n+\Delta)]\}}_{\widehat{V}(e^{j\Omega})}+\underbrace{\mathcal{F}\{s(n)\cdot\cos(\Omega_c n+\Delta)\}}_{\widehat{S}(e^{j\Omega})} \\
&= \widehat{V}(e^{j\Omega})+\widehat{S}(e^{j\Omega})
\end{aligned}
$$

Für eine Cosinus-Schwingung mit einem Phasenfehler ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\cos(\Omega_c n+\Delta)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(e^{j(\Omega_c n+\Delta)}+e^{-j(\Omega_c n+\Delta)})\right\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\Omega_c n}e^{j\Delta}+e^{-j\Omega_c n}e^{-j\Delta})\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{j\Delta}\mathcal{F}\left\{e^{j\Omega_c n}\right\}+e^{-j\Delta}\mathcal{F}\left\{e^{-j\Omega_c n}\right\}\right) \\
&= \frac{e^{j\Delta}}{2}2\pi\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\delta_0(\Omega-\Omega_c-2\pi\lambda)+\frac{e^{-j\Delta}}{2}2\pi\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\delta_0(\Omega+\Omega_c-2\pi\lambda) \\
&= e^{j\Delta}\,\pi\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\delta_0(\Omega-\Omega_c-2\pi\lambda)+e^{-j\Delta}\,\pi\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\delta_0(\Omega+\Omega_c-2\pi\lambda)
\end{aligned}
$$

Somit folgt für $\widehat{S}(e^{j\Omega})$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{S}(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2\pi}\left[e^{j\Delta}\,\pi S(e^{j(\Omega-\Omega_c)})+e^{-j\Delta}\,\pi S(e^{j(\Omega+\Omega_c)})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{j\Delta}S(e^{j(\Omega-\Omega_c)})+e^{-j\Delta}S(e^{j(\Omega+\Omega_c)})\right]
\end{aligned}
$$

Für $\widehat{V}(e^{j\Omega})$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{V}(e^{j\Omega}) =& V(e^{j\Omega})\cos(-\Delta)+ \\
& \frac{1}{2\pi}\left(e^{j\Delta}\pi V(e^{j(\Omega-2\Omega_c)})+e^{-j\Delta}\pi V(e^{j(\Omega+2\Omega_c)})\right) \\
=& V(e^{j\Omega})\cos(\Delta)+\frac{1}{2}\left[e^{j\Delta}V(e^{j(\Omega-2\Omega_c)})+e^{-j\Delta}V(e^{j(\Omega+2\Omega_c)})\right]
\end{aligned}
$$

(f) Zur idealen Rekonstruktion soll das System $S_D\{\cdot\}$ verwendet werden. Der Phasenfehler wird dabei zu $\Delta = 40°$ angenommen. Welche Eigenschaften muss dieses Filter hinsichtlich Verstärkung/Dämpfung und Grenzfrequenzen haben? (2 P)

Mit Hilfe eines idealen Tiefpasses kann das ursprüngliche Signal zurückgewonnen werden. Die Grenzfrequenz sollte dabei bei $\frac{\pi}{4}$ liegen und im Durchlassbereich sollte eine Verstärkung von $\frac{1}{\cos(40°\cdot\frac{\pi}{180})}$ erfolgen.

(g) Kann der Phasenfehler zu einer vollständigen Auslöschung des demodulierten Nutzsignals im Basisband führen? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)

Der Phasenfehler skaliert das demodulierte Nutzsignal. Für einen Phasenfehler von $\Delta = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi$ mit $\lambda \in \mathrm{Z}$ ist das demodulierte Signale gleich Null und die Übertragung funktioniert nicht!

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben ist die momentane Kreisfrequenz $\Omega_m(t)$ eines frequenzmodulierten Trägers:

$$\Omega_m(t) = \begin{cases} \omega_0 + k_{\mathrm{FM}} \sin(2\pi f_0 t), & \text{für } t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(h) Berechnen Sie die zugehörige momentane Phase $\Phi(t)$. (3 P)

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \int_0^t \Omega_m(\tau) d\tau &= \omega_0 t + k_{\mathrm{FM}} \int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau \\ &= \omega_0 t + k_{\mathrm{FM}} \Big(1 - \cos(2\pi f_0 t)\Big) \frac{1}{2\pi f_0}. \end{aligned}$$

(i) Nennen Sie jeweils die Vor- und Nachteile der Amplituden- und Winkelmodulation. (4 P)
Amplitudenmodulation ist einfach bei der Umsetzung, benötigt eine kleine Bandbreite und ist störanfälliger. Winkelmodulation benötigt eine große Bandbreite und ist komplizierter in der Umsetzung.

Dies ist eine leere Seite.