# Signale und Systeme II

## Modulklausur Wintersemester 2023/2024

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Datum: | 01.03.2024 |
| Name: | ______________________ |
| Matrikelnummer: | ______________________ |

### Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________

### Korrektur

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Punkte | /33 | /33 | /34 |

Summe der Punkte: ____________ /100

### Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ____________ Unterschrift: ______________________

# Signale und Systeme II

## Modulklausur Wintersemester 2023/2024

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Ort: | OS75, Hörsaal 1 und 2 |
| Datum: | 01.03.2024 |
| Beginn: | 09:00 h |
| Einlesezeit: | 10 Minuten |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten |

## Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

# Aufgabe 1 (33 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die Verteilungsfunktion des Zufallsprozesses $a$ mit den Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$F_k(k) = \begin{cases} \frac{3}{2}\alpha, & \text{für } k < 0 \\ (\frac{2}{\beta}k)^2, & \text{für } 0 \leq k \leq 6 \\ 4\gamma, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*(a)* Bestimmen Sie die Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma$. (3 P)

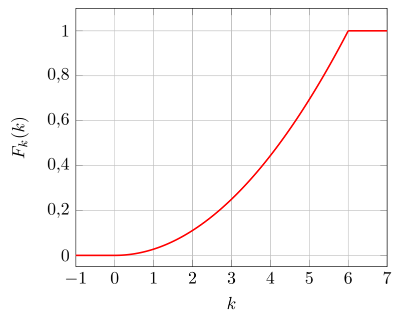
$\alpha = 0, \ \beta = \pm 12, \ \gamma = \frac{1}{4}$

*(b)* Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte mit den Ergebnissen aus *(a)*. (3 P)

Es gilt $f_k(k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} F_k(k)$.

$$f_k(k) = \begin{cases} \frac{k}{18}, & \text{für } 0 \leq k \leq 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

*(c)* Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion des Zufallsprozesses $F_k(k)$ für den Bereich $-1 \leq k \leq 7$ unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus *(a)*. (2 P)




**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

*(d)* Gegeben sei ein lineares, reellwertiges, näherungsweise ideales Filter, das mit gleichverteiltem Rauschen angeregt wird. Weiterhin seien Abbildungen A-H (Abbildungen auf der letzten Seite von Aufgabe 1), die Signal und System beschreiben und die entweder gemessen oder idealisiert dargestellt sind, gegeben. Ordnen Sie diesen Abbildungen folgende Beschriftungen 1-8 zu und begründen Sie ihre Antworten ausführlich: (12 P)

1. Frequenzgang $H(j\omega)$

2. Impulsantwort $h_0(t)$

3. Verteilungsdichtefunktion (VDF) des Eingangsrauschsignals $p_v(V)$

4. Autokorrelationsfunktion des Eingangsrauschsignals $s_{vv}(\tau)$

5. Sprungantwort $h_{-1}(t)$

6. Autokovarianzfunktion des Eingangsrauschsignals $\psi_{vv}(\tau)$

7. Verteilungsdichtefunktion (VDF) des Ausgangssignals $p_y(Y)$

8. Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals $s_{yy}(\tau)$.

1. Frequenzgang $H(j\omega)$ : ideales Filter, d.h. Rechteck als Frequenzgang; reellwertiges Filter, d.h. Frequenzgang ist symmetrisch zur y-Achse $\rightarrow$ E.

2. Impulsantwort $h_0(t)$ : Inverse Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion in E ergibt eine si-Funktion $\rightarrow$ D.

3. Verteilungsdichtefunktion (VDF) des Eingangsrauschsignals $p_v(V)$ : Auszuschließen sind A, C und H, da diese Funktionen gerade sind und daher für die Autokorrelationen und Autokovarianz reserviert sind, daher können die VDFs nur F und G sein. Mit dem Satz der Mathematik ergibt sich für eine unendliche bzw. genügend lange Impulsantwort die Glockenkurve für die Verteilungsdichte des Ausgangssignals, somit ergibt sich für die VDF des Eingangs $\rightarrow$ G.
4. Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals $s_{vv}(\tau)$: Das Eingangssignal ist – wie in G zu sehen – mittelwertbehaftet. Die Autokorrelationsfunktion des Eingangsrauschsignals ist somit $\rightarrow$ C.
5. Sprungantwort $h_{-1}(t)$ : Beziehung zwischen Sprung- und Impulsantwort: $h_{-1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h_0(\tau)d\tau \rightarrow$ B.
6. Autokovarianzfunktion des Eingangsrauschsignals $\psi_{vv}(\tau)$: Die Autokovarianzfunktion entspricht der Autokorrelationsfunktion minus dem Mittelwert zu Quadrat $\rightarrow$ H.
7. Verteilungsdichtefunktion (VDF) des Ausgangsrauschsignals $p_y(Y)$: siehe Punkt 3 $\rightarrow$ F.
8. Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals $s_{yy}(\tau)$: Die Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals ergibt sich aus der (Doppel-)Faltung der Funktion C mit der Funktion D $\rightarrow$ A.

Das Eingangsrauschsignal sei nun diskretisiert, sodass sich der diskrete stochastische Prozess $v(k)$ mit der von Ihnen bestimmten Verteilungsdichtefunktion $p_v(V)$ ergibt.

*(e)* Ist $v(k)$ ein stationärer Prozess? Begründen Sie ihre Antwort. (1 P)
$v(k)$ ist ein stationärer Prozess, da $p_v(V)$ unabhängig von $k$ ist.

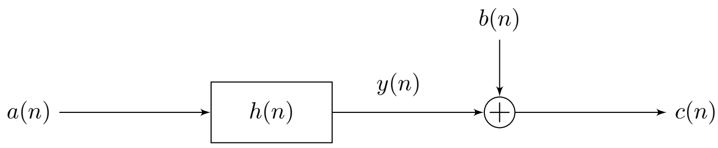
*(f)* Was muss gelten, damit Ergodizität vorliegt? Geben Sie die Definition an. (1 P)
Ein stationärer Zufallsprozess heißt ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte jeder beliebigen Musterfunktion (Realisierung) mit Wahrscheinlichkeit Eins mit den entsprechenden Scharmittelwerten übereinstimmen.

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Gegeben sei der reelwertige und ergodische Zufallsprozess $a(n)$.

*(g)* Ist der Zufallsprozess stationär? Begründen Sie! (1 P)
Ja, da Ergodizität Stationärität voraussetzt.

Der Zufallsprozess $a(n)$ soll nun über folgendes lineares zeitinvariantes System übertragen werden:




Dabei kann in den folgenden Teilaufgaben davon ausgegangen werden, dass $b(n)$ und $y(n)$ orthogonal zueinander sind.

*(h)* Bestimmen Sie die Autokorrelationsfolge $s_{cc}(\kappa)$ in Abhängigkeit der Korrelationsfolgen von $b(n)$ und $a(n)$, sowie der Impulsantwort $h(n)$. (2 P)

$$\begin{aligned} s_{cc}(\kappa) &= E\{c(n)c(n+\kappa)\} \\ &= E\{(y(n)+b(n))(y(n+\kappa)b(n+\kappa))\} \\ &= E\{y(n)y(n+\kappa)\} + E\{y(n)b(n+\kappa)\} + E\{b(n)y(n+\kappa)\} + E\{b(n)b(n+\kappa)\} \\ &= s_{yy}(\kappa) + s_{yb}(\kappa) + s_{by}(\kappa) + s_{bb}(\kappa) \end{aligned}$$

Da $b(n)$ und $y(n)$ orthogonal zueinander sind, ist das Ergebnis der Kreuzkorrelationsfunktionen gleich null und es ergibt sich:

$$s_{cc}(\kappa) = s_{aa}(\kappa) * h(\kappa) * h(-\kappa) + s_{bb}(\kappa).$$

*(i)* Der Erwartungswert des Ausgangssignals $y(n)$ sei $\mu_y = 0$, während der des Eingangssignals $\mu_a = 4$ sei. Kann anhand dieser Informationen einen Aussage über das Übertragungsverhalten des Filters getroffen werden? Wenn ja, welches Verhalten erwarten Sie? Begründen Sie ihre Antworten. (3 P)

$$\mu_y = \mu_a H_{cc}(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = 0$$

Um die vorgegebenen Informationen zu erfüllen muss also eine Dämpfung der tiefen Frequenzen vorliegen. Zu den hohen Frequenz kann keine Aussage getroffen werden. Deswegen kann es sich hier um ein Hochpass- oder Bandpassfilter handeln.

Für die Impulsantwort des betrachteten Systems gelte nun

$$h(n) = \frac{1}{4} \cdot \gamma_0(n).$$

*(j)* Bestimmen Sie die Kreuzkorrelationsfolge $s_{ay}(\kappa)$ zwischen dem Eingang $a(n)$ und dem Systemausgang $y(n)$. (3 P)

$$\begin{aligned} s_{ay}(\kappa) &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} h_0(\kappa) s_{aa}(n-\kappa) \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\gamma_0(n) s_{aa}(n-\kappa) \\ &= \frac{1}{4} \cdot s_{aa}(\kappa) \end{aligned}$$

*(k)* Sind der Ausgang $y(n)$ und der Eingang $a(n)$ unkorreliert? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch. (2 P)

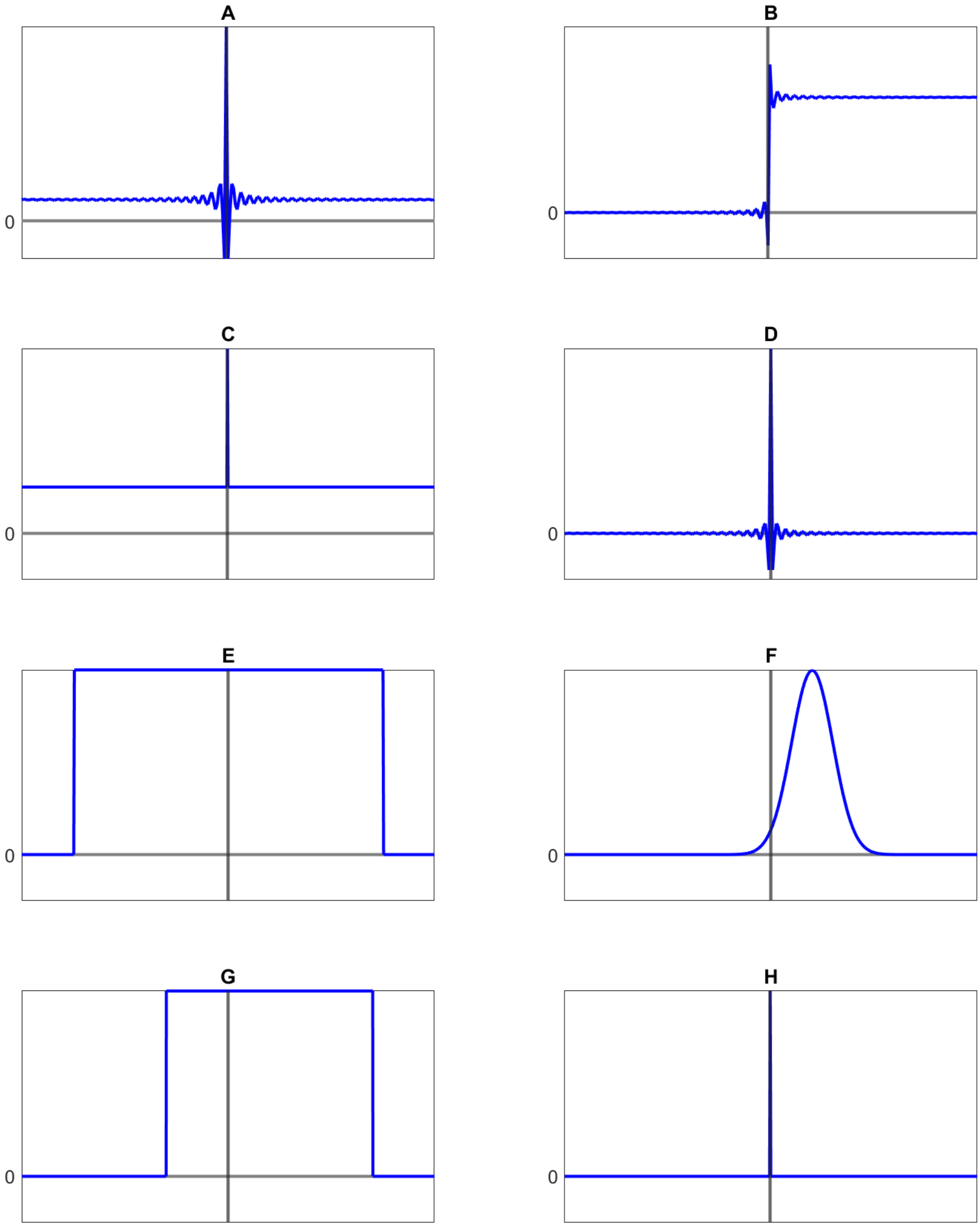
Für Unkorreliertheit muss gelten, dass die Kreuzkovarianzfolge

$$\psi_{ay}(\kappa) = s_{ay}(\kappa) - \mu_a \mu_y = 0$$

ist. Hier gilt allerdings

$$\psi_{ay}(\kappa) = \frac{1}{4} \cdot s_{aa}(\kappa),$$

woraus folgt, dass die beiden Folgen korreliert sind.


A
0
B
0
C
0
D
0
E
0
F
0
G
0
H
0

## Aufgabe 2 (33 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System gegeben, welches durch nachfolgenden Gleichungen beschrieben ist:

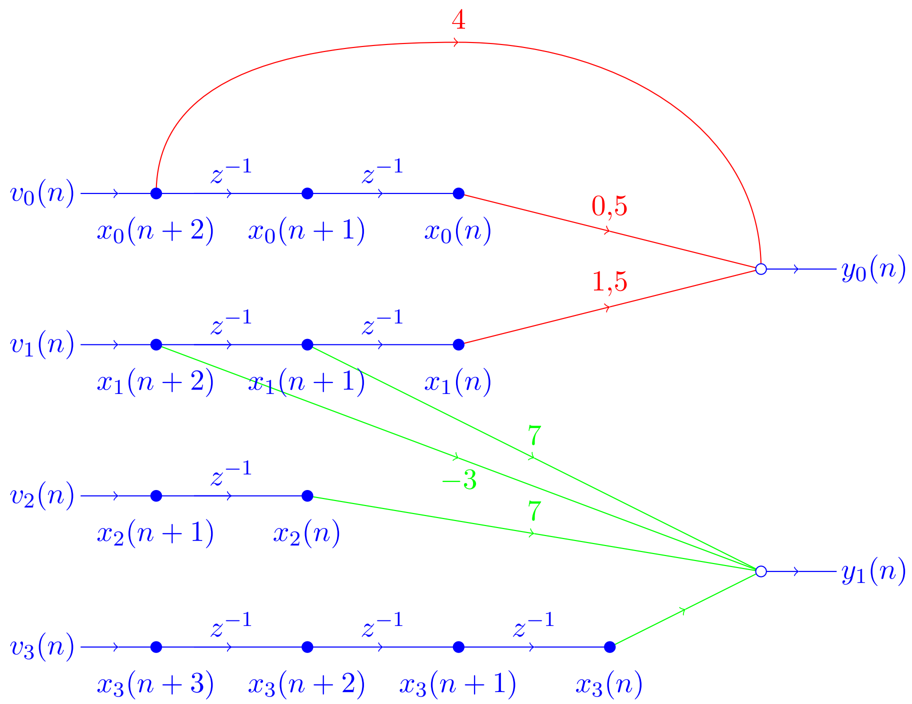
$$\begin{aligned} 2y_0(n) &= 3v_1(n-2) + 8v_0(n) + v_0(n-2) \quad , \\ y_1(n) &= 7v_1(n-1) - 3v_1(n) + v_3(n-3) + 7v_2(n-1) \quad . \end{aligned}$$

*(a)* Geben Sie die Anzahl $L$ der Eingänge, $N$ der Zustände und $R$ der Ausgänge des Systems an. (1,5 P)
Eingänge $L$: 4
Zustände $N$: 8
Ausgänge $R$: 2

*(b)* Nennen Sie die Dimension der Matrizen **A**, **B**, **C** und **D**. (2 P)
$\mathbf{A}$ : $8 \times 8$ $[N \times N]$, $\mathbf{B}$ : $8 \times 4$ $[N \times L]$, $\mathbf{C}$ : $2 \times 8$ $[R \times N]$, $\mathbf{D}$ : $2 \times 4$ $[R \times L]$

*(c)* Wie lauten die Bezeichnungen der einzelnen Matrizen **A**, **B**, **C** und **D** und welche Bedeutung haben sie für das System? (2 P)
**A**: Rückführungen (Systemverhalten ohne äußere Einwirkungen), beschreibt das Eigenverhalten, wird Systemmatrix genannt)
**B**: Einkopplung des Eingangssignals (Ansteuerung des Systems, wird Eingangsmatrix genannt)
**C**: Auskopplung des Systems (Beobachtung des Systems, wird Ausgangsmatrix genannt)
**D**: Direktverbindung vom Eingang zum Ausgang (Durchgriff des Systems, wird Durchgangsmatrix genannt)

*(d)* Zeichnen Sie den Signalflussgraphen für das gegebene System. (5 P)




**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Das System ist mit den folgenden Matrizen parametrisiert:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Zudem sei der Zustandsraum durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(n) \quad , \\ \boldsymbol{y}(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}(n) \quad . \end{aligned}$$

*(e)* Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$. (Vereinfachen Sie so weit wie möglich.) (4 P)

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \\
H(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)}(0{,}5z-1-24+12z)+1 \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-2)}(12{,}5z-25)+\frac{(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)} \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-2)}(12{,}5(z-2)+(z-1)(z-2)) \\
&= \frac{12{,}5+z-1}{z-1} \\
&= \frac{11{,}5+z}{z-1}
\end{aligned}$$

*(f)* Bestimmen Sie die Differenzengleichung. (4 P)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{2z+23}{2z-2}$$

Teilen durch $z$:

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{V(z)} &= \frac{2+23z^{-1}}{2-2z^{-1}} \\
Y(z)(2-2z^{-1}) &= V(z)(2+23z^{-1}) \\
Y(z) &= Y(z)z^{-1}+V(z)(1+11{,}5z^{-1})
\end{aligned}$$

Zeitbereichslösung:

$$y(n) = y(n-1)+v(n)+11{,}5v(n-1)$$

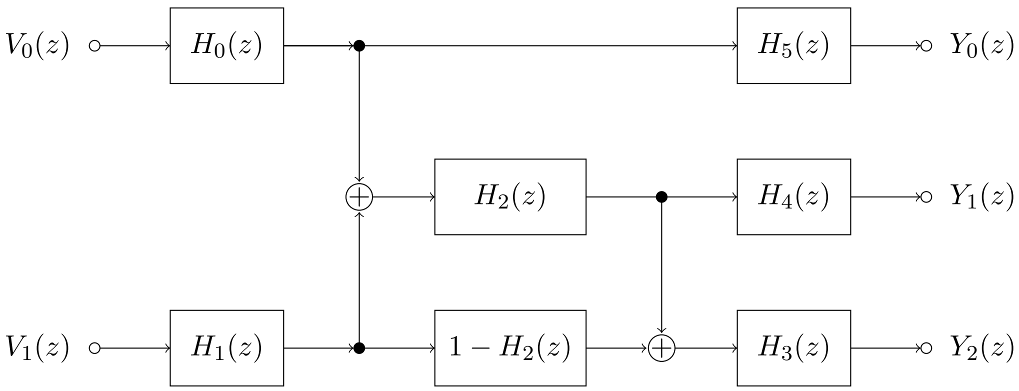
*(g)* Hat das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie ihre Antwort. (1 P)
Das System hat einen direkten Durchgriff, da $D = 1$.

*(h)* Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$. (4 P)

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\{H_0(z)\} &= h_0(n) \\
H_0(z) &= \frac{2z+23}{2z-2} \\
\frac{2z+23}{2z-2} &= \frac{2z-2+2+23}{2z-2} \\
\frac{2z-2+2+23}{2z-2} &= 1+\frac{12{,}5}{z-1} \\
\mathcal{Z}^{-1}\left\{1+12{,}5\frac{1}{z-1}\right\} &= \mathcal{Z}^{-1}\{1\}+12{,}5\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} \\
\mathcal{Z}^{-1}\{1\} &= \gamma_0(n) \\
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} &= \gamma_{-1}(n-1) \\
\mathcal{Z}^{-1}\left\{1+12{,}5\frac{1}{z-1}\right\} &= \gamma_0(n)+12{,}5\gamma_{-1}(n-1)
\end{aligned}$$

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Für diesen Aufgabenteil sei ein System durch das folgende Blockschaltbild gegeben.




*(i)* Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}_{ges}(z)$ mit $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_{ges}(z) \cdot \mathbf{V}(z)$. (5,5 P)

$$\mathbf{H}_{ges}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z)H_5(z) & 0 \\ H_4(z)H_2(z)H_0(z) & H_4(z)H_2(z)H_1(z) \\ H_3(z)H_2(z)H_0(z) & H_3(z)H_1(z) \end{bmatrix}$$

*(j)* Geben Sie eine Definition eines Allpass-Filters. (2 P)
Ein Allpassfilter, auch nur Allpass genannt, ist ein Filter, das im Idealfall für alle Frequenzen einen konstanten Betragsfrequenzgang aufweist.

Die Teilübertragungsfunktionen von $\mathbf{H}_{ges}(z)$ seien gegeben durch:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{z^3+1}{z^3 - az^2} \quad , \\ H_1(z) &= 1 \quad , \\ H_2(z) &= \frac{z}{(z-2)(z+2)} \quad , \\ H_3(z) &= \frac{-2 + z^{-1} + 3z^2}{z^3 - 2z^2} \quad , \\ H_4(z) &= \frac{z^2 - 4}{z^3 - 2z^2} \quad \text{und,} \\ H_5(z) &= \frac{za(z+a)}{(z-a)^3} \quad . \end{aligned}$$

*(k)* Welche Bedingung muss für eine Übertragungsfunktion $H(z)$ erfüllt sein, damit diese kausal ist? Ist somit das gesamte System $\mathbf{H}_{ges}(z)$ kausal? (Begründen Sie!) (1)
Der Zählergrad muss für Kausalität kleiner oder gleich dem Nennergrad sein.
Ja, da Nennergrad größer bzw. gleich dem Zählergrad bei allen $H_i(z) \in [0, 1, 2, 3, 4, 5]$.

*(l)* Nennen Sie das Stabilitätskriterium für zeitdiskrete Systeme! (1)
Ein zeitdiskretes System mit rationaler $z$-Übertragungsfunktion ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Pole $z_i$ von $G_z(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen, d.h.

$$|z_i| < 1 \quad , i = 1, ..., n,$$

wobei die Anzahl der Pole der Systemordnung $n$ entspricht. Das System ist instabil, wenn mindestens ein Pol außerhalb des Einheitskreises liegt, bzw. wenn mindestens ein Doppelpol auf dem Kreisrand liegt. Das System ist grenzstabil, wenn Einfachpole auf dem Kreisrand auftreten, alle restlichen aber innerhalb liegen.

# Aufgabe 3 (34 Punkte)

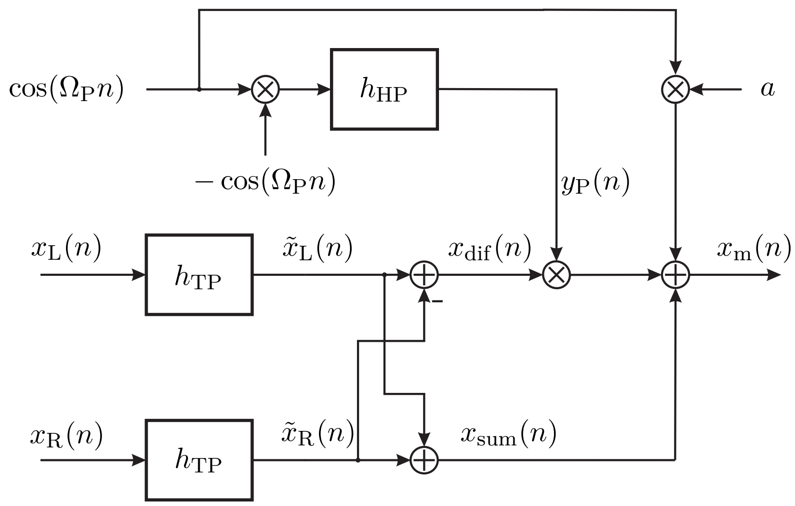
**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

*(a)* Was sagt die FM-Schwelle aus und wodurch entsteht sie? (2 P)
Die FM-Schwelle zeigt auf, bis zu welchem SNR die FM-Übertragung gut funktioniert. Sie entsteht dadurch, dass Rauschen besonders bei hinreichend hohen Trägerfrequenzen bis zu einem gewissen SNR nur wenig Einfluss auf die Nulldurchgänge hat.

*(b)* Welche Modulationsarten kennen Sie? Nennen Sie mindestens drei Modulationsarten. (1 P)
Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulation.

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild zur Erzeugung eines „Stereo-Basisbandsignals“,




wobei es sich bei $h_\mathrm{TP}$ um ein ideales Tiefpass- und bei $h_\mathrm{HP}$ um ein ideales Hochpassfilter handelt. Die Grenzfrequenzen der Filter liegen identisch bei $\Omega_C$ und es gilt: $\Omega_C < \Omega_\mathrm{P}$.

Vereinfachen Sie im Folgenden alle Ihre Lösungen soweit wie möglich.

*(c)* Geben Sie das Signal $y_\mathrm{P}(n)$ an. (3 P)
Durch den idealen Filter $h_\mathrm{HP}$ wird der durch die Multiplikation entstandene Gleichanteil entfernt.

$$y_\mathrm{P}(n) = [-\cos(\Omega_\mathrm{P} n) \cdot \cos(\Omega_\mathrm{P} n)] * h_\mathrm{HP}(n) = -\frac{1}{2}[1 + \cos(2\Omega_\mathrm{P} n)] * h_\mathrm{HP}(n) = -\frac{1}{2}\cos(2\Omega_\mathrm{P} n).$$

*(d)* Geben Sie das Ausgangssignal $x_\mathrm{m}(n)$ in Abhängigkeit von $\tilde{x}_\mathrm{L}(n)$ und $\tilde{x}_\mathrm{R}(n)$ an. (3 P)

$$x_\mathrm{m}(n) = \tilde{x}_\mathrm{L}(n) + \tilde{x}_\mathrm{R}(n) - \frac{1}{2}[\tilde{x}_\mathrm{L}(n) - \tilde{x}_\mathrm{R}(n)]\cos(2\Omega_\mathrm{P} n) + a\cos(\Omega_\mathrm{P} n)$$

*(e)* Berechnen Sie die Fouriertransformation von $x_{\mathrm{m}}(n)$. (4 P)

$$
\begin{aligned}
X_{\mathrm{m}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = {} & \tilde{X}_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + \tilde{X}_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) \\
& + \frac{1}{2\pi}\left[\tilde{X}_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - \tilde{X}_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)\right] \circledast \left(-\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\gamma_0(\Omega - 2\Omega_{\mathrm{P}} - 2\pi k) + \gamma_0(\Omega + 2\Omega_{\mathrm{P}} - 2\pi k)\right]\right) \\
& + a\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\gamma_0(\Omega - \Omega_{\mathrm{P}} - 2\pi k) + \gamma_0(\Omega + \Omega_{\mathrm{P}} - 2\pi k)\right] \\
= {} & \tilde{X}_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + \tilde{X}_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - \frac{1}{4}\left[\tilde{X}_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega - 2\Omega_{\mathrm{P}}}\right) + \tilde{X}_{\mathrm{L}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega + 2\Omega_{\mathrm{P}}}\right)\right] \\
& + \frac{1}{4}\left[\tilde{X}_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega - 2\Omega_{\mathrm{P}}}\right) + \tilde{X}_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega + 2\Omega_{\mathrm{P}}}\right)\right] \\
& + a\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\gamma_0(\Omega - \Omega_{\mathrm{P}} - 2\pi k) + \gamma_0(\Omega + \Omega_{\mathrm{P}} - 2\pi k)\right]
\end{aligned}
$$

*(f)* Geben Sie allgemein das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen an. Gehen Sie davon aus, dass die Signale $x_{\mathrm{L}}(n)$ und $x_{\mathrm{R}}(n)$ im Durchlassbereich des Tiefpasses $h_{\mathrm{TP}}(n)$ liegen. (4 P)

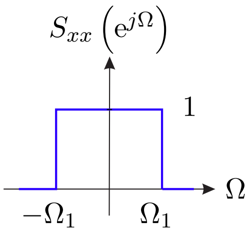
$$
\begin{aligned}
s_{x_{\mathrm{dif}}x_{\mathrm{dif}}}(\kappa) &= \mathrm{E}\left\{x_{\mathrm{dif}}(n)x_{\mathrm{dif}}^*(n+\kappa)\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[x_{\mathrm{L}}(n) - x_{\mathrm{R}}(n)\right]\left[x_{\mathrm{L}}(n+\kappa) - x_{\mathrm{R}}(n+\kappa)\right]^*\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{x_{\mathrm{L}}(n)x_{\mathrm{L}}^*(n+\kappa) - x_{\mathrm{R}}(n)x_{\mathrm{L}}^*(n+\kappa) - x_{\mathrm{L}}(n)x_{\mathrm{R}}^*(n+\kappa) + x_{\mathrm{R}}(n)x_{\mathrm{R}}^*(n+\kappa)\right\}
\end{aligned}
$$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$
\begin{aligned}
S_{x_{\mathrm{dif}}x_{\mathrm{dif}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) &= S_{x_{\mathrm{L}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_{\mathrm{L}}x_{\mathrm{R}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) \\
&= S_{x_{\mathrm{L}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{L}}}^*\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) + S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) \\
&= S_{x_{\mathrm{L}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) - 2\mathrm{Re}\left\{S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)\right\} + S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)
\end{aligned}
$$

*(g)* Ist das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ komplex oder reell? (1 P)
Autoleistungsdichtespektren sind immer reell. Das Leistungsdichtespektrum $S_{x_{dif}x_{dif}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ enthält zwar zwei komplexe Kreuzterme $-S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ und $-S_{x_{\mathrm{L}}x_{\mathrm{R}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$, diese sind jedoch konjugiert komplex zu einander.

Nun sollen zwei Prozesse $x_{\mathrm{L}}(n)$ und $x_{\mathrm{R}}(n)$ mit folgendem Autoleistungsdichtespektrum $S_{xx}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = S_{x_{\mathrm{R}}x_{\mathrm{R}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right) = S_{x_{\mathrm{L}}x_{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{e}^{j\Omega}\right)$ übertragen werden, wobei $\Omega_1 < \Omega_C < \Omega_{\mathrm{P}}$.

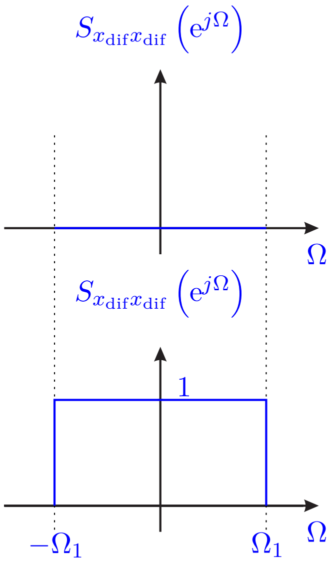



*(h)* Skizzieren Sie das Autoleistungsdichtespektrum $S_{x_{\mathrm{dif}}x_{\mathrm{dif}}}\left(e^{j\Omega}\right)$ des Ausgangsprozesses $x_{\mathrm{dif}}(n)$ für folgende zwei Fälle.

*(i)* Die Prozesse sind gleich, $x_{\mathrm{R}}(n) = x_{\mathrm{L}}(n)$. (3 P)

*(ii)* Die Prozesse $x_{\mathrm{R}}(n)$ und $x_{\mathrm{L}}(n)$ sind orthogonal zueinander. (4 P)

Sind die Prozesse gleich, dann ist $x_{\mathrm{dif}}(n)$ immer null. Sind die Prozesse orthogonal, dann ist $x_{\mathrm{dif}}(n)$ nicht null.




**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende phasenmodulierte Signal:

$$v(t) = A_T \cos\left[\Phi_T(t)\right] = A_T \cos\left[2\pi f_T t + \eta \cos(2\pi f_N t)\right].$$

*(i)* Bestimmen Sie die momentane Kreisfrequenz $\Omega_T(t)$ des Signals $v(t)$. (3 P)

$$\begin{aligned}\Omega_T(t) &= \frac{d\Phi_T(t)}{dt} \\ &= 2\pi f_T - \eta \sin(2\pi f_N t) 2\pi f_N.\end{aligned}$$

*(j)* Geben Sie den Frequenzhub $\Delta f$ für das Signal $v(t)$. Erklären Sie in eigenen Worten die Bedeutung des Frequenzhubes. (3 P)

$$\Delta f = \eta f_N.$$

Der Frequenzhub $\Delta f$ ist nichts anderes als die maximale Abweichung der Momentanfrequenz von der konstanten Trägerfrequenz $f_T$.

*(k)* Geben Sie die minimale und die maximale FM-Bandbreite $f_{\text{Bmin}}$ und $f_{\text{Bmax}}$ bei einem Frequenzhub $\Delta f = 50$ kHz für ein Nutzsignal im Bereich von 50 Hz bis 20 kHz. (3 P)

$$\begin{aligned}
f_{\text{B}} &= 2\left(\frac{\Delta f}{f_1} + 2\right) f_1 \\
f_{\text{Bmin}} &= 2\left(\frac{50\ \text{kHz}}{50\ \text{Hz}} + 2\right) 50\ \text{Hz} = 100{,}2\ \text{kHz} \\
f_{\text{Bmax}} &= 2\left(\frac{50\ \text{kHz}}{20\ \text{kHz}} + 2\right) 20\ \text{kHz} = 180\ \text{kHz}.
\end{aligned}$$

Dies ist eine leere Seite.