Signale und Systeme II

Modulklausur Wintersemester 2024

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Datum:	28.03.2025
Name:	______________________________
Matrikelnummer:	______________________________

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/33,5	/33,5

Summe der Punkte: ________________ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- ☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

Signale und Systeme II

Modulklausur Wintersemester 2024

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	CAP3, Hörsaal 2 und 3
Datum:	28.03.2025
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

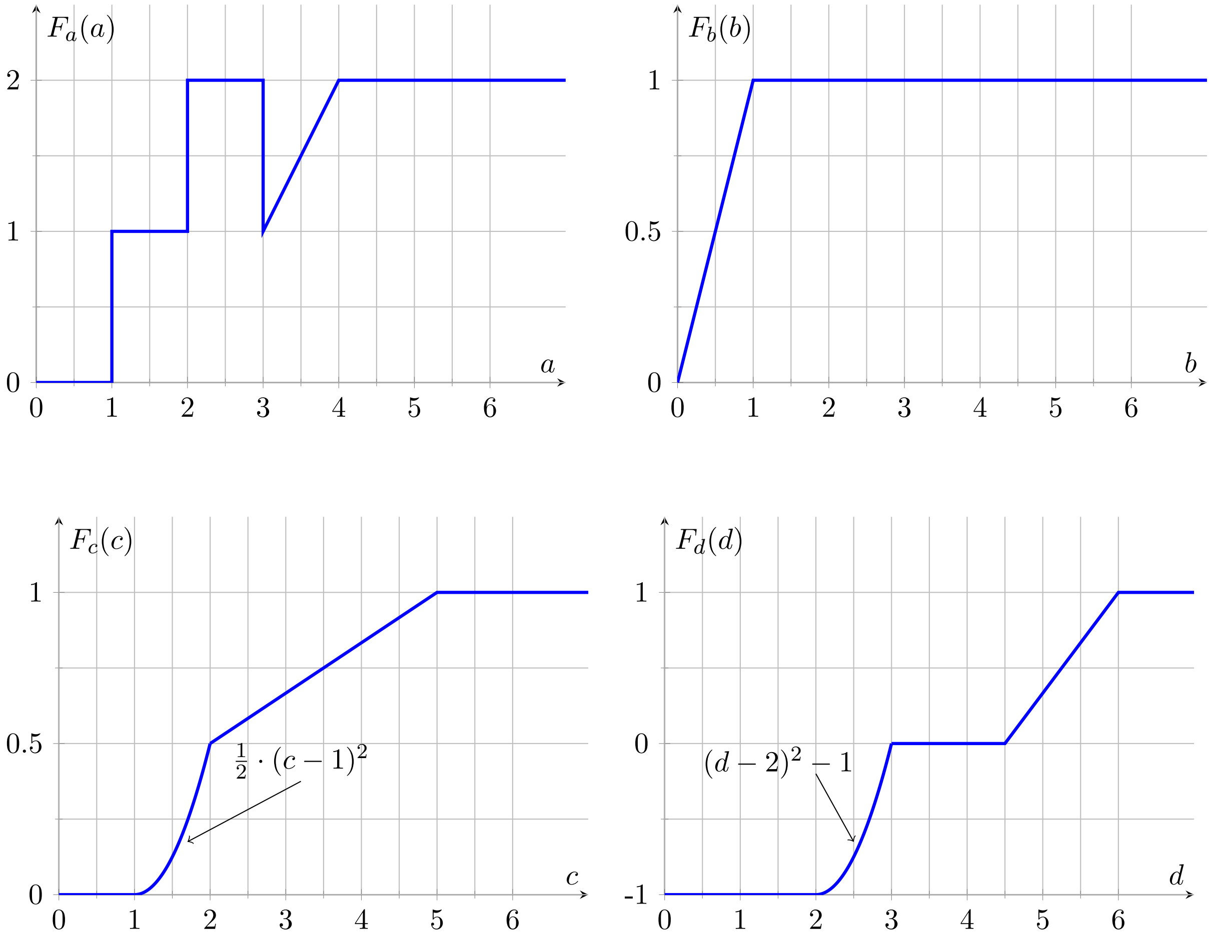
Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sind die folgenden vier Funktionen in grafischer Form:



(a) Bei welchen der obigen Funktionen können Sie ausschließen, dass es sich dabei um Verteilungsfunktionen kontinuierlicher Zufallsgrößen handelt? Begründen Sie Ihre Antwort! Identifizieren Sie zudem die Funktionen, bei denen es sich um Verteilungsfunktionen handelt. (4 P)
$F_a(a)$ hat Diskontinuitäten und ist nicht monoton steigend. (1 P) $F_d(d)$ hat negative Werte. (1 P) $F_c(c)$ und $F_b(b)$ sind Verteilungsfunktionen (2 P)

(b) Bestimmen Sie zu den Funktionen, die Sie in (*a*) als Verteilungsfunktionen identifiziert haben, die dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten. (4 P)
Es gilt $f_c(c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} F_c(c)$. bzw. $f_b(b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} F_b(b)$.

$$f_c(c) = \begin{cases} c-1, & \text{für } 1 \leq c < 2, \text{ (1 P)} \\ \frac{1}{6}, & \text{für } 2 \leq c < 5, \text{ (1 P)} \\ 0, & \text{sonst. (0.5 P)} \end{cases}$$

$$f_b(b) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq b < 1, \text{ (1 P)} \\ 0, & \text{sonst. (0.5 P)} \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie zu den Funktionen, die Sie in (a) als Verteilungsfunktionen identifiziert haben, das 2. statistische Moment sowie die Wahrscheinlichkeiten, dass die Werte der Funktionen zwischen 4 und 5 liegen. (6 P)

$$\begin{aligned} m_c^{(2)} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2 f_c(c) dc \\ &= \int\limits_{1}^{2} c^2(c-1)dc + \frac{1}{6}\int\limits_{2}^{5} c^2 dc \text{ (1 P)} \\ &= [\frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{3}c^3]_1^2 + \frac{1}{18}[c^3]_2^5 \text{ (1 P)} \\ &\approx 7{,}92 \text{ (1 P)} \end{aligned}$$

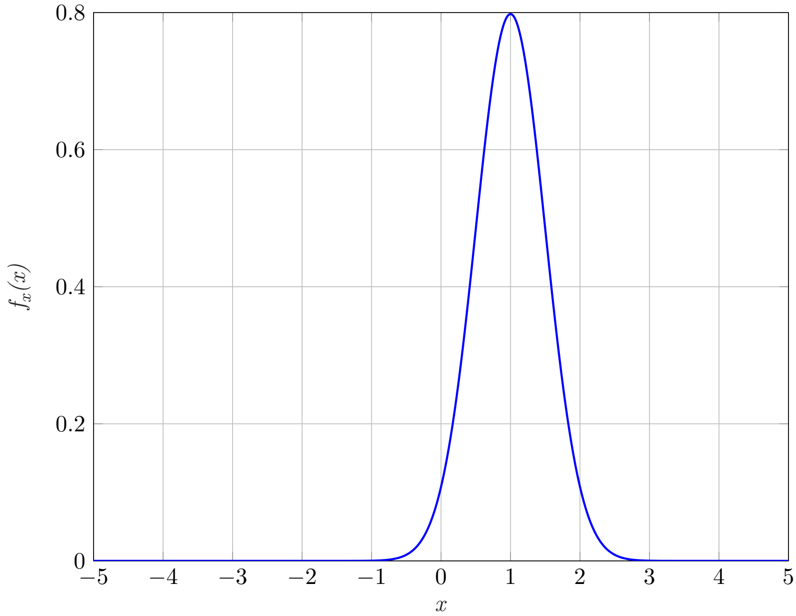
$$\begin{aligned} P(4 \leq c \leq 5) &= \int\limits_{4}^{5} \frac{1}{6} dc \\ &\approx 0{,}167 \text{ (0.5 P)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_b^{(2)} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} b^2 f_b(b) db \\ &= \int\limits_{0}^{1} b^2 db \text{(1 P)} \\ &\approx 0{,}33 \text{ (1 P)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(4 \leq b \leq 5) &= \int\limits_{4}^{5} 0 db \\ &= 0 \text{ (0.5 P)} \end{aligned}$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.*

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ von normalverteiltem weißem Rauschen:

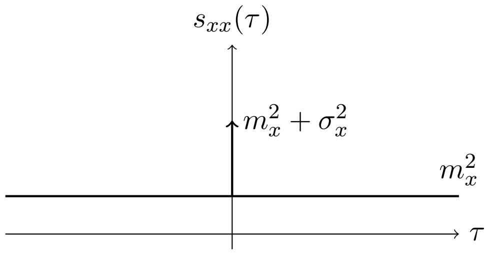


(d) Berechnen Sie die Gesamtleistung des Signals $x(t)$ und skizzieren Sie dessen Autokorrelationsfunktion $s_{xx}(\tau)$ mit allen notwendigen Angaben. (5 P)

Die Gesamtleistung des Signals kann durch $m_x^{(2)} = \sigma_x^2 + m_x^2$ berechnet werden. Der Mittelwert $m_x = 1$ kann vom Graphen abgelesen werden. (1 P)
Die Varianz kann bestimmt werden indem, die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung nach σ_x umgestellt wird.

$$\begin{aligned} f_x(1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(1-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} = 0{,}8 \end{aligned}$$

Umstellen ergibt $\sigma_x \approx 0{,}5$ (1 P). Die Gesamtleistung des Signal ergibt $m_x^{(2)} = 1{,}25$ (1 P)
Die Autokorrelationsfunktion kann nach: $s_{xx}(\tau) = m_x^2 + \sigma_x^2 \cdot \gamma_0(\tau)$ skizziert werden (2 P)



Gegeben ist das Signal

$$y(t) = \frac{1}{2} + \sin(\omega t).$$

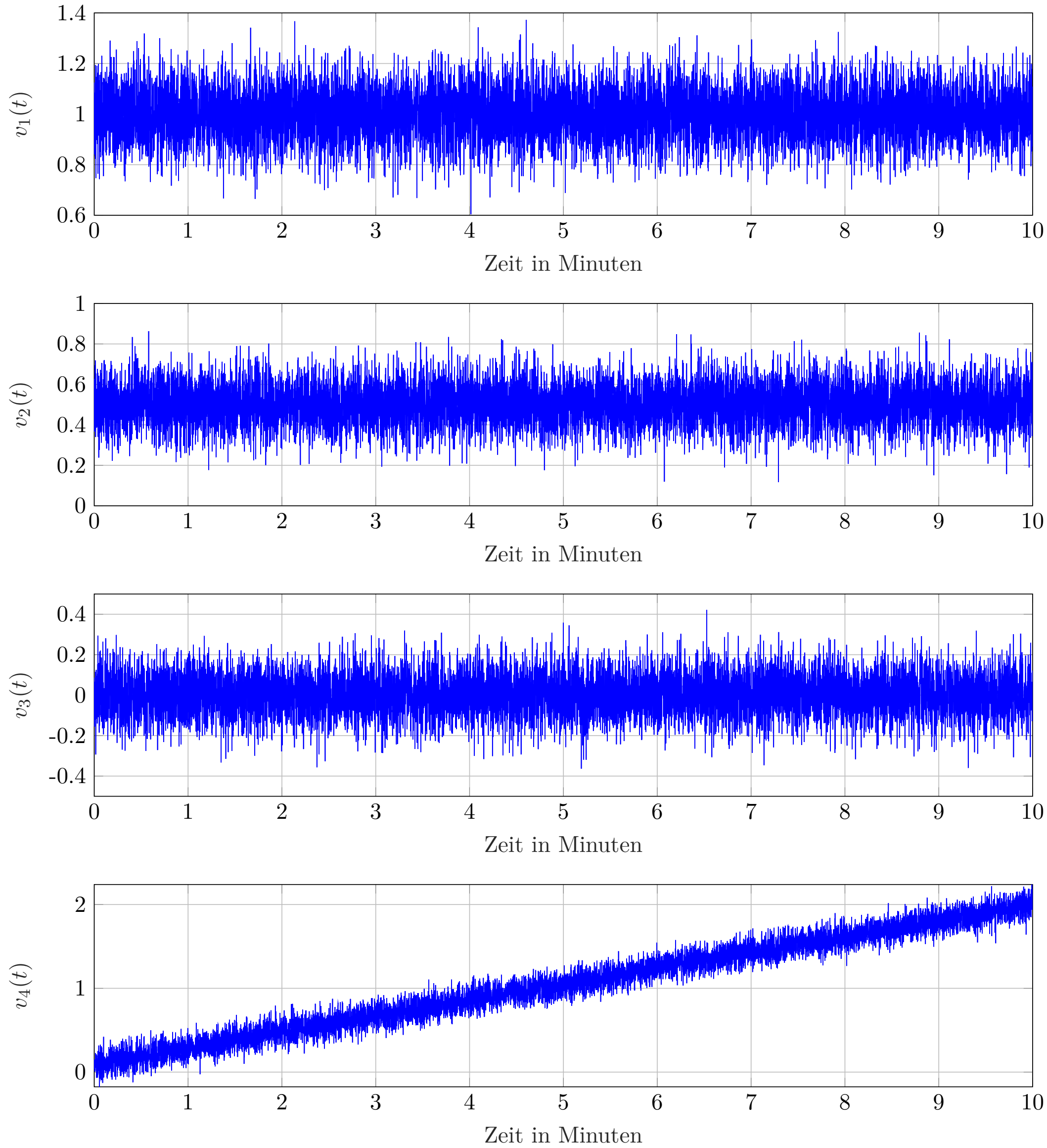
(e) Sind die Signale $x(t)$ und $y(t)$ über ein vielfaches der Periodendauer T orthogonal? Begründen Sie! (2 P)

Zwei Signal sind orthogonal, wenn folgende Bedingung für die Kreuzkorrelation gilt

$$s_{x,y}(t_1, t_2) = m_x(t_1) \cdot m_y(t_2) = 0 \text{ (1 P)}$$

Da keines der beiden Signale mittelwertfrei ist, sind die Signale nicht orthogonal. (1 P)

Gegeben seien nun vier Messreihen des Signals $v(t)$:



(f) Was bedeutet Stationarität? Ist das Signal $v(t)$ stationär? Begründen Sie! (2 P)
Stationarität bedeutet, dass die statistischen Eigenschaften des Signals sich mit der Zeit nicht ändern. (1 P) Die Messung $v_4(t)$ hat einen zeitabhängigen Mittelwert wodurch $v(t)$ nicht stationär ist. (1 P)

(g) Was bedeutet Ergodizität? Ist das Signal $v(t)$ ergodisch? Begründen Sie! (2 P)
Ergodizität bedeutet, dass die Scharmittelwerte mit den Zeitmittelwerten übereinstimmen. (1 P) Ergodizität setzt Stationarität voraus. Daher ist $v(t)$ nicht ergodisch.

(1 P)

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.*

Das reelle Ausgangssignal $y(n)$ eines LTI-Systems wird allgemein durch folgende Gleichung beschrieben, wobei $v(n)$ das reelle Eingangssignal des Systems ist:

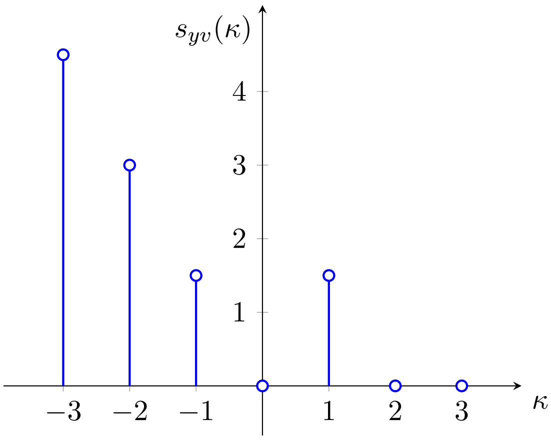
$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_0(i)\, v(n-i), \quad h_0(i) \in \mathbb{R}.$$

(h) Geben Sie einen Zusammenhang für die Korrelationsfunktionen $s_{yv}(\kappa)$ und $s_{vv}(\kappa)$ der Signale bei stationärer Anregung an. Verwenden Sie hierbei die Summenform. Geben Sie außerdem den Zusammenhang mit dem Faltungsoperator an. (2 P)

$$s_{yv}(\kappa) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_0(-i)\, s_{vv}(\kappa - i) = h_0(-\kappa) * s_{vv}(\kappa) \text{ (2 P)}$$

Nun wird das System mit idealem weißes Rauschen $v(n)$ ($m_v = 0$, $\sigma_v^2 = \frac{3}{2}$) angeregt. Zusätzlich gilt $h_0(i) = |i|$ im Intervall $-2 < i < 4$ und $h_0(i) = 0$ sonst.

(i) Skizzieren Sie $s_{yv}(\kappa)$ von $-3 < \kappa < 3$ mit allen notwendigen Angaben. (5 P)



(1 P) Für jeden richtig eingezeichneten Wert

(j) Was für einen Zusammenhang lässt sich zwischen $s_{yv}(\kappa)$ und $h_0(\kappa)$ erkennen? (1 P)

$$s_{yv}(\kappa) = \sigma_v^2 h_0(-\kappa) \text{ (1 P)}$$

Aufgabe 2 (33,5 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei ein System, welches durch die Zustandsraumbeschreibung

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(n), \text{ sowie}$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}(n)$$

beschrieben ist. Die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, sowie $\boldsymbol{D}$ sind folgendermaßen parametrisiert:

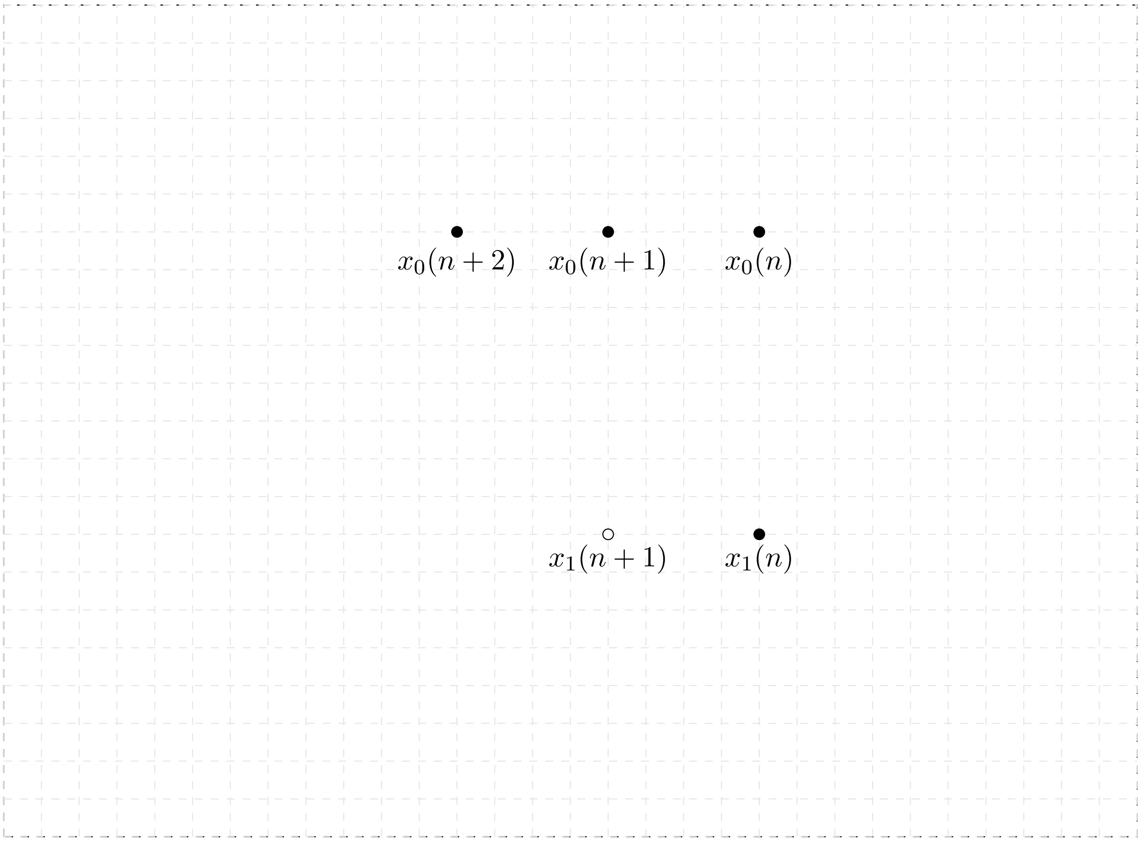
$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{und } \boldsymbol{D} := \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie die Anzahl L der Eingänge, N der Zustände und R der Ausgänge des Systems an. (1,5 P)
Eingänge L: 2 (0.5 Punkte)
Zustädne N: 3 (0.5 Punkte)
Ausgänge R: 1 (0.5 Punkte)

(b) Wie heißen die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, and $\boldsymbol{D}$ und welche Bedeutung haben sie für das System? (2 P)
$\boldsymbol{A}$: Die Dynamikmatrix beschreibt den Einfluss der vorangegangenen Zustände auf den aktuellen Zustand. (0.5 Punkte)
$\boldsymbol{B}$: Die Eingangsmatrix beschreibt den Einfluss der Eingangsgrößen auf die Zustände. (0.5 Punkte)
$\boldsymbol{C}$: Die Ausgangsmatrix beschreibt den Einfluss der Zustände auf die Ausgangsgrößen. (0.5 Punkte)
$\boldsymbol{D}$: Die Durchgriffsmatrix beschreibt den direkten Einfluss der Eingänge auf den Ausgang. (0.5 Punkte)

(c) Zeichnen Sie den zugehörigen Signalflussgraphen. Nutzen Sie als Hilfe folgenden Beginn: (8 P)

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_0(n+2) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_0(n+1) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}$$



Zustandsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_0(n+2) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_0(n+1) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}$$

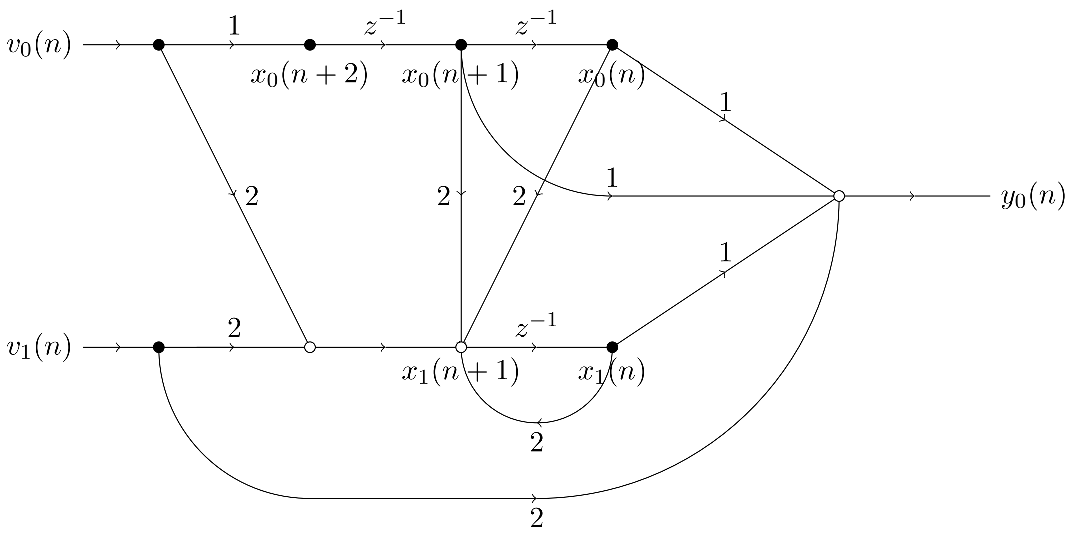
$$x_0(n+1) = x_0(n+1)$$

$$x_0(n+2) = v_0(n)$$

$$x_1(n+1) = 2x_0(n) + 2x_0(n+1) + 2x_1(n) + 2v_0(n) + 2v_1(n)$$

Ausgangsgleichung:

$$y_0(n) = x_0(n) + x_0(n+1) + x_1(n) + 2v_1(n)$$



Richtige Beschriftung der Eingänge, Zustände und Ausgänge (1.5 Punkte)
Richtige Umsetzung der Dynamikmatrix $\boldsymbol{A}$ (2 Punkte)
Richtige Umsetzung der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}$ (1.5 Punkte)
Richtige Umsetzung der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}$ (1.5 Punkte)
Richtige Umsetzung der Durchgriffsmatrix $\boldsymbol{D}$ (0.5 Punkte)
Vollständigkeit Knoten und Pfeile (1 Punkt)

(d) Betsimmen Sie $\boldsymbol{H}(z)$. Nutzen Sie hierbei folgendes Ergebnis als Hilfestellung: (8 P)

$$\operatorname{adj}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} z(z-2) & z-2 & 0 \\ 0 & z(z-2) & 0 \\ 2z & 2z+2 & z^2 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ (1 Punkt)

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Invertieren von $(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$: (4 Punkte)

$$\boldsymbol{M} = z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ -2 & -2 & z-2 \end{bmatrix}$$

Invertieren einer 3x3-Matrix

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{M})}\operatorname{adj}(\boldsymbol{M})$$

$$\det(\boldsymbol{M}) = z^2(z-2)$$

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{M}) = \begin{bmatrix} z(z-2) & z-2 & 0 \\ 0 & z(z-2) & 0 \\ 2z & 2z+2 & z^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{z^2(z-2)} \begin{bmatrix} z(z-2) & z-2 & 0 \\ 0 & z(z-2) & 0 \\ 2z & 2z+2 & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{2}{z(z-2)} & \frac{2z+2}{z^2(z-2)} & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$$

(1 Punkte: Determinante berechnen)
(2 Punkt: Richtiges Ergebnis der Inversen)
Einsetzen der Inversen in die Gleichung:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{2}{z(z-2)} & \frac{2(z+1)}{z^2(z-2)} & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Berechnung $\boldsymbol{R}_{\text{intermediate},1} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$: (1 Punkt)

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} + \frac{2}{z(z-2)} & \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{2(z+1)}{z^2(z-2)} & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Berechnung $\boldsymbol{R}_{\text{intermediate},2} = \boldsymbol{R}_{\text{intermediate},1}\boldsymbol{B}$: (1 Punkt)

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{2(z+1)}{z^2(z-2)} + \frac{2}{z-2} & \frac{2}{z-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dies resultiert in: (1 Punkte)

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{2(z+1)}{z^2(z-2)} + \frac{2}{z-2} & \frac{2}{z-2} + 2 \end{bmatrix}$$

Vereinfachen: (1 Punkt)

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{3\left(z+\frac{1}{3}\right)}{z(z-2)} & 2\frac{z-1}{z-2} \end{bmatrix}$$

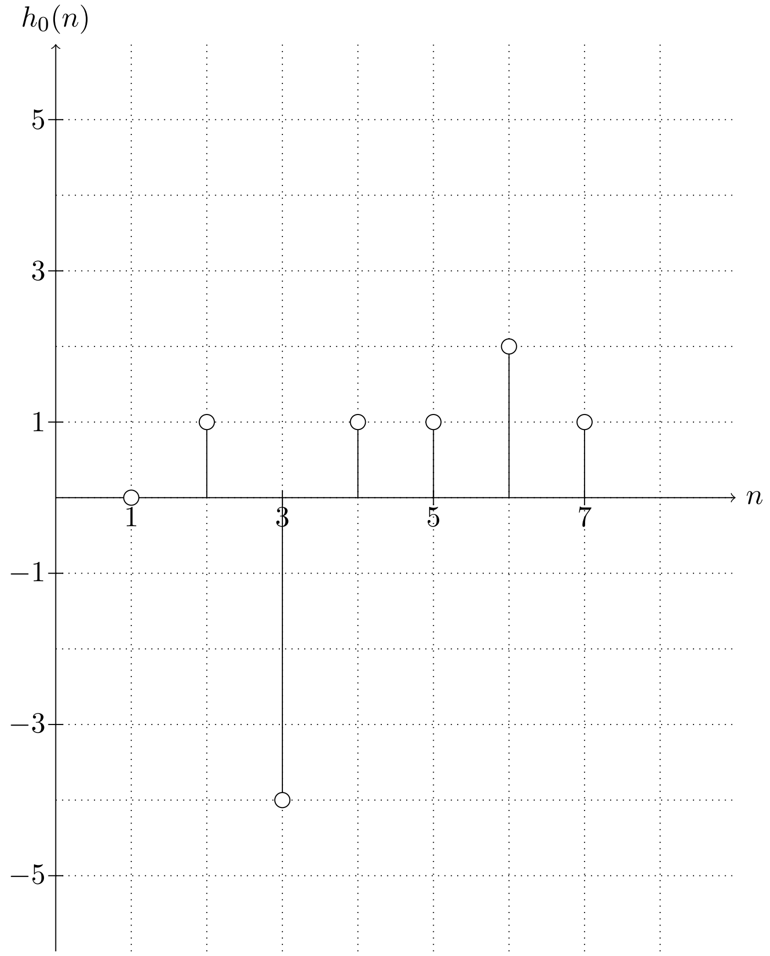
(e) Treffen Sie eine Aussage über die Stabilität des Systems und begründen sie diese. (1 P)
Polstellen des Systems liegen außerhalb des Einheitskreises (0.5 Punkte), deshalb ist das gegebene System instabil (0.5 Punkte).

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben ist die diskrete Impulsantwort $h_0(n)$:

$$h_0(n) = \gamma_{-1}(n-2) - 5\gamma_0(n-3) + \gamma_0(n-6) - \gamma_{-1}(n-8) \;.$$

(f) Zeichnen Sie die Impulsantwort in dem Intervall $0 < n < 8$. Denken Sie hierbei an die Beschriftung der Achsen. (4 P)
Achsenbeschriftung (0.5 P)
Korrekter Wert für $n = 1$ bis 7 je (0.5 P)



(g) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. (5 P)
Jeder Term aus $h_0(n)$ (1 Punkt)

Zusammenfassen und vereinfachen (1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-2}\frac{z}{z-1} - 5z^{-3} + z^{-6} - z^{-8}\frac{z}{z-1} \\
&= \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} - 5z^{-3} + z^{-6} - \frac{z^{-8}}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} - \frac{5z^{-3}(1-z^{-1})}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-6}(1-z^{-1})}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-8}}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{z^{-2} - 5z^{-3}(1-z^{-1}) + z^{-6}(1-z^{-1}) - z^{-8}}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{z^{-2} - 5z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} - z^{-7} - z^{-8}}{1-z^{-1}}
\end{aligned}
$$

(h) Bestimmen Sie die Differenzengleichung. (3 P)

Der Zusammenhang zwischen Eingang $V(z)$, Ausgang $Y(z)$ und Übertragungsfunktion $H(z)$ lautet:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{z^{-2} - 5z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} - z^{-7} - z^{-8}}{1-z^{-1}}$$

Es folgt:

$$Y(z) = (z^{-2} - 5z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6} - z^{-7} - z^{-8})V(z) + z^{-1}Y(z)$$

Transformieren in den Zeitbereich:

$$y(n) = v(n-2) - 5v(n-3) + 5v(n-4) + v(n-6) - v(n-7) - v(n-8) + y(n-1)$$

(i) Hat das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie ihre Antwort. (1 P)

Nein, dies sieht man beispielsweise an der Differenzengleichung, da in dieser $y(n)$ nicht von $v(n)$ abhängt.

Aufgabe 3 (33,5 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

(a) Nennen Sie mindestens zwei Nachteile der Amplitudenmodulation und erläutern Sie kurz, warum sie trotzdem immer noch verwendet wird. (3 P)

- Störungsanfällig
- Schlechte Frequenzeffizienz
+ Einfache und günstige Realisierung

(b) Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte des Zweiseitenband modulierten Signals $c_{\mathrm{T}}(n) = \sin(\Omega_{\mathrm{S}} n) \cdot \cos(\Omega_{\mathrm{T}} n)$. (4,5 P)
Tipp: Nutzen Sie die trigonometrischen Zusammenhänge aus, um das Sendesignal zu vereinfachen.

Trigonometrischen Zusammenhang aus FS ablesen:
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$
Umformen des Sendesignals:

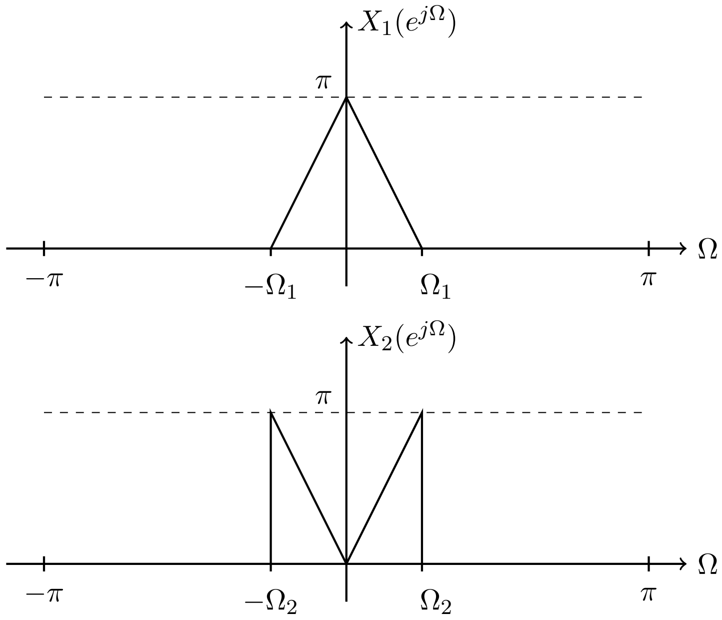
$$
\begin{aligned}
c(n) &= \frac{1}{2}\left[\sin\Big((\Omega_{\mathrm{S}} - \Omega_{\mathrm{T}})n\Big) + \sin\Big((\Omega_{\mathrm{S}} + \Omega_{\mathrm{T}})n\Big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\Big((\Omega_{\mathrm{T}} + \Omega_{\mathrm{S}})n\Big) - \sin\Big((\Omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{S}})n\Big)\right]
\end{aligned}
$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

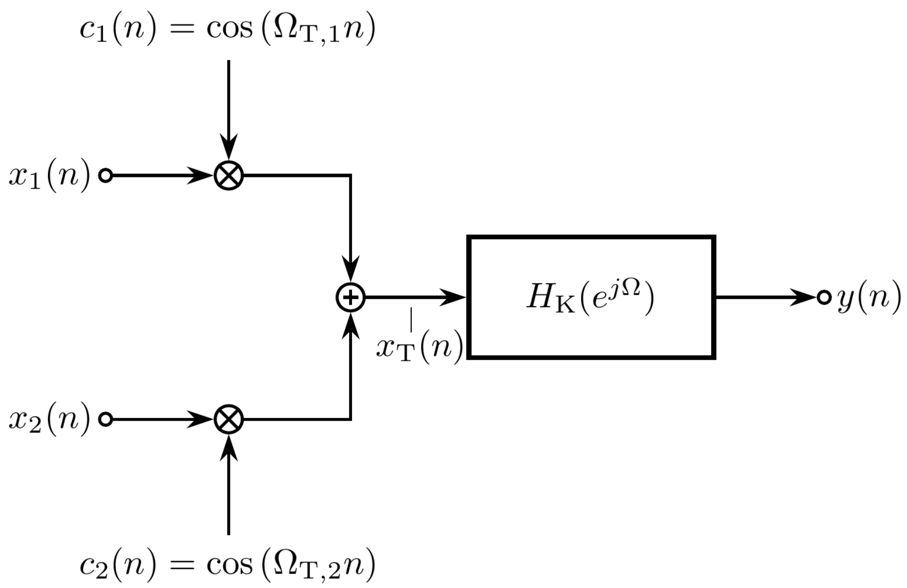
$$
\begin{aligned}
C(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\Bigg[& j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \Big[\delta_0(\Omega + (\Omega_{\mathrm{T}} + \Omega_{\mathrm{S}}) - 2\pi\lambda) - \delta_0(\Omega - (\Omega_{\mathrm{T}} + \Omega_{\mathrm{S}}) - 2\pi\lambda)\Big] \\
& + j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \Big[\delta_0(\Omega + (\Omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{S}}) - 2\pi\lambda) - \delta_0(\Omega - (\Omega_{\mathrm{T}} - \Omega_{\mathrm{S}}) - 2\pi\lambda)\Big]\Bigg]
\end{aligned}
$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Es sollen nun die zwei Signale $X_1(e^{j\Omega})$ und $X_2(e^{j\Omega})$ mit $\Omega_{\mathrm{X}} = \Omega_1 = \Omega_2$ mittels einer Zweiseitenbandmodulation über den gleichen Kanal $H_{\mathrm{K}}(e^{j\Omega})$ übertragen werden. Dafür stehen jeweils für $X_1(e^{j\Omega})$ die Trägerfrequenz $\Omega_{\mathrm{T},1}$ und für $X_2(e^{j\Omega})$ die Trägerfrequenz $\Omega_{\mathrm{T},2}$ zur Verfügung, wobei $\Omega_{\mathrm{T},1} \leq \Omega_{\mathrm{T},2}$.



(c) Zeichnen Sie die Senderstruktur und den Übertragungskanal $H_\mathrm{K}(e^{j\Omega})$ als Blockschaltbild. Das Ausgangssignal des Übertragungskanals wird mit $y(n)$ notiert. (4 P)
Tipp: Denken sie an die Beschriftung aller im Blockschaltbild vorkommenden Signale.



(d) Was muss für die Trägerfrequenzen gelten, damit die Signale störungsfrei und ohne Frequenzlücke übertragen werden können? (1 P)

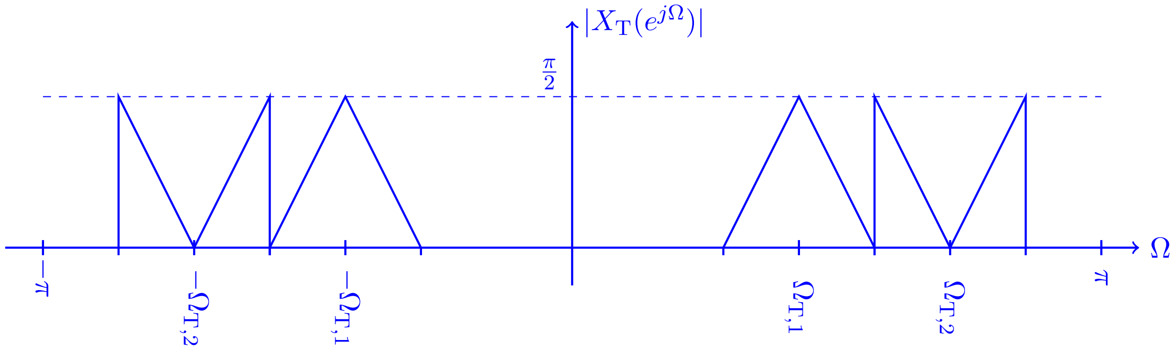
Die modulierten Signale dürfen sich im Spektrum nicht überlappen (Aliasing):
$2 \cdot \Omega_\mathrm{X} \leq \Omega_{\mathrm{T},2} - \Omega_{\mathrm{T},1}$

(e) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $X_\mathrm{T}(e^{j\Omega})$ vom Sendesignal und skizzieren (5 P)

Sie den Betrag $|X_\mathrm{T}(e^{j\Omega})|$ dieser im Bereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$.

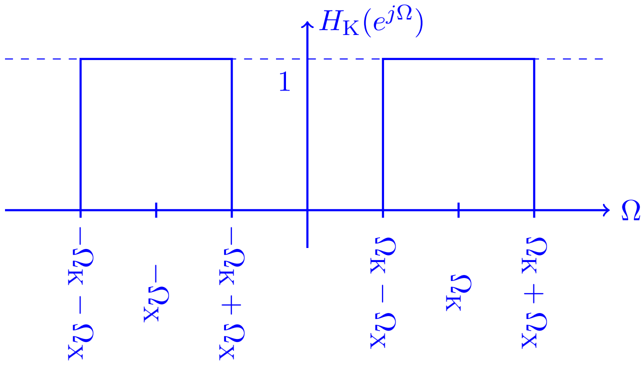
$$x_\mathrm{T}(n) = x_1(n) \cdot \cos(\Omega_{\mathrm{T},1} n) + x_2(n) \cdot \cos(\Omega_{\mathrm{T},2} n)$$

$$\begin{aligned} X_\mathrm{T}(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2}[X_1(e^{j(\Omega-\Omega_{\mathrm{T},1})}) + X_1(e^{j(\Omega+\Omega_{\mathrm{T},1})})] \\ &+ \frac{1}{2}[X_2(e^{j(\Omega-\Omega_{\mathrm{T},2})}) + X_2(e^{j(\Omega+\Omega_{\mathrm{T},2})})] \end{aligned}$$



Der Kanalbetreiber hat Ihnen nun Ihr zur Verfügung stehendes Frequenzband zur Übertragung mitgeteilt. Der Kanal hat eine Mittenfrequenz von Ω_K und eine Bandbreite von $2 \cdot \Omega_\mathrm{X}$.

(f) Zeichnen Sie den resultierenden Frequenzgang des Übertragungskanals unter der Annahme, dass der Kanal ansonsten ideal ist und das Signal nicht verzerrt. (2 P)



(g) Erläutern Sie kurz, ob sich mit der bisherigen Senderstruktur das Sendesignal $x_\mathrm{T}(n)$ unverzerrt übertragen ließe und wenn nicht, welche Anpassungen Sie vornehmen müssten, um eine störungsfreie Übertragung zu gewährleisten. (4 P)

Mit einer gewöhnlichen Zweiseitenbandmodulation würde für die zwei Signale $x_1(n)$ und $x_2(n)$ eine Bandbreite von $4 \cdot \Omega_\mathrm{X}$ benötigt werden. Ohne weitere Anpassung des Übertragungssignals wäre die Bandbreite des Kanals also zu niedrig. Anhand einer Einseitenbandmodulation kann die benötigte Bandbreite reduziert werden. Dafür muss die Trägerfrequenz bei beiden Signalen der Mittenfrequenz des Kanals entsprechen: $\Omega_\mathrm{K} = \Omega_{\mathrm{T},1} = \Omega_{\mathrm{T},2}$. Außerdem müsste das bereits modulierte Signal $x_{\mathrm{T},1} = x_1(n) \cdot \cos(\Omega_{\mathrm{T},1})$ mit einem Hochpass und $x_{\mathrm{T},2} = x_2(n) \cdot \cos(\Omega_{\mathrm{T},2})$ mit einem Tiefpass gefiltert werden (oder umgekehrt).

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Das kontinuierliche Signal $v(t)$ wurde mit Hilfe einer FM-Modulation moduliert und über einen Kanal übertragen.

$$\phi_\mathrm{T}(t) = \begin{cases} k_\mathrm{FM} 2\pi 2\,\mathrm{V} \cdot t, & 0\,\mathrm{s} \le t < 2\,\mathrm{s} \\ k_\mathrm{FM} 2\pi [6\,\mathrm{Vs} - 1\,\mathrm{V} \cdot t], & 2\,\mathrm{s} \le t < 3\,\mathrm{s} \\ k_\mathrm{FM} 2\pi [9\,\mathrm{Vs} - 2\,\mathrm{V} \cdot t], & 3\,\mathrm{s} \le t < 6\,\mathrm{s} \\ k_\mathrm{FM} 2\pi [3\,\mathrm{Vs}], & 6\,\mathrm{s} \le t < 7\,\mathrm{s} \\ k_\mathrm{FM} 2\pi [-10\,\mathrm{Vs} + 1\,\mathrm{V} \cdot t], & 7\,\mathrm{s} \le t < 10\,\mathrm{s} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

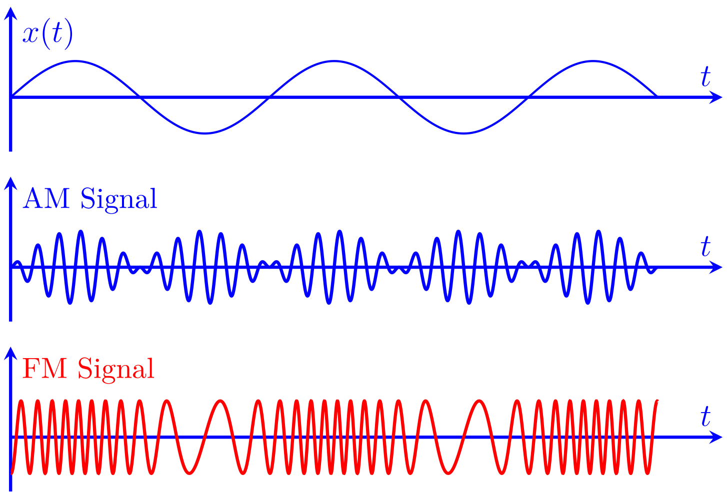
(h) Erläutern Sie die Vorteile der Winkelmodulation gegenüber der Amplitudenmodula- (2 P)

tion und ab wann hinsichtlich des SNRs im Übertragungskanal eine FM-Modulation mehr Sinn macht als eine AM-Modulation.

Winkelmodulationsverfahren haben das Potenzial nach der Demodulation ein höheres Signal-zu-Geräusch-Verhältnis zu erzielen und sind somit weniger störanfällig. Dieser Vorteil lässt sich allerdings erst ab der sog. FM-Schwelle ausreizen.

(i) Skizzieren Sie schematisch den Verlauf eines FM- und eines AM-modulierten Signals. Denken Sie an die entsprechende Beschriftung. (2 P)

Eine exakte Darstellung ist hier nicht nötig. Es ist nur wichtig, dass zu erkennen ist, dass bei der AM-Modulation die Amplitude schwankt bei (zeichnerisch realisierbar) konstanter Frequenz und bei der FM-Modulation die Frequenz schwankt, während die Amplitude konstant bleibt.



(j) Geben Sie an, welches Signal bei einem idealen, störfreien Übertragungskanal empfangsseitig zu erwarten wäre und beschreiben Sie die Bedeutung **aller** darin enthaltenen Variablen und Terme. (2 P)

$$c_{\mathrm{T}}(t) = \hat{c}_{\mathrm{T}} \cos \underbrace{\left(2\pi f_{\mathrm{T}} t + k 2\pi \int_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau) d\tau\right)}_{\Phi_{\mathrm{T}}(t)}$$

Träger:	c_{T}
Trägeramplitude:	$\hat{c}_{\mathrm{T}}$
Trägerfrequenz:	ω_{T}
Trägerphase:	$\phi_{\mathrm{T}}(t)$
Träger-Winkel-Momentanphase:	$\Phi_{\mathrm{T}}(t)$

(k) Geben Sie die Formel für die Momentanphase $\Phi_{\mathrm{T}}(t)$ an und bestimmen Sie aus der oben angegebenen Trägerphase $\phi_{\mathrm{T}}(t)$ das ursprüngliche Signal $v(t)$. (4 P)

$$\Phi_{\mathrm{T}}(t) = 2\pi f_{\mathrm{T}} t + k 2\pi \int_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

$$v(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{V}, & 0\,\mathrm{s} \le t < 2\,\mathrm{s} \\ -1\,\mathrm{V}, & 2\,\mathrm{s} \le t < 3\,\mathrm{s} \\ -2\,\mathrm{V}, & 3\,\mathrm{s} \le t < 6\,\mathrm{s} \\ 0\,\mathrm{V}, & 6\,\mathrm{s} \le t < 7\,\mathrm{s} \\ 1\,\mathrm{V}, & 7\,\mathrm{s} \le t < 10\,\mathrm{s} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist eine leere Seite.