Aufgabe 1 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben ist die Verbunddichte der Zufallsvariablen x und y mit der Unbekannten $a \in \mathbb{R}$:

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} a, & \text{für } 0 \leq x < 1 \wedge 1 \leq y < 4 \\ \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \leq x < 1 \wedge 4 \leq y < 6 \\ 3a, & \text{für } 1{,}5 \leq x < 2 \wedge 4 \leq y < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

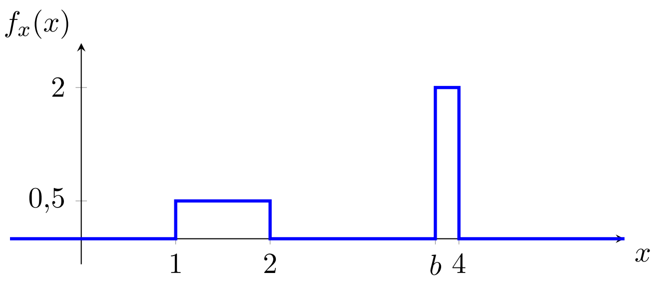
(a) Bestimmen Sie a. (2 P)

(b) Berechnen Sie die beiden Randdichten mit Ihrem Ergebnis aus (a). (6 P)

(c) Berechnen Sie das zweite statistische Moment von x mit Ihrem Ergebnis aus (a). (4 P)

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben ist die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte in grafischer Form:



(d) Bestimmen Sie b. (2 P)

(e) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion mit Ihrem Ergebnis aus (d). (4 P)

(f) Berechnen Sie die Werte $f_z(z = 10{,}125)$ und $f_z(z = 46{,}875)$ der resultierende Dichte wenn die Abbildungsvorschrift $z = 3x^3$ gilt. (5 P)

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sind die vier nachfolgenden Funktionkandidaten:

$$f_a(a) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & \text{für } 1 \leq a < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{für } 2{,}5 \leq a < 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 4 \leq a < 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_c(c) = \begin{cases} 0, & \text{für } c < -1 \\ \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}, & \text{für } -1 \leq c < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{für } 0 \leq c < 2 \\ c - \frac{7}{4}, & \text{für } 2 \leq c < 2{,}75 \\ 1, & \text{für } c \geq 2{,}75 \end{cases}$$

$$f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{für } 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5}, & \text{für } 2 \leq b < 3 \\ \frac{1}{5}, & \text{für } 3{,}5 \leq b < 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_d(d) = \begin{cases} 0, & \text{für } d < 1 \\ d - \frac{1}{2}, & \text{für } 1 \leq d < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 2 \leq d < 3 \\ 2d - \frac{11}{2}, & \text{für } 3 \leq d < 3{,}25 \\ 1, & \text{für } d \geq 3{,}25 \end{cases}$$

(g) Welche Bedingungen müssen Funktionen jeweils allgemein erfüllen, damit sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. eine Verteilungsfunktion sein können? Geben Sie an welche der obigen Funktionen diese Bedingungen jeweils erfüllen! (5 P)

(h) Skizzieren Sie die zugehörigen Verteilungsfunktionen zu den Funktionen, die Sie als Kandidaten für Wahrscheinlichkeitsdichten identifiziert haben. (4 P)

(i) Geben Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten zu den Funktionen, die Sie als Kandidaten für Verteilungsfunktionen identifiziert haben, als Funktion an. (2 P)

Aufgabe 2 (36 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Nun sei folgende Gleichung eines linearen zeitinvarianten Systems mit Eingang $v(n)$ und Ausgang $y(n)$ gegeben:

$$y(n+3) = 3y(n+1) - 2y(n) + 3y(n-1) + v(n+3) - 2v(n)$$

(a) Zeichnen Sie den Zustandsraumgraphen der Direktform II. (5 P)

(b) Besitzt das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie. (2 P)

(c) Bestimmen Sie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ des Zustandsraums gemäß der Definition aus der Vorlesung. Geben Sie zusätzlich Ihre Definition des Zustandsvektors an. Beziehen Sie sich dabei auf Ihr Ergebnis aus *(a)*. (4 P)

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System, das durch die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}}{9z^2 + 1}$$

definiert ist.

(d) Bestimmen Sie die Ordnung des Systems. (1 P)

(e) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen von $H(z)$ und zeichnen Sie diese in ein Pol-Nullstellen-Diagramm ein. (5 P)

(f) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)

(g) Geben Sie die Differenzengleichung für das System an. (4 P)

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System mit den Eingängen $V_0(z)$ und $V_1(z)$ und den Ausgängen $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ und $Y_2(z)$. Die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$ besteht aus den Teilübertragungsfunktionen $H_0(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$ und $H_3(z)$ und ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z)H_2(z) & 0 \\ H_0(z)H_3(z) & H_1(z)H_3(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(h) Zeichnen Sie die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$ in Abhängigkeit der Ein- und Ausgänge und der Teilübertragungsfunktionen. (3 P)

(i) Bestimmen Sie den Ausgang $Y_1(z)$ in Abhängigkeit der benötigten Eingänge und Teilübertragungsfunktionen. (2 P)

Ferner seien nun die Teilübertragungsfunktionen gegeben durch:

$$H_0(z) = \frac{\frac{3}{4}}{z + \frac{1}{2}} \qquad H_1(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{z - \frac{3}{4}} \qquad H_2(z) = \frac{-\frac{3}{4}}{z - \frac{1}{8}} \qquad H_3(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$$

(j) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des Ausgangs $Y_1(z)$. (6 P)

(k) Ist das System $H_1(z)$ kausal? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

(a) Welchem Zweck dient die Modulation eines Signals, laut der Vorlesung? Welche Modulationsarten kennen Sie? Nennen Sie mindestens drei Modulationsarten. (2 P)

(b) Welchen Vorteil hat die nichtlineare Modulation gegenüber der linearen Modulation und welcher Nachteil ergibt sich laut der Vorlesung? (2 P)

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Das bandbegrenzte, zeitkontinuierliche Signal $v(t)$ mit dem dazugehörigen Spektrum

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\} = \begin{cases} a \cdot \cos\left(\frac{\omega}{\omega_g}\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } |\omega| < \omega_g, \omega \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

soll mit der Puls-Amplituden-Modulation moduliert werden.

(c) Erklären Sie das Prinzip der Puls-Amplituden-Modulation und beschreiben Sie, wie das modulierte Signal im Frequenzbereich aussieht. (2 P)

(d) Skizzieren Sie das Spektrum $V(j\omega)$ mit allen Achsenbeschriftungen. (2 P)

(e) Wie groß ist die maximal mögliche Abtastperiode T_A in Abhängigkeit von ω_g, mit der das Eingangssignal $v(t)$ fehlerfrei aus dem moduliertem Signal wiederhergestellt werden kann? Warum kann keine höhere Abtastperiode gewählt werden? (2 P)

(f) Das Signal wird mit einer Abtastperiode von $T_a = \frac{2\pi}{\omega_g}$ Puls-Amplituden-moduliert. Um eventuelle Überlagerungen im Frequenzbereich zu vermeiden, soll es vorher mit einem idealen Tiefpass $H_{\text{TP}}(j\omega)$ gefiltert werden. Ermitteln sie die Grenzfrequenz f_c, mit der das gegebenen Spektrum $V(j\omega)$ minimal manipuliert wird, die aber eventuelle Alias-Effekte ausschließt. Zeichnen Sie das Spektrum des Signals $V_{\text{TP}}(j\omega) = V(j\omega) \cdot H_{\text{TP}}(j\omega)$ nach Anwendung des Filters. (3 P)

(g) Geben Sie das modulierte Signal $y(t)$ in Abhängigkeit des bereits tiefpassgefilterten Eingangssignals $v_{\text{TP}}(t)$ an. (1 P)

(h) Geben Sie das Spektrum des modulierten Signals $Y(jw) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ in Abhängigkeit des bereits teifpassgefilterten Spektrums $V_{\text{TP}}(j\omega)$ an. (1 P)

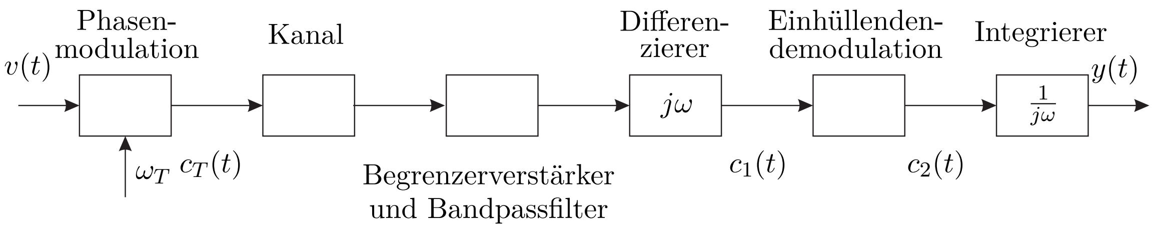
(i) Skizzieren Sie das Spektrum $Y(jw) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ im Intervall $\omega \in \left[-\frac{3}{2}\omega_g, \frac{3}{2}\omega_g\right]$ für $T_A = \frac{2\pi}{\omega_g}$. (2 P)

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Ein neuer Radiosender möchte sein Programm mithilfe der Winkelmodulation übertragen. Dazu wird das Testsignal $v(t) = \sin(\omega_A t + \phi_1) \cdot \cos(\omega_A t + \phi_2)$ mit der Trägerfrequenz $\omega_T \gg \omega_A$ verwendet.

(j) Schreiben Sie das per Phasenmodulation zu übertragende Signal $c_T(t) = \cos(\Phi(t))$ mit $\Phi(t)$ als Momentanphase. Warum eignet sich das Signal nicht als Übertragungssignal? Vereinfachen Sie dazu $c_T(t)$ so weit wie möglich. (5 P)

(k) Berechnen Sie die im folgenden Blockschaltbild gekennzeichneten Signale jeweils nach dem Differenzierer, nach der Einhüllendendemodulation und nach dem Integrierer (also die Signale $c_1(t)$, $c_2(t)$ und $y(t)$). Welcher weitere Schritt ist nötig, um ein $v(t) = \sin(\omega_T t + \phi)$ vollständig aus $y(t)$ wiederherzustellen? (8 P)



Dies ist eine leere Seite.