Signale und Systeme II

Modulklausur Wintersemester 2021

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	11.03.2022
Name:	______________________
Matrikelnummer:	______________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/34	/36	/30

Summe der Punkte: ______________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ______________ Unterschrift: ______________________

Signale und Systeme II

Modulklausur Wintersemester 2021

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	Online
Datum:	11.03.2022
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben ist die Verbunddichte der Zufallsvariablen x und y mit der Unbekannten $a \in \mathbb{R}$:

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} a, & \text{für } 0 \le x < 1 \wedge 1 \le y < 4 \\ \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \le x < 1 \wedge 4 \le y < 6 \\ 3a, & \text{für } 1{,}5 \le x < 2 \wedge 4 \le y < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie a. (2 P)

$3a + 2\frac{1}{6} + 3a = 1$. Daher gilt $a = \frac{1}{9}$.

(b) Berechnen Sie die beiden Randdichten mit Ihrem Ergebnis aus (a). (6 P)

$$f_x(x) = \begin{cases} \int_1^4 \frac{1}{9} dy + \int_4^6 \frac{1}{6} dy, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \int_4^6 \frac{1}{3} dy, & \text{für } 1{,}5 \le x < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{9} - \frac{1}{9} + \frac{6}{6} - \frac{4}{6}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{6}{3} - \frac{4}{3}, & \text{für } 1{,}5 \le x < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & \text{für } 1{,}5 \le x < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{9} dx, & \text{für } 1 \le y < 4 \\ \int_0^1 \frac{1}{6} dx + \int_{1,5}^2 \frac{1}{3} dx, & \text{für } 4 \le y < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{9} - \frac{0}{9}, & \text{für } 1 \le y < 4 \\ \frac{1}{6} - \frac{0}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1{,}5}{3}, & \text{für } 4 \le y < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

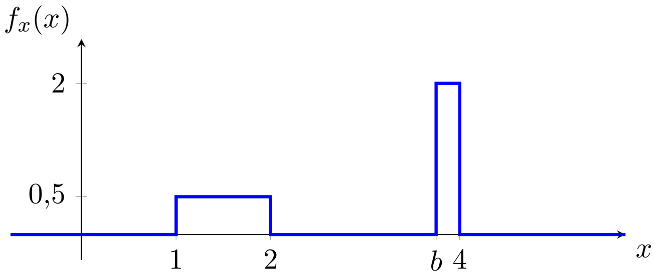
$$= \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{für } 1 \le y < 4 \\ \frac{1}{3}, & \text{für } 4 \le y < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Berechnen Sie das zweite statistische Moment von x mit Ihrem Ergebnis aus (a). (4 P)

$$m_x^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 dx + \frac{2}{3} \int_{1,5}^2 x^2 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (1 - 0 + 8 - 3{,}375) = \frac{5}{4}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben ist die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte in grafischer Form:



(d) Bestimmen Sie b. (2 P)
$1 \cdot 0{,}5 + 2(4 - b) = 1$. Daraus folgt $b = 3{,}75$.

(e) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion mit Ihrem Ergebnis aus (d). (4 P)

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 2 \leq x < 3{,}75 \\ 2x - 7, & \text{für } 3{,}75 \leq x < 4 \\ 1, & \text{für } 4 \leq x \end{cases}$$

(f) Berechnen Sie die Werte $f_z(z = 10{,}125)$ und $f_z(z = 46{,}875)$ der resultierende Dichte wenn die Abbildungsvorschrift $z = 3x^3$ gilt. (5 P)
Es gilt allgemein

$$f_z(z_0) = \sum_{i=0}^{N} \frac{f_x(x_{0,i})}{|g'(x_{0,i})|}$$

wobei $g(x) = z$ die Abbildungsvorschrift von x nach z ist. Hier gilt $N = 1$. Somit sind die folgenden Entwicklungspunkte notwendig: $x_0 = 1{,}5,\ x_1 = 2{,}5$.

$$f_z(z = 10{,}125) = \frac{f_x(1{,}5)}{|g'(1{,}5)|} = \frac{4 f_x(1{,}5)}{81} = \frac{2}{81}$$

$$f_z(z = 46{,}875) = \frac{f_x(2{,}5)}{|g'(2{,}5)|} = 0$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sind die vier nachfolgenden Funktionkandidaten:

$$f_a(a) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & \text{für } 1 \leq a < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{für } 2{,}5 \leq a < 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 4 \leq a < 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_c(c) = \begin{cases} 0, & \text{für } c < -1 \\ \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}, & \text{für } -1 \leq c < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{für } 0 \leq c < 2 \\ c - \frac{7}{4}, & \text{für } 2 \leq c < 2{,}75 \\ 1, & \text{für } c \geq 2{,}75 \end{cases}$$

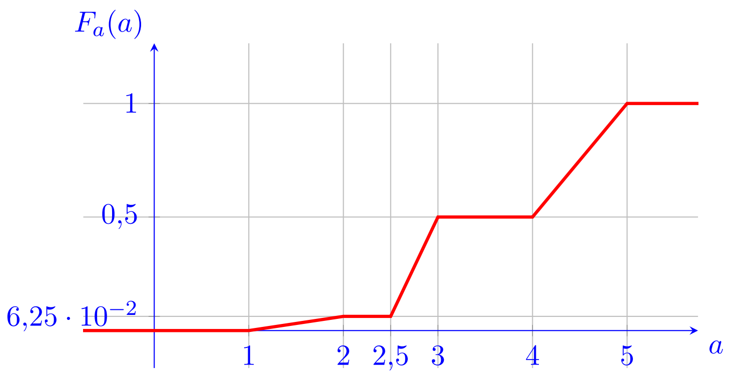
$$f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{für } 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5}, & \text{für } 2 \leq b < 3 \\ \frac{1}{5}, & \text{für } 3{,}5 \leq b < 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_d(d) = \begin{cases} 0, & \text{für } d < 1 \\ d - \frac{1}{2}, & \text{für } 1 \leq d < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 2 \leq d < 3 \\ 2d - \frac{11}{2}, & \text{für } 3 \leq d < 3{,}25 \\ 1, & \text{für } d \geq 3{,}25 \end{cases}$$

(g) Welche Bedingungen müssen Funktionen jeweils allgemein erfüllen, damit sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. eine Verteilungsfunktion sein können? Geben Sie an welche der obigen Funktionen diese Bedingungen jeweils erfüllen! (5 P)

Dichte: Integral identisch 1, keine Funktionswerte kleiner 0 -> erfüllt von $f_a(a)$

Verteilungsfunktion: Grenzwert gegen $-\infty$ identisch 0, Grenzwert gegen ∞ identisch 1, monoton steigend -> erfüllt von $F_c(c)$

(h) Skizzieren Sie die zugehörigen Verteilungsfunktionen zu den Funktionen, die Sie als Kandidaten für Wahrscheinlichkeitsdichten identifiziert haben. (4 P)



(i) Geben Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten zu den Funktionen, die Sie als Kandidaten für Verteilungsfunktionen identifiziert haben, als Funktion an. (2 P)

$$f_c(c) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{für } -1 \leq c < 0 \\ 1, & \text{für } 2 \leq c < 2{,}75 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (36 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Nun sei folgende Gleichung eines linearen zeitinvarianten Systems mit Eingang $v(n)$ und Ausgang $y(n)$ gegeben:

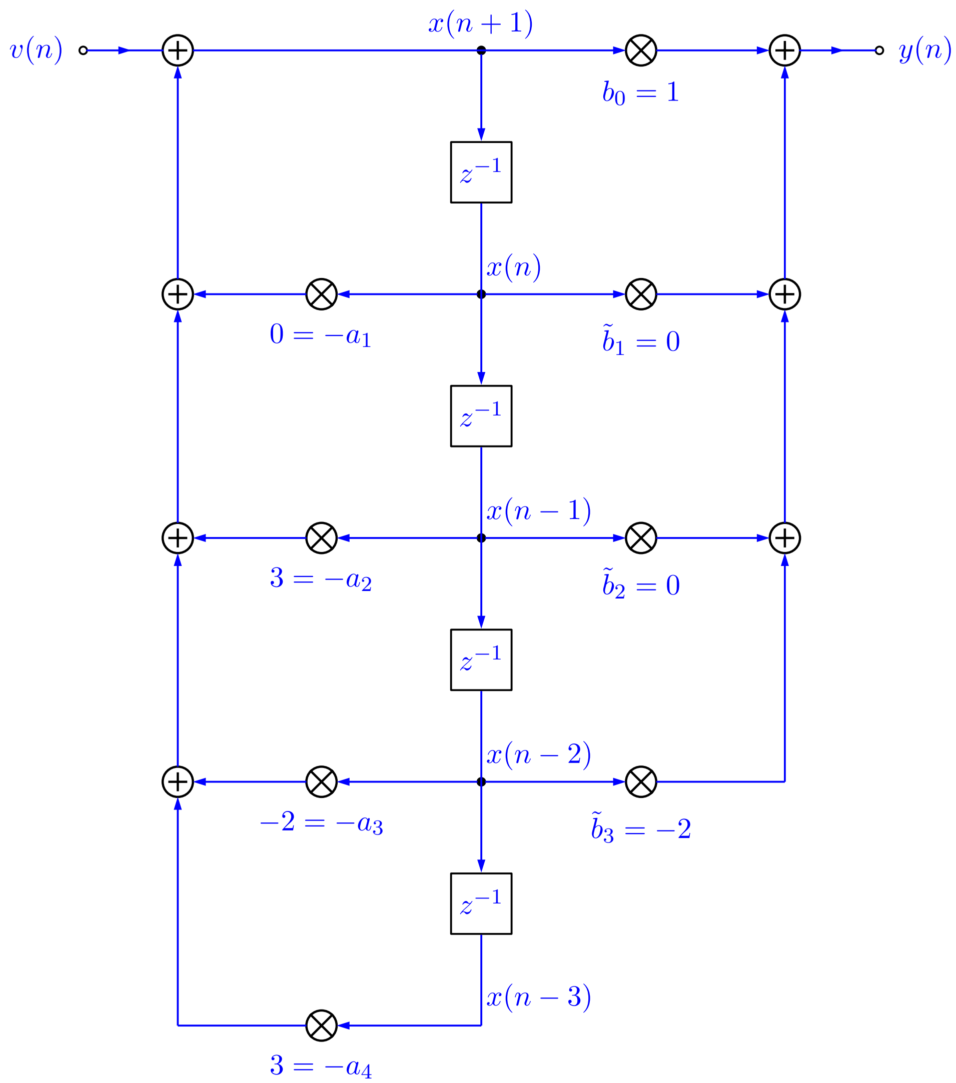
$$y(n+3) = 3y(n+1) - 2y(n) + 3y(n-1) + v(n+3) - 2v(n)$$

(a) Zeichnen Sie den Zustandsraumgraphen der Direktform II. (5 P)

Da es sich um ein LTI-System handelt, kann die Gleichung wie folgt umgeschrieben werden:

$$y(n) = 3y(n-2) - 2y(n-3) + 3y(n-4) + v(n) - 2v(n-3)$$

Die Direktform II lautet:



(b) Besitzt das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie. (2 P)

Ja, da $v(n)$ einen direkten Einfluss auf $y(n)$ besitzt ($b_0 = 1$).

(c) Bestimmen Sie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ des Zustandsraums gemäß der Definition aus der Vorlesung. Geben Sie zusätzlich Ihre Definition des Zustandsvektors an. Beziehen Sie sich dabei auf Ihr Ergebnis aus *(a)*. (4 P)

Laut Skript (IX-32) und Definition der Zustände gemäß Aufgabenteil (d):

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & x(n-2) & x(n-3) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 - b_0 a_1 & \tilde{b}_2 - b_0 a_2 & \tilde{b}_3 - b_0 a_3 & \tilde{b}_4 - b_0 a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$d = b_0 = 1$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System, das durch die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}}{9z^2 + 1}$$

definiert ist.

(d) Bestimmen Sie die Ordnung des Systems. (1 P)

Das System besitzt die Ordnung 2.

(e) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen von $H(z)$ und zeichnen Sie diese in ein Pol-Nullstellen-Diagramm ein. (5 P)

Berechnung der Nullstellen:

Mit der Formel:

$$z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8} = 0$$

folgt:

$$\begin{aligned} z_{0_{0,1}} &= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen

$$z_{0_0} = \frac{1}{2}$$

und:

$$z_{0_1} = -\frac{1}{4}.$$

Berechnung der Polstellen:
Mit der Formel:

$$9z^2 + 1 = 0.$$

folgt:

$$\begin{aligned} z_{\infty_{0,1}} &= -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 - \frac{1}{9}} \\ &= 0 \pm \sqrt{-\frac{1}{9}} \\ &= \pm j\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Und es folgen die Polstellen:

$$z_{\infty_0} = j\frac{1}{3}$$

und:

$$z_{\infty_1} = -j\frac{1}{3}.$$

Eingezeichnet in ein Pol-Nullstellen-Diagramm:

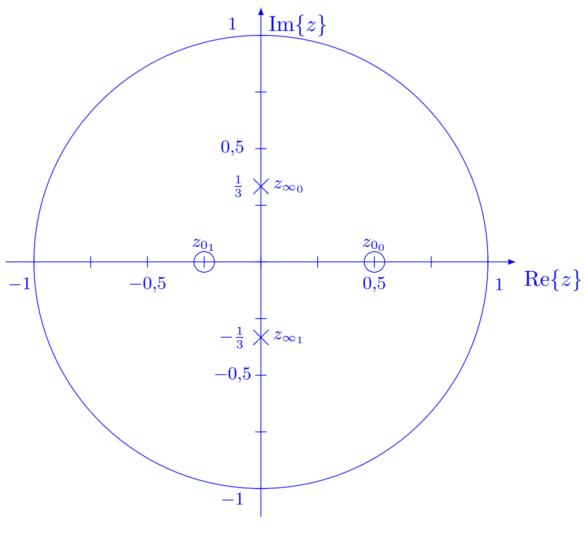


Abbildung 1: Pol-Nullstellendiagramm des Systems $H(z)$.

(f) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
Ja, da sämtliche Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

(g) Geben Sie die Differenzengleichung für das System an. (4 P)
Aus der Gleichung:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{Y(z)}{V(z)} \\
\frac{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}}{9z^2 + 1} &= \frac{Y(z)}{V(z)} \\
Y(z)\,\left(9z^2 + 1\right) &= V(z)\,\left(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}\right) \\
Y(z)\,\left(9 + z^{-2}\right) &= V(z)\,\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right) \\
Y(z)\,\left(1 + \frac{1}{9}z^{-2}\right) &= V(z)\,\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36}z^{-1} - \frac{1}{72}z^{-2}\right).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Differenzengleichung:

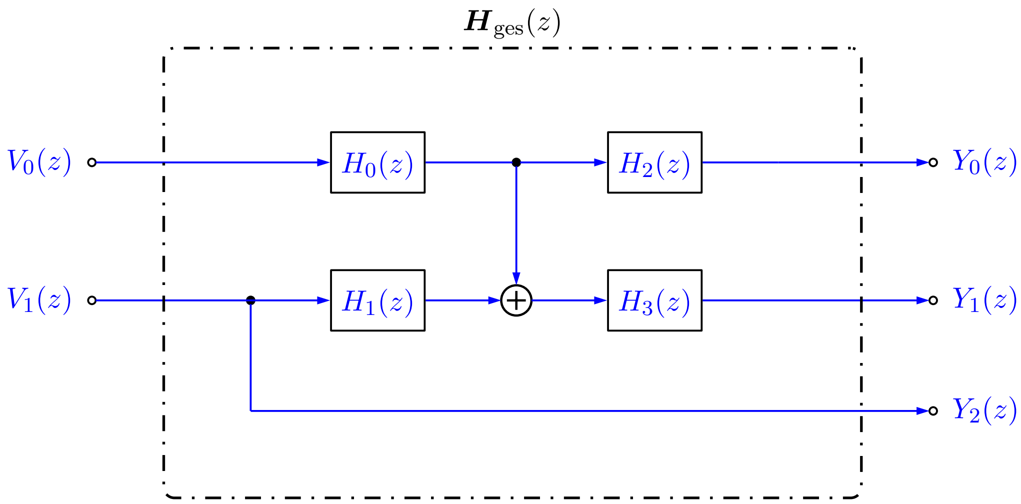
$$y(n) = -\frac{1}{9}y(n-2) + \frac{1}{9}v(n) - \frac{1}{36}v(n-1) - \frac{1}{72}v(n-2).$$

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System mit den Eingängen $V_0(z)$ und $V_1(z)$ und den Ausgängen $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ und $Y_2(z)$. Die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$ besteht aus den Teilübertragungsfunktionen $H_0(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$ und $H_3(z)$ und ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z)H_2(z) & 0 \\ H_0(z)H_3(z) & H_1(z)H_3(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(h) Zeichnen Sie die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{H}_{\text{ges}}(z)$ in Abhängigkeit der Ein- und Ausgänge und der Teilübertragungsfunktionen. (3 P)



(i) Bestimmen Sie den Ausgang $Y_1(z)$ in Abhängigkeit der benötigten Eingänge und Teilübertragungsfunktionen. (2 P)

$$Y_1(z) = H_3(z)\Big(H_0(z)V_0(z) + H_1(z)V_1(z)\Big)$$

Ferner seien nun die Teilübertragungsfunktionen gegeben durch:

$$H_0(z) = \frac{\frac{3}{4}}{z+\frac{1}{2}} \qquad H_1(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{z-\frac{3}{4}} \qquad H_2(z) = \frac{-\frac{3}{4}}{z-\frac{1}{8}} \qquad H_3(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}$$

(j) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des Ausgangs $Y_1(z)$. (6 P)

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= H_0(z)H_3(z)V_0(z) + H_1(z)H_3(z)V_1(z) \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{z+\frac{1}{2}}\,\frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\,\frac{z-\frac{3}{4}}{z-\frac{3}{4}}\,V_0(z) + \frac{-\frac{1}{4}}{z-\frac{3}{4}}\,\frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\,\frac{z+\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}}\,V_1(z) \\ &= \frac{\frac{3}{8}z-\frac{9}{32}}{z^3-\frac{3}{4}z^2-\frac{1}{4}z+\frac{3}{16}}\,V_0(z) + \frac{-\frac{1}{8}z+\frac{1}{16}}{z^3-\frac{3}{4}z^2-\frac{1}{4}z+\frac{3}{16}}\,V_1(z) \end{aligned}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\begin{aligned} y_1(n) = \frac{3}{4}y_1(n-1) + \frac{1}{4}y_1(n-2) + \frac{3}{16}y_1(n-3) + \frac{3}{8}v_0(n-2) \\ - \frac{9}{32}v_0(n-3) - \frac{1}{8}v_1(n-2) + \frac{1}{16}v_1(n-3) \end{aligned}$$

(k) Ist das System $H_1(z)$ kausal? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P)
$H_1(z)$ ist kausal, da die Zählerordnung kleiner als die Nennerordnung ist.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

(a) Welchem Zweck dient die Modulation eines Signals, laut der Vorlesung? Welche Modulationsarten kennen Sie? Nennen Sie mindestens drei Modulationsarten. (2 P)
Der Zweck der Modulation ist die Anpassung des Signalspektrums an den Frequenzbereich des zu nutzenden Übertragungs-, Speicher- oder Verarbeitungsmediums. Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulation.

(b) Welchen Vorteil hat die nichtlineare Modulation gegenüber der linearen Modulation und welcher Nachteil ergibt sich laut der Vorlesung? (2 P)
Die nichtlineare Modulation ist weitgehend unabhängig vom Kanal-SNR und der Kanal-Länge. Dafür wird eine höhere Bandbreite zur Übertragung benötigt.

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Das bandbegrenzte, zeitkontinuierliche Signal $v(t)$ mit dem dazugehörigen Spektrum

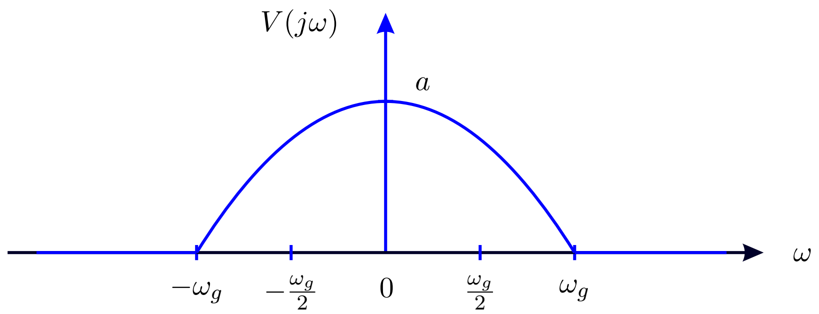
$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\} = \begin{cases} a \cdot \cos\left(\frac{\omega}{\omega_g}\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } |\omega| < \omega_g, \omega \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

soll mit der Puls-Amplituden-Modulation moduliert werden.

(c) Erklären Sie das Prinzip der Puls-Amplituden-Modulation und beschreiben Sie, wie das modulierte Signal im Frequenzbereich aussieht. (2 P)

Bei der Puls-Amplituden-Modulation wird ein kontinuierliches Signal mit einem Impulskamm multipliziert. Im Frequenzbereich führt das zu einer periodischen Wiederholung des Spektrums.

(d) Skizzieren Sie das Spektrum $V(j\omega)$ mit allen Achsenbeschriftungen. (2 P)



(e) Wie groß ist die maximal mögliche Abtastperiode T_A in Abhängigkeit von ω_g, mit (2 P)

der das Eingangssignal $v(t)$ fehlerfrei aus dem moduliertem Signal wiederhergestellt werden kann? Warum kann keine höhere Abtastperiode gewählt werden?

Um den Aliasing-Effekt zu vermeiden, muss die Abtastfrequenz nach dem Nyquist-Theorem $f_g < \frac{f_a}{2}$ doppelt so hoch wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz gewählt werden:

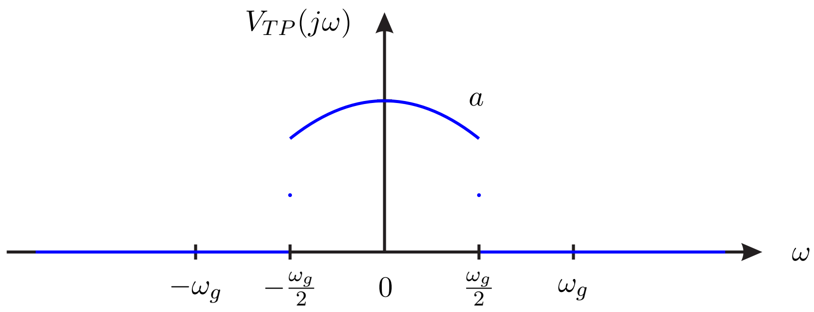
$$T_a < \frac{\pi}{\omega_g}.$$

(f) Das Signal wird mit einer Abtastperiode von $T_a = \frac{2\pi}{\omega_g}$ Puls-Amplituden-moduliert. Um eventuelle Überlagerungen im Frequenzbereich zu vermeiden, soll es vorher mit einem idealen Tiefpass $H_{\text{TP}}(j\omega)$ gefiltert werden. Ermitteln sie die Grenzfrequenz f_c, mit der das gegebenen Spektrum $V(j\omega)$ minimal manipuliert wird, die aber eventuelle Alias-Effekte ausschließt. Zeichnen Sie das Spektrum des Signals $V_{\text{TP}}(j\omega) = V(j\omega) \cdot H_{\text{TP}}(j\omega)$ nach Anwendung des Filters. (3 P)

Die Grenzfrequenz muss der Hälfte der maximal vorkommenden Frequenz des Spektrums $V(j\omega)$ entsprechen:

$$f_c = \frac{\omega_g}{4\pi}.$$

Das resultierende Spektrum $V_{\text{TP}}(j\omega)$ sieht folgendermaßen aus:



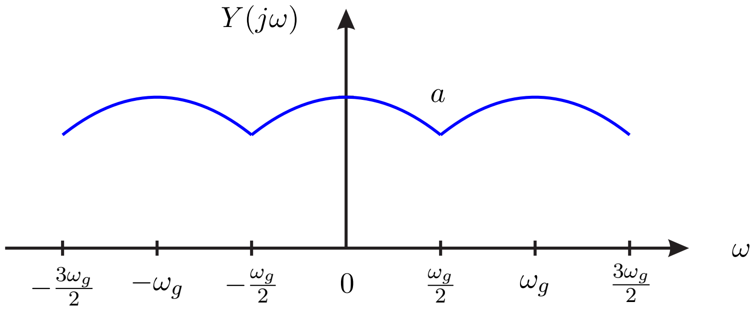
(g) Geben Sie das modulierte Signal $y(t)$ in Abhängigkeit des bereits tiefpassgefilterten Eingangssignals $v_{\text{TP}}(t)$ an. (1 P)

$$\begin{aligned} y(t) &= v_{\text{TP}}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{\text{TP}}(nT_A) \cdot \delta_0(t - nT_A). \end{aligned}$$

(h) Geben Sie das Spektrum des modulierten Signals $Y(jw) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ in Abhängigkeit des bereits teifpassgefilterten Spektrums $V_{\text{TP}}(j\omega)$ an. (1 P)

$$Y(j\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} Y_{\mathrm{TP}}\left(j\left(\omega - \mu\frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}}\right)\right).$$

(i) Skizzieren Sie das Spektrum $Y(jw) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ im Intervall $\omega \in \left[-\frac{3}{2}\omega_g, \frac{3}{2}\omega_g\right]$ für $T_A = \frac{2\pi}{\omega_g}$. (2 P)



Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

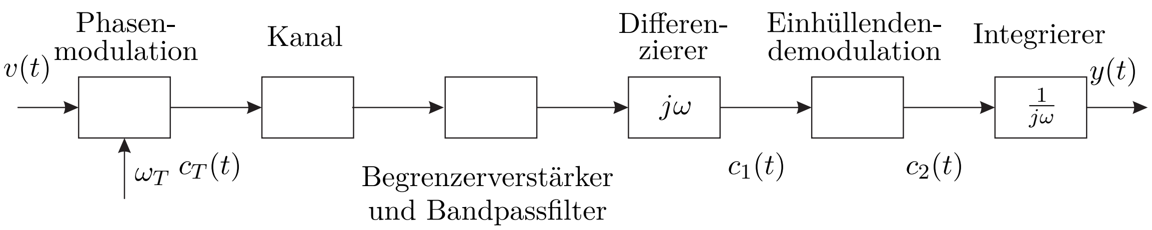
Ein neuer Radiosender möchte sein Programm mithilfe der Winkelmodulation übertragen. Dazu wird das Testsignal $v(t) = \sin(\omega_A t + \phi_1) \cdot \cos(\omega_A t + \phi_2)$ mit der Trägerfrequenz $\omega_T \gg \omega_A$ verwendet.

(j) Schreiben Sie das per Phasenmodulation zu übertragende Signal $c_T(t) = \cos(\Phi(t))$ mit $\Phi(t)$ als Momentanphase. Warum eignet sich das Signal nicht als Übertragungssignal? Vereinfachen Sie dazu $c_T(t)$ so weit wie möglich. (5 P)

$$\begin{aligned} c_T(t) &= \cos(\Phi(t)) \\ &= \cos(\omega_T t + \phi_T(t)) \\ &= \cos(\omega_T t + k2\pi \sin(\omega_A t + \phi_1) \cdot \cos(\omega_A t + \phi_2)) \\ &= \cos\left(\omega_T t + k2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[\sin(\phi_1 - \phi 2) + \sin(2\omega_A t + \phi_1 + \phi_2)\right]\right). \end{aligned}$$

Das Testsignal $v(t)$ eignet sich nicht gut für die Übertragung, da es einen Gleichanteil enthält, der auf der Empfängerseite nicht einfach wiederhergestellt werden kann.

(k) Berechnen Sie die im folgenden Blockschaltbild gekennzeichneten Signale jeweils nach dem Differenzierer, nach der Einhüllendendemodulation und nach dem Integrierer (also die Signale $c_1(t)$, $c_2(t)$ und $y(t)$). Welcher weitere Schritt ist nötig, um ein $v(t) = \sin(\omega_T t + \phi)$ vollständig aus $y(t)$ wiederherzustellen? (8 P)



$$
\begin{aligned}
c_1(t) &= \frac{dc_T(t)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\cos\left[\omega_T t + k2\pi \sin\left(\omega_A t + \phi_1\right) \cdot \cos\left(\omega_A t + \phi_2\right)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\cos\underbrace{\left[\omega_T t + k\pi \sin\left(\phi_1 - \phi_2\right) + k\pi \sin\left(2\omega_A t + \phi_1 + \phi_2\right)\right]}_{\epsilon(t)} \\
&= -\left[\omega_T + \frac{d}{dt} k\pi \sin\left(2\omega_A t + \phi_1 + \phi_2\right)\right] \cdot \sin\left(\epsilon(t)\right) \\
&= -\left[\omega_T + 2\omega_A k\pi \cos\left(2\omega_A t + \phi_1 + \phi_2\right)\right] \cdot \sin\left(\epsilon(t)\right)
\end{aligned}
$$

$$
c_2(t) = 2\omega_A k\pi \cos\left(2\omega_A t + \phi_1 + \phi_2\right)
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{\tau=-\infty}^{t} c_2(t)dt \\
y(t) &= k\pi \sin\left(2\omega_A t + \phi_1 + \phi_2\right) + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Nach dem Integrierer muss der Gleichanteil und die Gewichtung mit $k2\pi$ wieder entfernt werden.

Dies ist eine leere Seite.