

# Signale und Systeme II

## Modulklausur Sommersemester 2024

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 05.09.2024

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

<b>Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung</b>	
<p>Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.</p> <p>Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&amp;IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.</p> <p style="text-align: right;">Unterschrift: _____</p>	

<b>Korrektur</b>			
Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/33,5	/33,5
Summe der Punkte: _____ /100			

<b>Einsicht/Rückgabe</b>	
<p>Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.</p> <p><input type="checkbox"/> Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.</p> <p>Kiel, den _____ Unterschrift: _____</p>	

---

# Signale und Systeme II

## Modulklausur Sommersemester 2024

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt  
Ort: LS1, Klaus-Murmann-Hörsaal  
Datum: 05.09.2024  
Beginn: 09:00 h  
Einlesezeit: 10 Minuten  
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

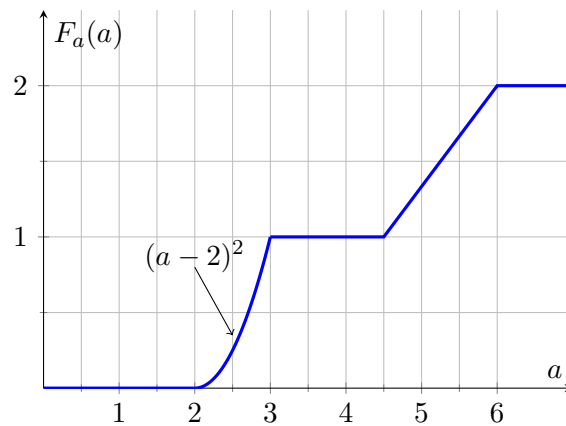
### Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

## Aufgabe 1 (33 Punkte)

**Teil 1** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei der stochastisch unabhängige Zufallsprozess  $f_a(n)$  mit der gegebenen Verteilungsfunktion:



- (a) Welche Bedingungen muss die Verteilungsfunktion allgemein erfüllen? Zeigen Sie, ob  $F_a(a)$  die Bedingungen erfüllt und skalieren Sie die Verteilungsfunktion ggf., sodass sie die Bedingung erfüllt. (4 P)

Verteilungsfunktion: Grenzwert gegen  $-\infty$  identisch 0, Grenzwert gegen  $\infty$  identisch 1, monoton steigen

Mögliche Anpassung der Verteilungsfunktion: mit  $\frac{1}{2}$  multiplizieren.

- (b) Bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_a(a)$ . Falls in Aufgabenteil (a) eine Skalierung erfolgt ist, nutzen Sie die skalierte Verteilungsfunktion. (2 P)

Es gilt  $f_a(a) = \frac{d}{da} F_a(a)$ .

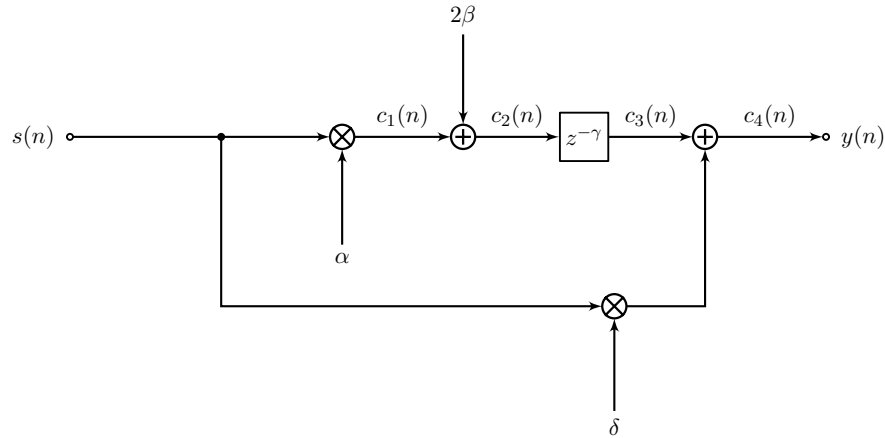
$$f_a(a) = \begin{cases} a - 2, & \text{für } 2 \leq a < 3 \\ \frac{1}{3}, & \text{für } \frac{9}{2} \leq a < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- (c) Berechnen Sie das 2. statistische Moment von  $a$  mit ihrem Ergebnis aus (b). (5 P)

$$\begin{aligned} m_a^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f_a(a) da \\ &= \int_2^3 a^2 (a - 2) da + \frac{1}{3} \int_{\frac{9}{2}}^6 a^2 da \\ &= \left[ \frac{1}{4} a^4 - \frac{2}{3} a^3 \right]_2^3 + \frac{1}{9} [a^3]_{\frac{9}{2}}^6 \\ &\approx 17,46 \end{aligned}$$

**Teil 2** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild mit den Konstanten  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\gamma \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , wobei zusätzlich  $|\delta| < 1$  gilt. Nehmen Sie an, dass das System mit stationären, mittelwertfreien, weißen Rauschen mit Leistung  $m_s^{(2)}$  angeregt wird.



- (d) Bestimmen Sie  $\alpha$  in Abhängigkeit der gewünschten Leistung  $m_{c_1}^{(2)} > 0$ . (2 P)

$$E\{c_1^2(n)\} = m_{c_1}^{(2)} = \alpha^2 \cdot m_s^{(2)}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{m_{c_1}^{(2)}}{m_s^{(2)}}}$$

- (e) Geben Sie den Erwartungswert von  $c_2(n)$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$  an. (2 P)

$$\begin{aligned} E\{c_2(n)\} &= E\{\alpha s(n) + 2\beta\} \\ &= \alpha E\{s(n)\} + 2\beta \\ &= 2\beta \end{aligned}$$

- (f) Zeigen Sie, weshalb eine beliebige Wahl von  $\gamma \in \mathbb{N}$  trotzdem dazu führt, dass das 2. zentrale Moment von  $c_3(n)$  der Leistung von  $c_1(n)$  entspricht. (4 P)

$$\begin{aligned} c_3(n) &= c_2(n - \gamma) \\ c_2(n) &= s(n)\alpha + 2\beta \\ c_3(n) &= s(n - \gamma) \cdot \alpha + 2\beta \\ \sigma_{c_3}^2 &= E\{(c_3(n) - m_{c_3})^2\} \\ &= E\{(\alpha s(n - \gamma) + 2\beta - 2\beta)(\alpha s(n - \gamma) + 2\beta - 2\beta)\} \\ &= E\{\alpha^2 s(n - \gamma)^2\} \\ &= \alpha^2 m_s^{(2)} \end{aligned}$$

Für die Leistung von  $c_1$  gilt:

$$E\{c_1^{(2)}\} = \alpha^2 m_s^{(2)}.$$

(g) Bestimmen Sie  $\delta$  so, dass  $c_4(n)$  der vorgegebenen Leistung  $m_{c_4}^{(2)}$  entspricht. (6 P)

$$\begin{aligned} c_4(n) &= c_3(n) + \delta s(n) \\ &= \alpha s(n - \gamma) + 2\beta + \delta s(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{c_4^2\} &= E\{(\alpha s(n - \gamma) + 2\beta + \delta s(n))^2\} \\ &= E\{\alpha^2 s(n - \gamma)^2 + 4\alpha\beta s(n - \gamma) + 2\alpha\delta s(n)s(n - \gamma) + 4\beta\delta s(n) + 4\beta^2 + \delta^2 s(n)^2\} \\ &= \alpha^2 E\{s(n - \gamma)^2\} + 4\alpha\beta E\{s(n - \gamma)\} + 2\alpha\delta E\{s(n)s(n - \gamma)\} + 4\beta\delta E\{s(n)\} + 4\beta^2 \\ &\quad + \delta^2 E\{s(n)^2\} \\ &= \alpha^2 m_s^{(2)} + 4\beta^2 + \delta^2 m_s^{(2)} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für  $\delta$ :

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{m_{c_4}^{(2)} - \alpha^2 m_s^{(2)} - 4\beta^2}{m_s^{(2)}}}$$

**Teil 3** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Gegeben seien die Zufallsvariablen  $x$  und  $y$  mit der zugehörigen Verbundwahrscheinlichkeitsdichte  $f_{xy}(x, y)$ :

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} P \cdot \sin(2x - y), & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(h) Bestimmen Sie den Wert der Variablen P. (4 P)

Da

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) \, dx \, dy = 1$$

gilt, kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
 P^{-1} &= \int_{y=-\frac{\pi}{2}}^0 \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x - y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{y=-\frac{\pi}{2}}^0 \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x - y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy \\
 &= \int_{y=-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(y) dy \\
 &= [\sin(y)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 1,
 \end{aligned}$$

sodass sich  $P = 1$  ergibt.

- (i) Berechnen Sie die zugehörigen Randdichten  $f_x(x)$  und  $f_y(y)$ . (4 P)  
 Für die Randdichte  $f_x(x)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 f_x(x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dy \\
 &= \begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(2x - y) dy, & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} [\cos(2x - y)]_{-\frac{\pi}{2}}^0, & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \cos(2x) - \cos(2x + \frac{\pi}{2}) & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}
 \end{aligned}$$

mit den trigonometrischen Identitäten ergibt sich:

$$f_x(x) = \begin{cases} \sin(2x) + \cos(2x) & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Randdichte  $f_y(y)$  gilt:

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x - y) dx, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x - y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}(\cos(\pi - y) - \cos(-y)) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases} \end{aligned}$$

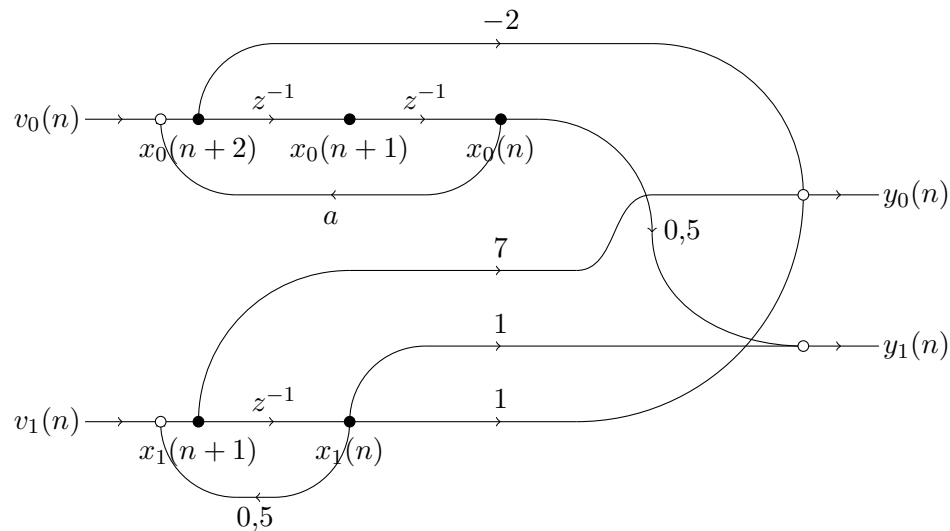
mit den trigonometrischen Identitäten ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}(-\cos(y) - \cos(y)) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos(y) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2 (33,5 Punkte)

**Teil 1** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei ein System, welches durch nachfolgenden Signalflussgraphen beschrieben ist:



- (a) Geben Sie die Anzahl  $L$  der Eingänge,  $N$  der Zustände und  $R$  der Ausgänge des Systems an. (1,5 P)

Eingänge  $L$ : 2

Zustände  $N$ : 3

Ausgänge  $R$ : 2

- (b) Bestimmen Sie die Matrizen/Vektoren/Skalare  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  für obiges System. (4 P)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{v}(n)$$

$$\begin{bmatrix} x_0(n+2) \\ x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{v}(n)$$

$$\begin{bmatrix} y_0(n) \\ y_1(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}$$



- (c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . (3 P)  
 Das charakteristische Polynom ist gegeben durch  $N(z) = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ . Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} N(z) &= \det (z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} z & -a & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & z - 0,5 \end{bmatrix} \right) \\ &= (z)(z)(z - 0,5) - (z - 0,5)(-1)(-a) \\ &= (z - 0,5)(z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) \\ &= z^3 - 0,5z^2 - za + 0,5a \end{aligned}$$

- (d) Definieren Sie einen geeigneten Wertebereich für den Parameter  $a$ , so dass das System stabil ist. (2,5 P)

Das System ist stabil, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  innerhalb des Einheitskreises liegen. Das charakteristische Polynom des Systems ist  $N(z) = z^3 - 0,5z^2 - az + 0,5a$ , dessen Eigenwerte die Lösungen  $z_1 = 0,5$ , sowie  $z_2 = \sqrt{a}$  und  $z_3 = -\sqrt{a}$ . Daraus folgt  $|a| < 1$ .

**Teil 2** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben ist die Differenzgleichung des Systems

$$y(n) = -2y(n-1) + 5v(n) + 10v(n-1) + v(n-4) \quad .$$

- (e) Nennen Sie die Formel für den Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion  $H(z)$ , Eingang  $V(z)$ , sowie Ausgang  $Y(z)$ . (1 P)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

- (f) Bestimmen Sie anhand der Differenzgleichung die Übertragungsfunktion  $H(z)$ . (3 P)

$$y(n) = -2y(n-1) + 5v(n) + 10v(n-1) + v(n-4)$$

$$y(n) + 2y(n-1) = 5v(n) + 10v(n-1) + v(n-4)$$

Transformation in den Z-Bereich:

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) = 5V(z) + 10z^{-1}V(z) + z^{-4}V(z)$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1}) = V(z)(5 + 10z^{-1} + z^{-4})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

$$H(z) = \frac{5 + 10z^{-1} + z^{-4}}{1 + 2z^{-1}}$$

Multiplizieren mit  $\frac{z^4}{z^4}$ :

$$H(z) = \frac{5z^4 + 10z^3 + 1}{z^4 + 2z^3}$$

- (g) Nennen Sie die Gleichung zur Berechnung der Übertragungsfunktion  $H(z)$  mittels der Matrizen **A**, **B**, **C** und **D** der Zustandsraumbeschreibung. (1 P)

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- (h) Gegeben seien die Matrizen (2 P)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 3] \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = [0].$$

Treffen Sie eine Aussage, ob es sich dabei um das selbe System handelt.

Es handelt sich nicht um das selbe System, da z.B. kein direkter Durchgriff existiert.

- (i) Bestimmen Sie die Impulsantwort  $h_0(n)$  der Übertragungsfunktion (4 P)

$$H(z) = \frac{3z - 0,75 + 0,5z - 0,25}{z^2 - 0,75z + 0,125} + 1 \quad .$$

$$h_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$

Vereinfachen:

$$H(z) = \frac{3(z - 0,25) + 0,5(z - 0,5)}{(z - 0,25)(z - 0,5)} + 1 \quad .$$

$$H(z) = 3\frac{1}{(z - 0,5)} + 0,5\frac{1}{(z - 0,25)} + 1 \quad .$$

Nutzung der Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} & \gamma_0(n) \circ \bullet 1, \quad \forall z \\ & \left( \begin{matrix} n + \lambda + 1 \\ \kappa \end{matrix} \right) a^{n+\lambda-\kappa-1} \gamma_{-1}(n + \lambda - \kappa - 1) \circ \bullet \frac{z^\lambda}{(z - a)^{\kappa+1}}, \quad |z| > |a|, \end{aligned}$$

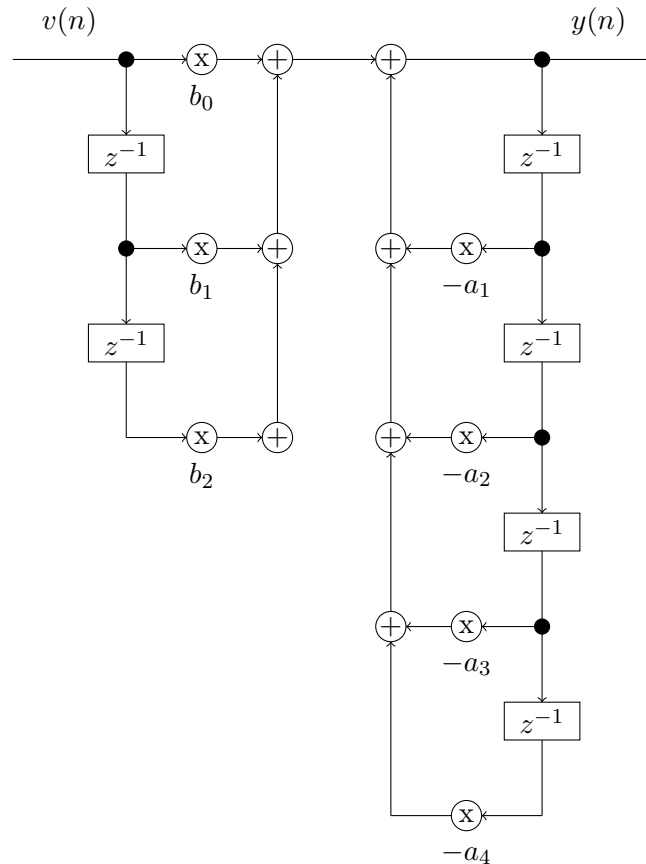
daraus resultiert:

$$h_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \gamma_0(n) + 0,5(0,25^{n-1}\gamma_{-1}(n - 1)) + 3(0,5^{n-1}\gamma_{-1}(n - 1)) \quad .$$

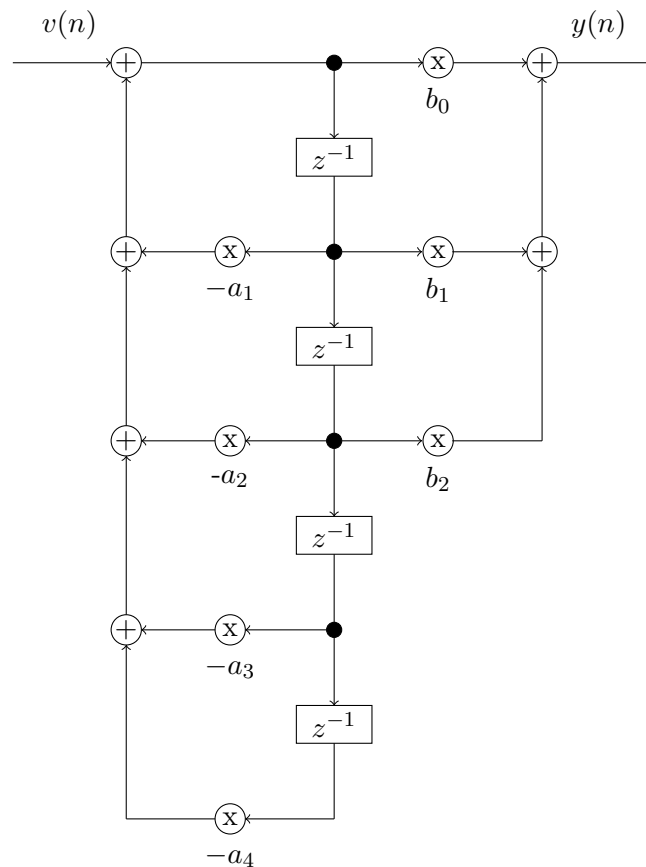
**Teil 3** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Für diesen Aufgabenteil ist die Differenzengleichung, sowie eine Darstellung in einer der zwei Direktformen gegeben.

$$y(n] = -2y(n - 1) + y(n - 3) - 0,5y(n - 4) + 0,3v(n) - 7v(n - 1) - 3v(n - 2)$$



- (j) Bestimmen sie alle Koeffizienten  $a_i$ , sowie  $b_i$ . (3,5 P)  
 $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = 0,5, b_0 = 0,3, b_1 = -7, b_2 = -3$
- (k) Neben der dargestellten Direktform existiert eine weitere Direktform. Wandeln Sie (4 P)  
das gegebene System in eine Realisierung in der anderen Direktform um.



(l) Wandeln Sie die Differenzgleichung in eine Zustandsraumbeschreibung um. (4 P)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\mathbf{c} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T = [-7 \ -3 \ 0 \ 0]^T,$$

$$d = b_0 = 0,3.$$

Es folgt die Zustandsraumbeschreibung:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}v(n),$$

$$y(n) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n) + dv(n).$$

### Aufgabe 3 (33,5 Punkte)

**Teil 1** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

- (a) Was wird unter der Modulation eines Signals verstanden? Nennen Sie mindestens drei verschiedene Modulationsarten. (2 P)

Unter der Modulation eines Signals wird die spektrale Verschiebung eines Nutzsingnals anhand eines Trägersignals verstanden.

Modulationsarten: Amplitudenmodulation (AM), Phasenmodulation (PM) und Frequenzmodulation (FM).

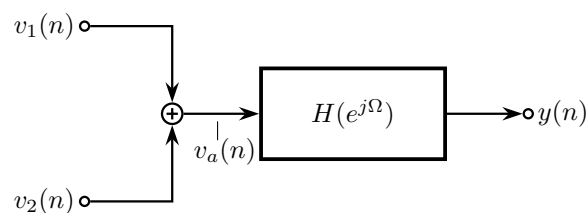
- (b) Worin unterscheidet sich die Einseitenbandmodulation von der Zweiseitenband Modulation? Welche der beiden Modulationen ist der anderen vorzuziehen und warum? (2 P)

Bei der Zweiseitenbandmodulation wird das Nutzsingnal mit einem Cosinus moduliert. Im Spektrum wird dadurch das Spektrum des Nutzsingnals auf die negative und positive Trägerfrequenz projiziert. Die Einseitenbandmodulation entspricht einer Zweiseitenbandmodulation mit anschließender Tiefpass-, Hochpass- oder Bandpassfilterung.

Die Einseitenbandmodulation ist der Zweiseitenbandmodulation vorzuziehen, da hier weniger Bandbreite zur Übertragung des gleichen Informationsgehalts verwendet werden muss.

**Teil 2** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sei das System aus der unteren Abbildung zur Übertragung des Signals  $v_a(n) = v_1(n) + v_2(n)$  mit  $v_1(n) = \cos(\Omega_1 n)$  und  $v_2(n) = \cos(\Omega_2 n)$ , wobei  $\Omega_1 < \Omega_2 < \pi$ .



- (c) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte  $V_a(e^{j\Omega})$  von  $v_a(n)$  und skizzieren Sie  $V_a(e^{j\Omega})$  im Bereich von  $-\pi$  bis  $\pi$ . (4,5 P)

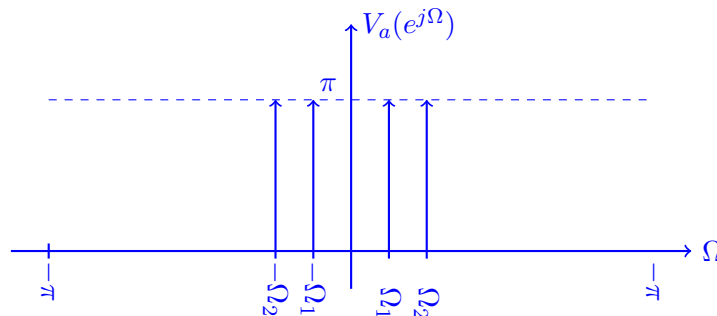
Nutze Zeitbereich-Frequenzbereich Korrespondenz.

$$v_x(n) = \cos(\Omega_x n)$$

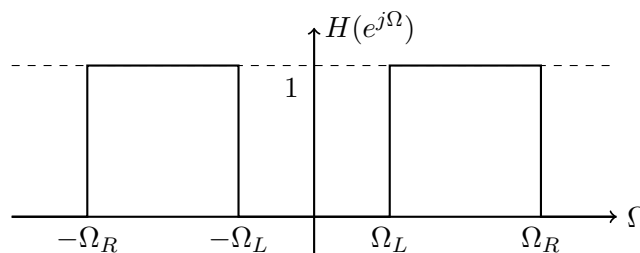
$$V_x(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_x - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega - \Omega_x - \lambda 2\pi)]$$

Somit gilt für  $V_a(e^{j\Omega}) = V_1(e^{j\Omega}) + V_2(e^{j\Omega})$ :

$$V_a(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega + \Omega_1 - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega - \Omega_1 - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega + \Omega_2 - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega - \Omega_2 - \lambda 2\pi)$$



Das unmodulierte Signal  $v_a(n)$  soll nun über einen Kanal mit der reellwertigen Übertragungsfunktion  $H(e^{j\Omega})$  aus der unteren Abbildung gesendet werden.



- (d) Wie hoch muss die Bandbreite von  $H(e^{j\Omega})$  sein und welche Bedingungen müssen die Frequenzen  $\Omega_L$  und  $\Omega_R$  erfüllen, damit sich  $v_a(n)$  hinsichtlich der Bandbreite mittels linearer Modulation über den Kanal  $H(e^{j\Omega})$  vollständig übertragen lässt? (3 P)

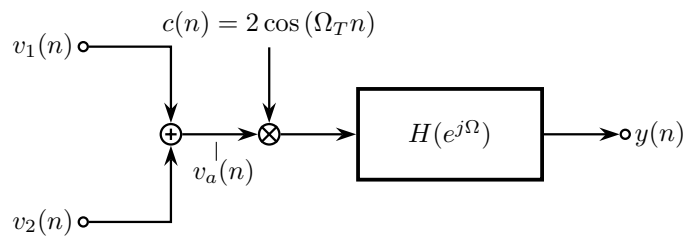
Für die Bandbreite des Übertragungskanals  $H(e^{j\Omega})$  gilt:

$$B = \Omega_R - \Omega_L \geq \Omega_2 - \Omega_1.$$

Da  $\Omega_2 > \Omega_1$  muss für  $\Omega_R$  und  $\Omega_L$  gelten:

$$\Omega_L \leq \Omega_1 \text{ und } \Omega_R \geq \Omega_2.$$

Zwischen dem Addierer und dem Übertragungskanal wird nun ein Modulator  $c(n) = 2 \cos(\Omega_T n)$  mit Trägerfrequenz  $\Omega_T$  eingefügt, sodass sich das auf der nächsten Seite abgebildete System ergibt.



Der Übertragungskanal wurde entsprechend angepasst, sodass alle Frequenzen auch nach der Modulation noch im Durchlassbereich liegen. D.h., dass  $B = \Omega_R - \Omega_L \geq 2\Omega_2$  und  $\Omega_2 \leq \frac{\Omega_R - \Omega_L}{2}$ .

- (e) Wie muss die Trägerfrequenz  $\Omega_T$  gewählt werden, sodass das modulierte Signal im Durchlassbereich des Kanals liegt? (2 P)

$$\Omega_L + \Omega_2 \leq \Omega_T \leq \Omega_R - \Omega_2$$

- (f) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des modulierten Signals (5 P)

$$y(n) = c(n) \cdot [v_1(n) + v_2(n)].$$

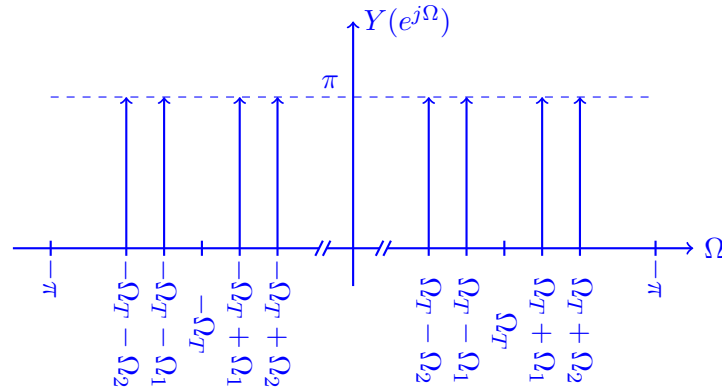
*Tipp: Berechnen Sie zunächst die Fourier-Transformierte von  $c(n) \cdot v_1(n)$ .*

$$\begin{aligned} y(n) &= 2 \cos(\Omega_T n) [\cos(\Omega_1 n) + \cos(\Omega_2 n)] \\ &= \cos((\Omega_T - \Omega_1)n) + \cos((\Omega_T + \Omega_1)n) + \cos((\Omega_T - \Omega_2)n) + \cos((\Omega_T + \Omega_2)n) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - (\Omega_T - \Omega_1) - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega + (\Omega_T - \Omega_1) - \lambda 2\pi) + \\ &\quad \delta_0(\Omega - (\Omega_T + \Omega_1) - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega + (\Omega_T + \Omega_1) - \lambda 2\pi) + \\ &\quad \delta_0(\Omega - (\Omega_T - \Omega_2) - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega + (\Omega_T - \Omega_2) - \lambda 2\pi) + \\ &\quad \delta_0(\Omega - (\Omega_T + \Omega_2) - \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega + (\Omega_T + \Omega_2) - \lambda 2\pi) \end{aligned}$$

- (g) Skizzieren Sie das Spektrum des Signals  $y(n)$ . (3 P)  
 Tipp: Auch wenn Sie  $y(n)$  nicht erfolgreich bestimmt haben, können Sie zumindest das Achsensystem darstellen.

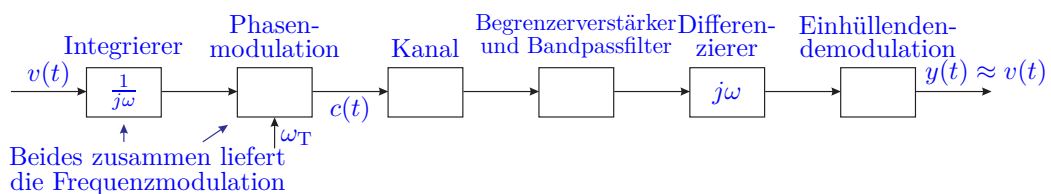


- (h) Durch entsprechende Demodulation kommt ein Spektrum zustande, wie es bereits in Aufgabenteil (c) berechnet und skizziert wurde. Erläutern Sie allgemein, wie Sie die einzelnen Signale  $v_1(n)$  und  $v_2(n)$  nach der Demodulation zurückgewinnen können. (1 P)

Das demodulierte Signal könnte für  $v_1(n)$  mit einem Tiefpass und für  $v_2(n)$  mit einem Hochpass gefiltert werden.

**Teil 3** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

- (i) Zeichnen Sie für eine Frequenzmodulation das Blockschaltbild. Erläutern Sie weiterhin, welchen Verarbeitungsschritt Sie ändern müssten, um die Frequenzmodulation in eine Phasenmodulation umzuwandeln. (3 P)



Bei der Frequenzmodulation erfolgt die Integration vor der Modulation. Um eine Phasenmodulation zu erhalten muss der Integrierer hinter die Einhüllendendemodulation verschoben werden.

Gegeben ist das frequenzmodulierte Signal  $c_T(t)$ :

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cos \left( 2\pi f_T t + k 2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right).$$

- (j) Berechnen Sie die zugehörige Momentan-Frequenz  $\Omega(t)$  und geben Sie das zu über- (4 P)



tragende Signal und Modulationsindex  $\eta$  an.

$$\Omega_T(t) = \frac{d}{dt}\Phi_T(t) = \omega_T + k2\pi\hat{v} \cos(\omega_1 t)$$

$$\text{mit } v(t) = \hat{v} \cos(\omega_1 t), \omega_T = 2\pi f_T \text{ und } \eta = k2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1}$$

(k) Nennen Sie jeweils die Vor- und Nachteile der Amplituden- und Winkelmodulation. (4 P)

Amplitudenmodulation ist einfach bei der Umsetzung, benötigt eine kleine Bandbreite und ist stör anfälliger. Winkelmodulation benötigt eine große Bandbreite und ist komplizierter in der Umsetzung, kann dafür aber ein höheres Signal-zu-Geräusch-Verhältnis nach der Demodulation erzielen.

Dies ist eine leere Seite.