# Signale und Systeme II

## Modulklausur Wintersemester 2023/2024

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Datum: | 01.03.2024 |
| Name: | ____________________ |
| Matrikelnummer: | ____________________ |

**Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung**

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ____________________

**Korrektur**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Punkte | /33 | /33 | /34 |

Summe der Punkte: ____________ /100

**Einsicht/Rückgabe**

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ____________ Unterschrift: ____________________

# Signale und Systeme II

## Modulklausur Wintersemester 2023/2024

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Ort: | OS75, Hörsaal 1 und 2 |
| Datum: | 01.03.2024 |
| Beginn: | 09:00 h |
| Einlesezeit: | 10 Minuten |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten |

## Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

# Aufgabe 1 (33 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die Verteilungsfunktion des Zufallsprozesses $a$ mit den Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$F_k(k) = \begin{cases} \frac{3}{2}\alpha, & \text{für } k < 0 \\ (\frac{2}{\beta}k)^2, & \text{für } 0 \leq k \leq 6 \\ 4\gamma, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*(a)* Bestimmen Sie die Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma$. (3 P)

*(b)* Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte mit den Ergebnissen aus *(a)*. (3 P)

*(c)* Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion des Zufallsprozesses $F_k(k)$ für den Bereich $-1 \leq k \leq 7$ unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus *(a)*. (2 P)

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

*(d)* Gegeben sei ein lineares, reellwertiges, näherungsweise ideales Filter, das mit gleichverteiltem Rauschen angeregt wird. Weiterhin seien Abbildungen A-H (Abbildungen auf der letzten Seite von Aufgabe 1), die Signal und System beschreiben und die entweder gemessen oder idealisiert dargestellt sind, gegeben. Ordnen Sie diesen Abbildungen folgende Beschriftungen 1-8 zu und begründen Sie ihre Antworten ausführlich: (12 P)

1. Frequenzgang $H(j\omega)$
2. Impulsantwort $h_0(t)$
3. Verteilungsdichtefunktion (VDF) des Eingangsrauschsignals $p_v(V)$
4. Autokorrelationsfunktion des Eingangsrauschsignals $s_{vv}(\tau)$
5. Sprungantwort $h_{-1}(t)$
6. Autokovarianzfunktion des Eingangsrauschsignals $\psi_{vv}(\tau)$
7. Verteilungsdichtefunktion (VDF) des Ausgangssignals $p_y(Y)$
8. Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals $s_{yy}(\tau)$.

Das Eingangsrauschsignal sei nun diskretisiert, sodass sich der diskrete stochastische Prozess $v(k)$ mit der von Ihnen bestimmten Verteilungsdichtefunktion $p_v(V)$ ergibt.

*(e)* Ist $v(k)$ ein stationärer Prozess? Begründen Sie ihre Antwort. (1 P)

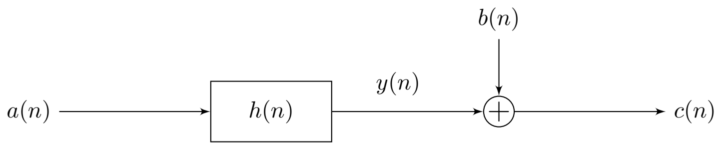
*(f)* Was muss gelten, damit Ergodizität vorliegt? Geben Sie die Definition an. (1 P)

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei der reelwertige und ergodische Zufallsprozess $a(n)$.

*(g)* Ist der Zufallsprozess stationär? Begründen Sie! (1 P)

Der Zufallsprozess $a(n)$ soll nun über folgendes lineares zeitinvariantes System übertragen werden:




Dabei kann in den folgenden Teilaufgaben davon ausgegangen werden, dass $b(n)$ und $y(n)$ orthogonal zueinander sind.

*(h)* Bestimmen Sie die Autokorrelationsfolge $s_{cc}(\kappa)$ in Abhängigkeit der Korrelationsfolgen von $b(n)$ und $a(n)$, sowie der Impulsantwort $h(n)$. (2 P)

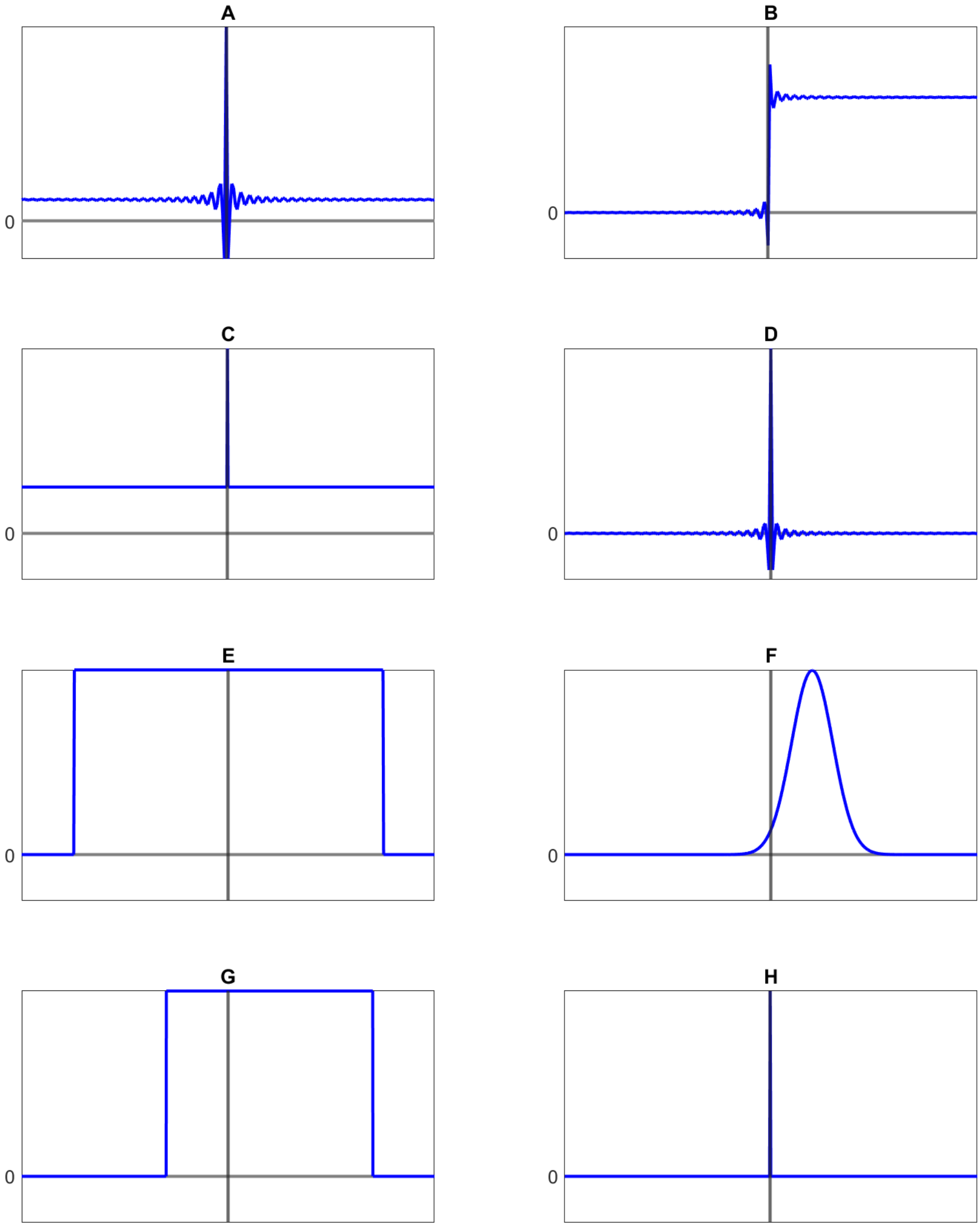
*(i)* Der Erwartungswert des Ausgangssignals $y(n)$ sei $\mu_y = 0$, während der des Eingangssignals $\mu_a = 4$ sei. Kann anhand dieser Informationen einen Aussage über das Übertragungsverhalten des Filters getroffen werden? Wenn ja, welches Verhalten erwarten Sie? Begründen Sie ihre Antworten. (3 P)

Für die Impulsantwort des betrachteten Systems gelte nun

$$h(n) = \frac{1}{4} \cdot \gamma_0(n).$$

*(j)* Bestimmen Sie die Kreuzkorrelationsfolge $s_{ay}(\kappa)$ zwischen dem Eingang $a(n)$ und dem Systemausgang $y(n)$. (3 P)

*(k)* Sind der Ausgang $y(n)$ und der Eingang $a(n)$ unkorreliert? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch. (2 P)


A
0
B
0
C
0
D
0
E
0
F
0
G
0
H
0

## Aufgabe 2 (33 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System gegeben, welches durch nachfolgenden Gleichungen beschrieben ist:

$$\begin{aligned} 2y_0(n) &= 3v_1(n-2) + 8v_0(n) + v_0(n-2) \quad , \\ y_1(n) &= 7v_1(n-1) - 3v_1(n) + v_3(n-3) + 7v_2(n-1) \quad . \end{aligned}$$

*(a)* Geben Sie die Anzahl $L$ der Eingänge, $N$ der Zustände und $R$ der Ausgänge des Systems an. (1,5 P)

*(b)* Nennen Sie die Dimension der Matrizen **A**, **B**, **C** und **D**. (2 P)

*(c)* Wie lauten die Bezeichnungen der einzelnen Matrizen **A**, **B**, **C** und **D** und welche Bedeutung haben sie für das System? (2 P)

*(d)* Zeichnen Sie den Signalflussgraphen für das gegebene System. (5 P)

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Das System ist mit den folgenden Matrizen parametrisiert:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Zudem sei der Zustandsraum durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(n) \quad , \\ \boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}(n) \quad . \end{aligned}$$

*(e)* Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$. (Vereinfachen Sie so weit wie möglich.) (4 P)

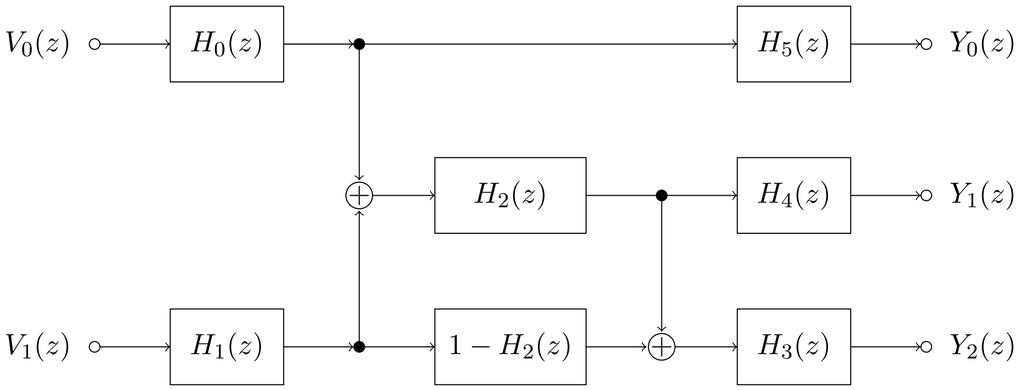
*(f)* Bestimmen Sie die Differenzengleichung. (4 P)

*(g)* Hat das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie ihre Antwort. (1 P)

*(h)* Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$. (4 P)

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Für diesen Aufgabenteil sei ein System durch das folgende Blockschaltbild gegeben.




*(i)* Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}_{ges}(z)$ mit $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_{ges}(z) \cdot \mathbf{V}(z)$. (5,5 P)

*(j)* Geben Sie eine Definition eines Allpass-Filters. (2 P)

Die Teilübertragungsfunktionen von $\mathbf{H}_{ges}(z)$ seien gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
H_0(z) &= \frac{z^3+1}{z^3 - az^2} \quad , \\
H_1(z) &= 1 \quad , \\
H_2(z) &= \frac{z}{(z-2)(z+2)} \quad , \\
H_3(z) &= \frac{-2 + z^{-1} + 3z^2}{z^3 - 2z^2} \quad , \\
H_4(z) &= \frac{z^2 - 4}{z^3 - 2z^2} \quad \text{und,} \\
H_5(z) &= \frac{za(z+a)}{(z-a)^3} \quad .
\end{aligned}
$$

*(k)* Welche Bedingung muss für eine Übertragungsfunktion $H(z)$ erfüllt sein, damit diese kausal ist? Ist somit das gesamte System $\mathbf{H}_{ges}(z)$ kausal? (Begründen Sie!) (1)

*(l)* Nennen Sie das Stabilitätskriterium für zeitdiskrete Systeme! (1)

## Aufgabe 3 (34 Punkte)

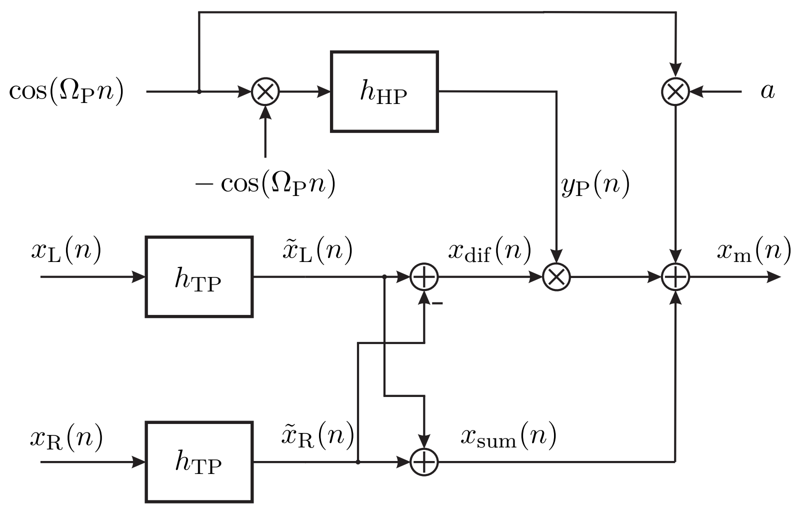
**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

*(a)* Was sagt die FM-Schwelle aus und wodurch entsteht sie? (2 P)

*(b)* Welche Modulationsarten kennen Sie? Nennen Sie mindestens drei Modulationsarten. (1 P)

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild zur Erzeugung eines „Stereo-Basisbandsignals“,




wobei es sich bei $h_\mathrm{TP}$ um ein ideales Tiefpass- und bei $h_\mathrm{HP}$ um ein ideales Hochpassfilter handelt. Die Grenzfrequenzen der Filter liegen identisch bei $\Omega_C$ und es gilt: $\Omega_C < \Omega_\mathrm{P}$.

Vereinfachen Sie im Folgenden alle Ihre Lösungen soweit wie möglich.

*(c)* Geben Sie das Signal $y_\mathrm{P}(n)$ an. (3 P)

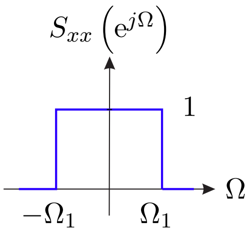
*(d)* Geben Sie das Ausgangssignal $x_\mathrm{m}(n)$ in Abhängigkeit von $\tilde{x}_\mathrm{L}(n)$ und $\tilde{x}_\mathrm{R}(n)$ an. (3 P)

*(e)* Berechnen Sie die Fouriertransformation von $x_\mathrm{m}(n)$. (4 P)

*(f)* Geben Sie allgemein das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen an. Gehen Sie davon aus, dass die Signale $x_\mathrm{L}(n)$ und $x_\mathrm{R}(n)$ im Durchlassbereich des Tiefpasses $h_\mathrm{TP}(n)$ liegen. (4 P)

*(g)* Ist das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ komplex oder reell? (1 P)

Nun sollen zwei Prozesse $x_\mathrm{L}(n)$ und $x_\mathrm{R}(n)$ mit folgendem Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = S_{x_\mathrm{R}x_\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = S_{x_\mathrm{L}x_\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ übertragen werden, wobei $\Omega_1 < \Omega_C < \Omega_\mathrm{P}$.




*(h)* Skizzieren Sie das Autoleistungsdichtespektrum $S_{x_{\mathrm{dif}}x_{\mathrm{dif}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ des Ausgangsprozesses $x_{\mathrm{dif}}(n)$ für folgende zwei Fälle.

*(i)* Die Prozesse sind gleich, $x_{\mathrm{R}}(n) = x_{\mathrm{L}}(n)$. (3 P)

*(ii)* Die Prozesse $x_{\mathrm{R}}(n)$ und $x_{\mathrm{L}}(n)$ sind orthogonal zueinander. (4 P)

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende phasenmodulierte Signal:

$$v(t) = A_T \cos\left[\Phi_T(t)\right] = A_T \cos\left[2\pi f_T t + \eta \cos(2\pi f_N t)\right].$$

*(i)* Bestimmen Sie die momentane Kreisfrequenz $\Omega_T(t)$ des Signals $v(t)$. (3 P)

*(j)* Geben Sie den Frequenzhub $\Delta f$ für das Signal $v(t)$. Erklären Sie in eigenen Worten die Bedeutung des Frequenzhubes. (3 P)

*(k)* Geben Sie die minimale und die maximale FM-Bandbreite $f_{\mathrm{Bmin}}$ und $f_{\mathrm{Bmax}}$ bei einem Frequenzhub $\Delta f = 50$ kHz für ein Nutzsignal im Bereich von 50 Hz bis 20 kHz. (3 P)

Dies ist eine leere Seite.