# Signale und Systeme II

## Modulklausur Wintersemester 25/26

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Datum: | 27.03.2026 |
| Name: | ______________________________ |
| Matrikelnummer: | ______________________________ |

### Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

### Korrektur

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Punkte | /32 | /33.5 | /34.5 |

Summe der Punkte: ________________ /100

### Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ________________ Unterschrift: ______________________________

# Signale und Systeme II

## Modulklausur Wintersemester 25/26

| | |
|---|---|
| Prüfer: | Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt |
| Ort: | OS40, Norbert-Gansel-HS + R. 201 |
| Datum: | 27.03.2026 |
| Beginn: | 09:00 h |
| Einlesezeit: | 10 Minuten |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten |

## Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

# Aufgabe 1 (32 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

*(a)* Welche Bedingungen müssen für eine Verteilungsfunktion $F_x(x)$ gelten? (3 P)
Eine Verteilungsfunktion muss monoton steigend sein (1 P), darf nicht negativ sein (1 P) und ist begrenzt von $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$ bis $\lim_{x \to +\infty} F_x(x) = 1$. (1 P)

*(b)* Geben Sie den Zusammenhang zwischen einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$ und einer Verteilungsfunktion $F_x(x)$ an. (1 P)

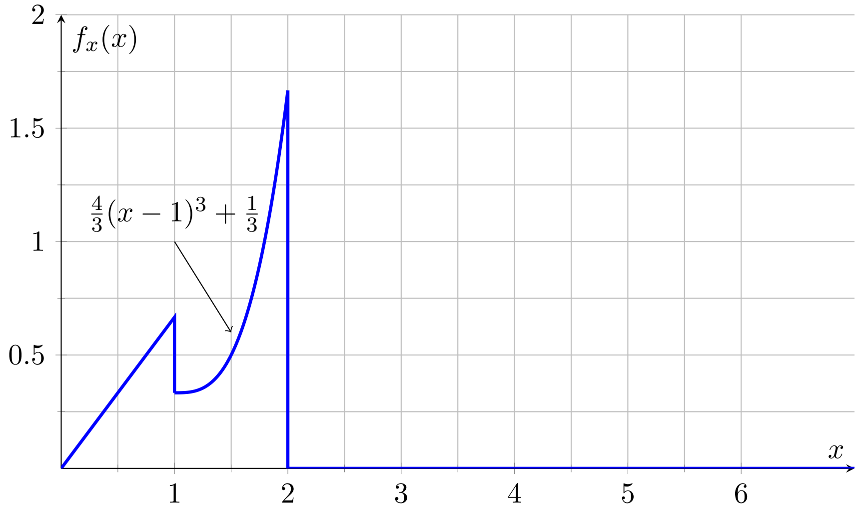
$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \qquad \text{(1 P)}$$

bzw.

$$F_x(x) = \int_{u=-\infty}^{x} f_x(v) dv \qquad \text{(1 P)}$$

*(c)* Erklären Sie den Unterschied zwischen einem deterministischen Signal und einem stochastischen Signal. (2 P)
Ein deterministisches Signal ist analytisch beschreibbar oder anderweitig eindeutig definiert, während dies bei einem stochastischen Signal nicht der Fall ist. Es enthält zufällige Komponenten, die durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. -dichten sowie durch Korrelationsfunktionen beschrieben werden können. (2 P)

Gegeben ist folgende Wahrscheinlichkeitsdichte $f_x(x)$:




Dabei gilt zudem:

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

*(d)* Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_x(x)$ zur Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$ für den Bereich $0 \leq x \leq 6$. **Hinweis**: *Es gilt* $f_x(1) = \frac{2}{3}$. (4 P)

$$F_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{für } 0 \leq x < 1 \quad \text{(1 P)} \\ \frac{1}{3}(x-1)^4 + \frac{1}{3}x & \text{für } 1 \leq x < 2 \quad \text{(2 P)} \\ 1 & \text{für } x > 2 \quad \text{(1 P)} \end{cases}$$

*(e)* Berechnen Sie das erste Moment, das zweite Moment und das zweite zentrale Moment der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$. (7 P)

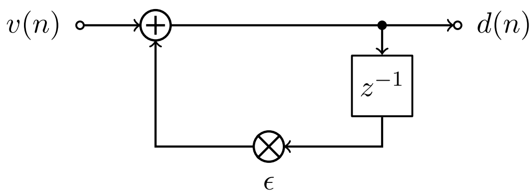
$$\begin{aligned} m_x^{(1)} = m_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x^2 dx + \int_1^2 x\left(\frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3}\right) dx \\ &= \frac{2}{9} + \frac{11}{10} \\ &= \frac{119}{90} \qquad \text{(3 P)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_x^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x^3 dx + \int_1^2 x^2\left(\frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3}\right) dx \\ &= \frac{1}{6} + \frac{28}{15} \\ &= \frac{61}{30} \qquad \text{(3 P)} \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = m_x^{(2)} - m_x^2 \approx 0.285 \qquad \text{(1 P)}$$

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende System mit reeller Impulsantwort $h_0(n)$ und einer reellen Konstanten $|\epsilon| < 1$:




Im Folgenden wird das System mit mittelwertfreiem, weißen Rauschen der Leistung $\sigma_v^2$ angeregt. **Hinweis**: *Verwenden Sie die statistischen Definitionen der geforderten Größen.*

*(f)* Gegeben ist das System $d(n) = v(n) + 0.5 \cdot d(n-1)$. Das Eingangssignal $v(n)$ ist mittelwertfreies weißes Rauschen mit der Varianz $\sigma_v^2 = 1$.

Geben Sie die Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals $v(n)$ an. (1 P)

$$s_{vv}(\kappa) = 1 \cdot \gamma_0(\kappa) \qquad \text{(1 P)}$$

*(g)* Berechnen Sie die Leistung $m_d^{(2)}$ des Prozesses $d(n)$. (5 P)
**Hinweis**: *Nutzen Sie die Eigenschaft, dass $v(n)$ und $d(n-1)$ unkorreliert sind, also gilt $E\{v(n)d(n-1)\} = E\{v(n)\} \cdot E\{d(n-1)\}$.*
Ansatz über den quadratischen Erwartungswert:

$$\begin{aligned} m_d^{(2)} &= E\Big\{d^2(n)\Big\} = E\Big\{[v(n) + 0.5d(n-1)]^2\Big\} \qquad \text{(1 P)} \\ &= E\Big\{v^2(n)\Big\} + 2 \cdot 0.5 \cdot \underbrace{E\Big\{v(n)d(n-1)\Big\}}_{=0} + 0.5^2 \cdot E\Big\{d^2(n-1)\Big\} \qquad \text{(3 P)} \\ &= 1 + 0 + 0.25 \cdot m_d^{(2)} \end{aligned}$$

Umstellen nach $m_d^{(2)}$:

$$0.75 \cdot m_d^{(2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_d^{(2)} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3} \qquad \text{(2 P)}$$

*(h)* Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $s_{dd}(\kappa)$ von $d(n)$ nur an der Stelle $\kappa = 1$. (3 P)

$$\begin{aligned} s_{dd}(1) &= E\Big\{d(n)d(n-1)\Big\} = E\Big\{[v(n) + 0.5d(n-1)]d(n-1)\Big\} \\ &= \underbrace{E\Big\{v(n)d(n-1)\Big\}}_{0} + 0.5 \cdot \underbrace{E\Big\{d^2(n-1)\Big\}}_{m_d^{(2)}} \\ &= 0.5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Gegeben sei nun die Autokorrelationsfunkion $s_{dd}(\kappa) = m_d^{(2)} \cdot \epsilon^{\kappa}$ für $\kappa \in \mathbb{R}$.

*(i)* Geben Sie basierend auf der Form $s_{dd}(\kappa) = m_d^{(2)} \cdot \epsilon^{\kappa}$ die Funktion für alle $\kappa \in \mathbb{Z}$ an. (2 P)

$$s_{dd}(\kappa) = m_d^{(2)} \cdot \epsilon^{|\kappa|} \qquad \text{(2 P)}$$

*(j)* Welche Wirkung hat das System auf das ursprünglich weiße Rauschen? (2 P)
Die Autokorrelationsfunktion fällt exponentiell ab (Maximum bei $\kappa = 0$).
Das System wirkt als Tiefpassfilter und macht aus weißem Rauschen korreliertes Rauschen.

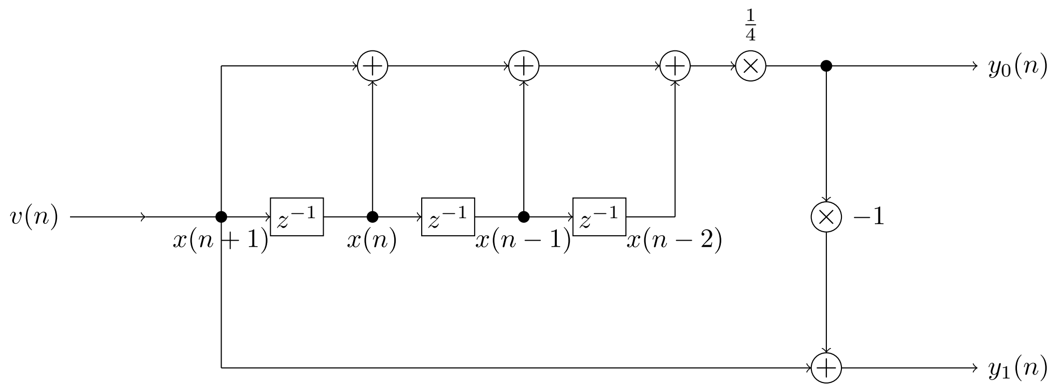
*(k)* Ist das System stabil? Begründen Sie kurz anhand des Faktors $\epsilon = 0.5$. (2 P)
Ja, das System ist stabil, da der Rückkopplungsfaktor (Polstelle im z-Bereich) vom Betrag her kleiner als 1 ist ($|0.5| < 1$).

# Aufgabe 2 (33.5 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Ein diskretes System soll den Mittelwert der letzten vier (aktueller, sowie vorangegangene drei) Messwerte von $v(n)$ berechnen und als Ausgang $y_0(n)$ ausgeben. Der Ausgang $y_1(n)$ soll der um den Mittelwert $y_0(n)$ bereinigte Eingang $v(n)$ sein.

(a) Zeichnen Sie den zu dem oben beschriebenen System gehörigen Signalflussgrafen. (6 P)




(b) Bestimmen Sie die Anzahl an Eingängen $L$, Ausgängen $M$, sowie Zuständen $N$ des Systems. (1,5 P)

$$L = 1$$
$$M = 2$$
$$N = 3$$

(c) Ist das gegebene System kausal? Begründen Sie. (1 P)
Da nur aktuelle und vergangene Werte verwendet werden ist das System kausal.

(d) Bestimmen Sie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$! (4 P)

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{b}v(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{d}v(n)$$
$$\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \text{ and } \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

*(e)* Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems? (7 P)

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{C}\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$$

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z^3} & \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z^3} & \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3} & \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \\ -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3} & -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2} & -\frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3} & \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \\ -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3} & -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2} & -\frac{1}{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3} \\ -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3} \\ -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

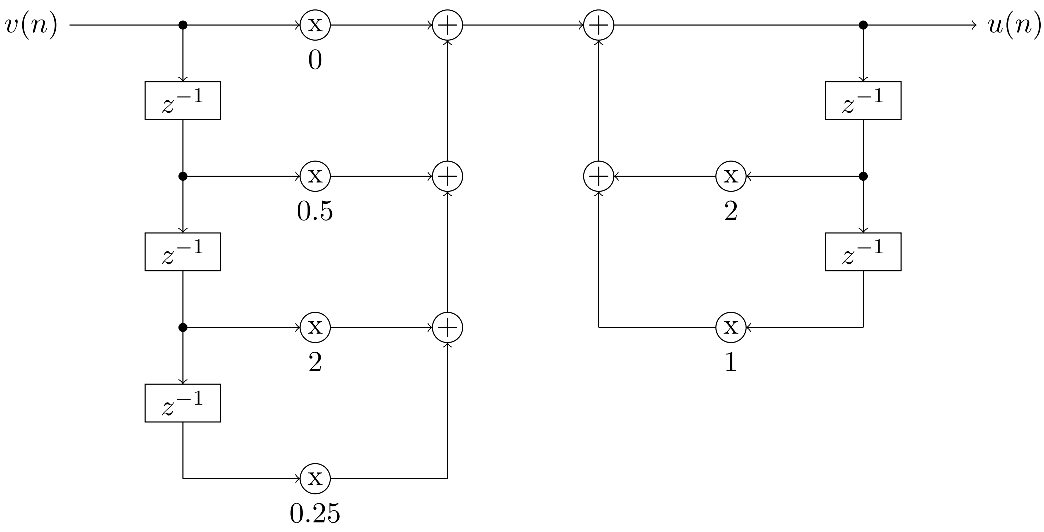
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+1 \\ -z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}+3 \end{bmatrix}$$

*(f)* Bestimmen Sie die Impulsantwort $\boldsymbol{h}_0(n)$. (2 P)

$$\boldsymbol{h}_0(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\gamma_0(n)+\gamma_0(n-1)+\gamma_0(n-2)+\gamma_0(n-3)\right) \\ \frac{1}{4}\left(3\gamma_0(n)-\gamma_0(n-1)-\gamma_0(n-2)-\gamma_0(n-3)\right) \end{bmatrix}$$

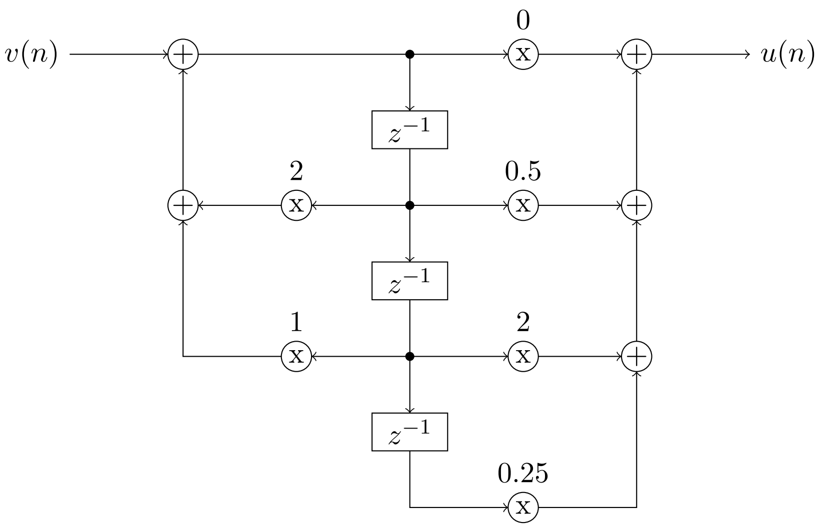
**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und gelöst werden.*

Dieser Aufgabenteil befasst sich mit den Direktformen 1 und 2. Gegeben ist ein System in einer der beiden Direktformen, siehe nachfolgende Abbildung:




*(g)* Um welche der beiden Direktformen handelt es sich hierbei? (1 P)
Es handelt sich hierbei um die sogenannte Direktform 1

*(h)* Wandeln Sie das gegebene System in eine Repräsentation der verbleibenden Direktform um. (4 P)




*(i)* Welche der Direktformen eignet sich, sofern Ihr System speicherbegrenzt ist? Begünden Sie Ihre Aussage! (2 P)
Wenn das Sytem speicherbegrenzt ist, eignet sich die Direktform 2 am besten, da die Anzahl der benötigten Speicherelemente geringer ist.

*(j)* Bestimmen Sie die Differenzengleichung auf Grundlage des gegebenen Systems. (5 P)

$$u(n) = 2u(n-1) + u(n-2) + 0.5v(n-1) + 2v(n-2) + 0.25v(n-3)$$

# Aufgabe 3 (34.5 Punkte)

**Teil 1** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

*(a)* Was versteht man unter Modulation und zu welchem Zweck wird sie eingesetzt? (2 P)
Unter Modulation versteht man die Veränderung einer Eigenschaft eines Trägersignals in Abhängigkeit vom Nutzsignal.
(1 P) Kennen/Wiedergeben – AFB I Sie wird eingesetzt, um das Spektrum des Nutzsignals an die Eigenschaften des Übertragungs-, Speicher- oder Verarbeitungsmediums anzupassen.
(1 P) Kennen/Wiedergeben – AFB I

*(b)* Nennen Sie zwei unterschiedliche Modulationsarten. (2 P)
Beispiele für Modulationsarten sind:

- Amplitudenmodulation (AM)
  (1 P) Kennen/Wiedergeben – AFB I
- Winkelmodulation (z. B. Frequenz- oder Phasenmodulation)
  (1 P) Kennen/Wiedergeben – AFB I

*(c)* Was versteht man im Kontext der Modulation unter einem Trägersignal? (2 P)
Als Trägersignal bezeichnet man ein meist hochfrequentes Signal, auf welches das Nutzsignal aufmoduliert wird.
(1 P) Kennen/Wiedergeben – AFB I

**Teil 2** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

Das Unternehmen *FrischFunk AG* ist Betreiber einer Anlage, welche täglich über Funkverbindung Daten mit Logger-Stationen austauschen muss. Ein beispielhaftes Signal einer solchen Station wird im Folgenden als $v(n)$ bezeichnet und hat das nachfolgend abgebildete Spektrum $V(e^{j\Omega})$ mit den Frequenzen $f_\mathrm{l} = 5\,\mathrm{MHz}$ und $f_\mathrm{u} = 10\,\mathrm{MHz}$. Die Abtastfrequenz beträgt $f_\mathrm{S} = 200\,\mathrm{MHz}$.
*Hinweis: Bedenken Sie in allen nachfolgenden Aufgaben den Zusammenhang zwischen Frequenz und der normierten Kreisfrequenz.*

*(d)* Bestimmen Sie die normierten Kreisfrequenzen der DTFT. Sie können und sollten für eine sauberere Notation diese als Mehrfaches von $\pi$ angeben. (2.5 P)
Allgemeine Formel: $\Omega = 2\pi\frac{f}{f_\mathrm{S}}$
$\Omega_\mathrm{l} = 0.05 \cdot \pi$ und $\Omega_\mathrm{u} = 0.1 \cdot \pi$

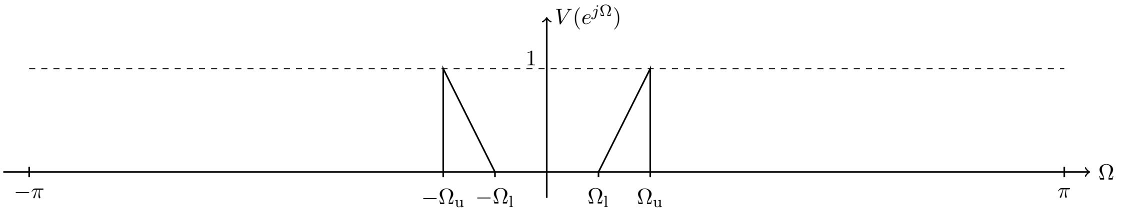



Abbildung 1: Spektrum $V(e^{j\Omega})$ des Nutzsignals $v(n)$ der *FrischFunk AG*.

Alle Stationen und die zentrale Anlage sind mit Systemen ausgestattet, welche das Tief-, Hoch- oder Bandpassfiltern, sowie das Modulieren **vor** dem Senden und **nach** dem Empfangen ermöglichen. Die Sende- und Empfangsvorrichtung erlauben das Senden und Empfangen von Signalen im Frequenzband zwischen $f_{\text{FF}} \in [80\,\text{MHz}, 100\,\text{MHz}]$. Sie wollen nun ohne weitere Modifikationen am Signal eine Zweiseitenband-Modulation durchführen. Das Trägersignal lautet $c_1(n) = \cos(\Omega_{\text{T,FF}} \cdot n)$ und das Sendesignal $V_{\text{ZSB}}(e^{j\Omega})$.

*(e)* Welche Trägerfrequenz $f_{\text{T,FF}}$ (in MHz) müssen Sie bei der ZSB-Modulation wählen, um das Nutzsignal erfolgreich übertragen zu können? (1 P)

$$f_{\text{T,FF}} = 90\,\text{MHz}$$

*(f)* Berechnen Sie das Spektrum $V_{\text{ZSB}}(e^{j\Omega})$ des modulierten Signals $v_{\text{ZSB}}(n)$ und skizzieren Sie dieses im Bereich $-\pi < \Omega < \pi$. Dabei gilt $|\Omega_{\text{T,FF}} + \Omega_{\text{u}}| < \pi$. (5 P)
*Tipp: Bereits das Skizzieren des **richtig beschrifteten** Achsensystems erbringt Punkte. Achten Sie hierbei vor allem auf die Art der Transformation und die Notation aller entsprechenden Größen.*

Anwenden von Bekanntem – AFB II

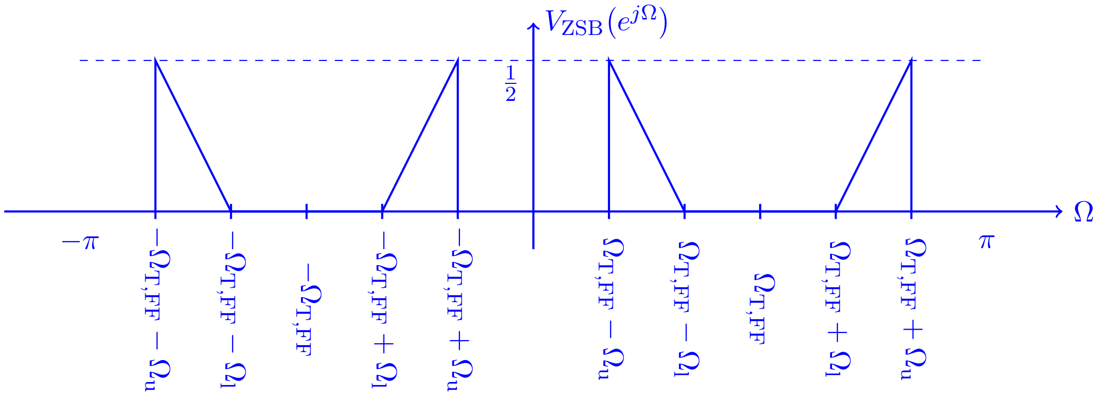
$$v_{\text{ZSB}}(n) = v(n) \cdot c_1(n) \qquad \text{(0.5 P)}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\begin{aligned} V_{\text{ZSB}}(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{v(n) \cdot c_1(n)\} \\ &= \mathcal{F}\{v(n) \cdot \cos(\Omega_{\text{T,FF}} n)\} \qquad \text{(0.5 P)} \end{aligned}$$

Anwenden der Korrespondenz für Kosinus-Therme und einer Multiplikation im Zeitbereich:
$\cos(\Omega_v n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_v - 2\pi\lambda) + \delta_0(\Omega - \Omega_v - 2\pi\lambda)]$ (0.5 P)

$$\begin{aligned} V_{\text{ZSB}}(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2\pi} V(e^{j\Omega}) \circledast \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_{\text{T,FF}} - 2\pi\lambda) + \delta_0(\Omega - \Omega_{\text{T,FF}} - 2\pi\lambda)] \qquad \text{(0.5 P)} \\ &= \frac{1}{2}\left[V(e^{j(\Omega+\Omega_{\text{T,FF}})}) + V(e^{j(\Omega-\Omega_{\text{T,FF}})})\right] \qquad \text{(1 P)} \end{aligned}$$



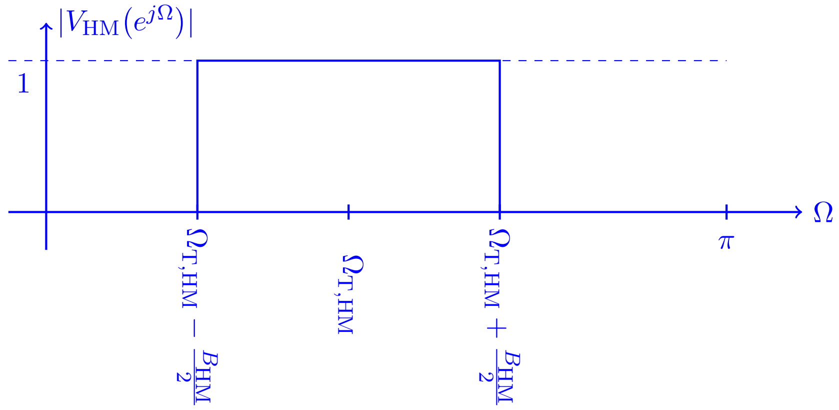
*(g)* Bestimmen Sie, wie viel Bandbreite $B_{\mathrm{FF}}$ (in MHz) Ihr Nutzsignal $v(n)$ nach der ZSB-Modulation effektiv einnimmt, d. h. die Summe der Breiten aller tatsächlich belegten Frequenzbänder. (1 P)

$$B_{\mathrm{FF}} = 2 \cdot (f_{\mathrm{u}} - f_{\mathrm{l}}) = 10\,\mathrm{MHz}$$

Die Firma *HörMal AG* möchte nun ebenfalls Daten per Funk übertragen. Ihre Anlage überträgt die Signale mittels Winkelmodulation. Diese hat ihre Trägerfrequenz fest bei $f_{\mathrm{T,HM}} = 85\,\mathrm{MHz}$ und soll Nutzsignale mit einer maximalen Frequenz von $f_{\mathrm{S,HM}} = 1\,\mathrm{MHz}$ übertragen. Damit sich die Unternehmen nicht gegenseitig stören soll nun die Übertragungsarchitektur beider Unternehmen angepasst werden. Die Anlage der *FrischFunk AG* ist weiterhin die gleiche wie oben beschrieben. Vor und nach dem Senden können jedoch noch weitere Signalverarbeitungstechniken eingesetzt werden. Bei der *HörMal AG* lässt sich die Trägerfrequenz nicht ändern – der Frequenzhub jedoch schon. Ein höherer Frequenzhub wirkt sich positiv auf die empfangene Signalqualität bzw. das SNR aus. Die Bandbreite des Sendesignals der *HörMal AG* wird mit $B_{\mathrm{HM}}$ bezeichnet.

*Hinweis: Nehmen Sie ideale, störungsfreie Frequenzübergänge an. D.h. wenn die Frequenzbänder zweier Signale exakt aneinander grenzen, stören sie sich nicht gegenseitig.*

*(h)* Skizzieren Sie schematisch das Spektrum vom Störsignal $V_{\mathrm{HM}}(e^{j\Omega})$ im positiven Frequenzbereich bis $\pi$. Der Betrag bei jeder Frequenz kann als eins angenommen werden. Denken Sie an die entsprechende Beschriftung der Achsen mit allen wichtigen Frequenzen. Die Bandbreite $B_{\mathrm{HM}}$ kann zunächst als variabel betrachtet werden. (4 P)




*(i)* Gestalten Sie eine Sende- und Empfangsverarbeitung, welche es der *HörMal AG* ermöglicht, ihren Frequenzhub maximal einzustellen. Beschreiben Sie ihr Vorgehen schrittweise und legen Sie alle verwendeten Signale wie bspw. das Sendesignal $S_{\mathrm{Tx}}(e^{j\Omega})$, verwendete Filter, Empfangssignal $S_{\mathrm{Rx}}(e^{j\Omega})$ und das demodulierte Signal $Y(e^{j\Omega})$ rechnerisch dar. Geben Sie anschließend die Bandbreite an, welche der *HörMal AG* nun zur Verfügung steht und den daraus resultierenden Frequenzhub. (11 P)
*Tipp: Die verwendete Modulationsart muss nicht geändert werden. Das Spektrum vom Basisband Signal kann repräsentiert werden durch* $V(e^{j\Omega}) = V_{neg}(e^{j\Omega}) + V_{pos}(e^{j\Omega})$,

*wobei* $V_{neg}(e^{j\Omega})$ *alle negativen Frequenzanteile von* $V(e^{j\Omega})$ *und* $V_{pos}(e^{j\Omega})$ *alle positiven Frequenzanteile von* $V(e^{j\Omega})$ *beschreibt. Filter müssen nur im Bereich* $\pi < \Omega < \pi$ *definiert werden und können abseits davon als* $2\pi$*-periodisch angenommen werden.*

Entwurf einer geeigneten Filterstruktur und Ansatz – AFB III

1. Zur Minimierung der benötigten Bandbreite kann die ESB angewendet werden. Dafür muss das Signal $V_{\mathrm{ZSB}}(e^{j\Omega})$ vor dem Senden hochpassgefiltert werden, mit einer Grenzfrequenz von $\Omega_{\mathrm{G}} = \Omega_{\mathrm{T,FF}}$:

$$H_{\mathrm{HP}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \Omega_{\mathrm{G}} \leq |\Omega| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(1 P)}$$

$$S_{\mathrm{Tx}}(e^{j\Omega}) = V_{\mathrm{ESB}}(e^{j\Omega}) = V_{\mathrm{ZSB}}(e^{j\Omega}) \cdot H_{\mathrm{HP}}(e^{j\Omega}) \qquad \text{(1 P)}$$

2. Nach dem Senden über den gestörten Kanal erhält man folgendes Signal:

$$S_{\mathrm{Rx}}(e^{j\Omega}) = S_{\mathrm{Tx}}(e^{j\Omega}) + V_{\mathrm{HM}}(e^{j\Omega}) \qquad \text{(1 P)}$$

3. Zur Eliminierung ungewollter Signalanteile muss das Empfangssignal einem Hochpassfilter gefiltert werden. Diesmal jedoch mit angepasster Grenzfrequenz $\Omega_{\mathrm{G}} = \Omega_{\mathrm{T,FF}} + \Omega_{\mathrm{l}}$:

$$S_{\mathrm{Rx,HP}}(e^{j\Omega}) = V_{\mathrm{ESB}}(e^{j\Omega}) = S_{\mathrm{Rx}}(e^{j\Omega}) \cdot H_{\mathrm{HP}}(e^{j\Omega}) \qquad \text{(1 P)}$$

4. Kohärente Demodulation mit $c_2(n) = \cos(\Omega_{\mathrm{T}} n)$ liefert das rekonstruierte Spektrum:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{s_{\mathrm{HP}}(n) \cdot c_2(n)\} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\left[V_{\mathrm{neg}}(e^{j\Omega}) + V_{\mathrm{pos}}(e^{j\Omega})\right]}_{V(e^{j\Omega})} + \frac{1}{4}\left[V_{\mathrm{neg}}(e^{j(\Omega+2\Omega_{\mathrm{T,FF}})}) + V_{\mathrm{pos}}(e^{j(\Omega-2\Omega_{\mathrm{T,FF}})})\right] \\ &= \frac{1}{4}V(e^{j\Omega}) + \frac{1}{4}\left[V_{\mathrm{neg}}(e^{j(\Omega+2\Omega_{\mathrm{T,FF}})}) + V_{\mathrm{pos}}(e^{j(\Omega-2\Omega_{\mathrm{T,FF}})})\right] \qquad \text{(2 P)} \end{aligned}$$

5. Tiefpassfilterung zur Entfernung der Spektralanteile bei den doppelten Trägerfrequenzen:

$$H_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 4 & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_{\mathrm{u}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(1 P)}$$

Das daraus resultierende Signal ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} Y_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega}) &= Y(e^{j\Omega}) \cdot H_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega}) \\ &= 4 \cdot \left[\frac{1}{4}V(e^{j\Omega}) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{4}\left[V_{\mathrm{neg}}(e^{j(\Omega+2\Omega_T)}) + V_{\mathrm{pos}}(e^{j(\Omega-2\Omega_T)})\right]}}_{\text{Eliminiert durch Tiefpass}}\right] \\ &= V(e^{j\Omega}) \qquad \text{(1 P)} \end{aligned}$$

Das resultierende Signal liegt dann im Band von 95 MHz bis 100 MHz. Für die *HörMal AG* steht somit das Band oberhalb der Trägerfrequenz von 85 MHz bis 95 MHz zur Verfügung. Die gesamte Bandbreite der Hörmal AG ergibt sich damit zu $B_{\mathrm{HM}} = 20\,\mathrm{MHz}$. Nach Carlson lässt sich die für FM benötigte Bandbreite anhand folgender Formel abschätzen:

$$B_{\mathrm{FM}} = 2 \cdot (\frac{\Delta f}{f_{\max}} + 2) \cdot f_{\max} = 20\,\mathrm{MHz} \quad \text{(1P) Kennen der Formel (AFB I)}$$

Durch Umstellen erhält man

$$\Delta f = (\frac{B_{\mathrm{FM}}}{2 \cdot f_{\max}} - 2) \cdot f_{\max} = (\frac{20\,\mathrm{MHz}}{2 \cdot 1\,\mathrm{MHz}} - 2) \cdot 1\,\mathrm{MHz} = 8\,\mathrm{MHz} \quad \text{(1P) Umstellen (AFB I-II)}$$

**Teil 3** *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

Es liegt eine niederfrequente Cosinusschwingung als Nutzsignal im hörbaren Bereich mit $f_{\mathrm{S}} = 100\,\mathrm{Hz}$ vor, die amplituden- bzw. winkelmoduliert werden soll. Als Trägersignal wird ein weiterer Cosinus mit $f_{\mathrm{C}} = 1\,\mathrm{kHz}$ verwendet, ebenfalls im hörbaren Bereich.

*(j)* Das modulierte Signal wird über einen Lautsprecher wiedergegeben. Beschreiben Sie, was Sie bei einer amplitudenmodulierten (AM) und bei einer frequenzmodulierten (FM) Signalform jeweils hören. (3 P)

**Amplitudenmodulation (AM):** Es ist ein Ton mit der Trägerfrequenz von etwa 1 kHz hörbar, dessen Lautstärke mit der Frequenz des Nutzsignals (100 Hz) periodisch schwankt.

(1.5 P) Verständnis und leichtes Anwenden AM – AFB I

**Frequenzmodulation (FM):** Es ist ein Ton mit etwa 1 kHz hörbar, dessen Tonhöhe periodisch mit der Frequenz des Nutzsignals variiert.

(1.5 P) Verständnis und leichtes Anwenden WM – AFB I

*(k)* Welchen Einfluss hat der Frequenzhub bei der Winkelmodulation auf das hörbare Signal? (1 P)

Der Frequenzhub bestimmt, wie stark die Momentanfrequenz infolge von Amplitudenschwankungen des modulierten Signals von der Trägerfrequenz abweicht.

(1 P) Verständnis und leichtes Anwenden WM – AFB I

Dies ist eine leere Seite.