

Wintersemester 2023/2024

Signale und Systeme II

Lösung zu den Übungsaufgaben

Inhaltsverzeichnis

1	Modulationssystem zur Sprachübertragung	3
2	Amplitudenmodulation	4
3	Winkelmodulation	8
4	Frequenzmodulation	10
5	Puls-Amplituden-Modulation und Quantisierung	13
6	Systembeschreibung im Zustandsraum	15
7	Systembeschreibung im Zustandsraum [†]	17
8	Laplaceverteilung	18
9	Stationarität und Ergodizität	20
10	Kreuz- und Autokorrelation	22
11	Stochastische Signale und lineare Systeme	25
12	Autokorrelation und lineare Systeme	27
13	Idealisierte Systeme	29
14	Idealisierte Systeme	29
15	Filterung und Autokorrelation	30
16	Hilbert-Transformation und Einseitenbandmodulation	32

1 Modulationssystem zur Sprachübertragung

Das in Abbildung 1 dargestellte Modulationssystem dient zum Schutz einer Sprachübertragung gegen unerlaubtes Mithören. Das Spektrum des reellwertigen Eingangssignals $u(t)$ ist in Abbildung 2 für $\omega > 0$ dargestellt.

- Analysieren Sie die Wirkungsweise der Schaltung durch Angabe der Spektren $G_i(j\omega) = \mathcal{F}\{g_i(t)\}$ an den einzelnen Punkten $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der Schaltung.
- Ergänzen Sie die fehlenden Angaben ω_S und ω_D für das verwendete Hochpassfilter (HP) und das Tiefpassfilter (TP), wie sie in Abbildung 2 spezifiziert sind.
- Zeigen Sie, dass das gleiche System auch zur Demodulation geeignet ist.

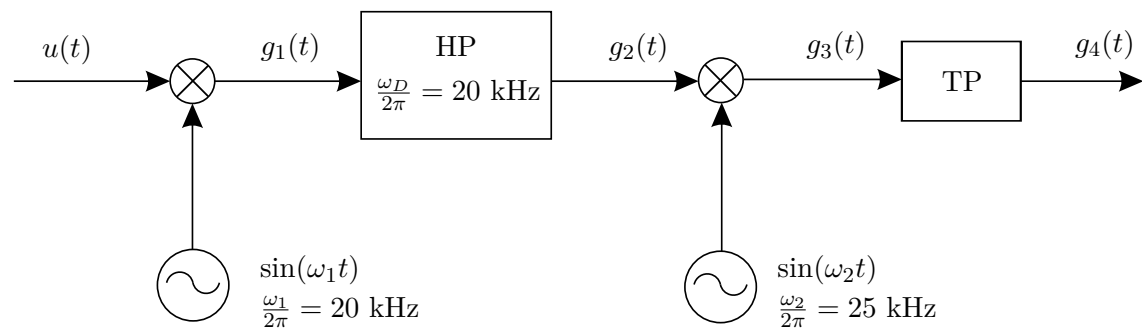


Abbildung 1: Modulationssystem zu Aufgabe 1.

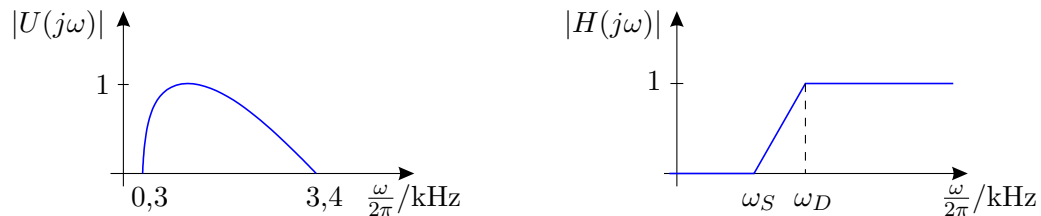


Abbildung 2: Spektrum des Eingangssignals und Frequenzgang des Hochpassfilters zu Aufgabe 1.

1.1 Lösungsansatz

- Zunächst ist zu beachten, dass Sprachsignale reellwertig sind und somit für das gegebene Spektrum Hermitesymmetrie vorliegt

$$U(-j\omega) = U^*(j\omega) \quad \Rightarrow \quad |U(-j\omega)| = |U(j\omega)|.$$

Die Analyse des Systems wird am besten unter Betrachtung der Spektren vorgenommen. Die Multiplikation mit dem Sinusträger bewirkt dabei

$$\begin{aligned}
 g_1(t) &= u(t) \cdot \sin(\omega_1 t) \\
 &\quad \downarrow \\
 G_1(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * \mathcal{F}\{\sin(\omega_1 t)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * j\pi [\delta_0(\omega + \omega_1) - \delta_0(\omega - \omega_1)] \\
 &= \frac{j}{2} [U(j(\omega + \omega_1)) - U(j(\omega - \omega_1))]
 \end{aligned}$$

Auf gleiche Art und Weise kann die zweite Modulation behandelt werden.

- (b) Die Parameter des Hochpassfilters sind so zu bestimmen, dass nur das obere Frequenzband durchgelassen wird. Das Tiefpassfilter soll nur das innere Frequenzband durchlassen. Beides Mal ist zu beachten, dass die Filter reellwertig sein sollen, das heißt, dass für die Frequenzgänge $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ gelten muss.
- (c) Das Spektrum $G_4(j\omega)$ als Eingangsspektrum annehmen und erneut das Ausgangssignal berechnen. Man erhält das gewichtete Signal $\alpha \cdot u(t)$. Welchen Wert hat der Verstärkungsfaktor α ?

1.2 Ergebnis

- (a) Für die Teilsignale ergeben sich die Spektren aus Abbildung 3.
- (b) Für das Hochpassfilter muss gelten:

$$19,7 \text{ kHz} \leq \frac{\omega_S}{2\pi} \leq \frac{\omega_D}{2\pi} \leq 20,3 \text{ kHz}.$$

Für das Tiefpassfilter muss gelten:

$$4,7 \text{ kHz} \leq \frac{\omega_D}{2\pi} \leq \frac{\omega_S}{2\pi} \leq 45,3 \text{ kHz}.$$

- (c) Wie bereits in der Aufgabenstellung erwähnt eignet sich das System zur Demodulation. Der Verstärkungsfaktor ist $\alpha = 1/16$.

2 Amplitudenmodulation

Gegeben ist das reellwertige, bandbegrenzte Signal $v(t)$, für dessen Spektrum

$$V(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_g$$

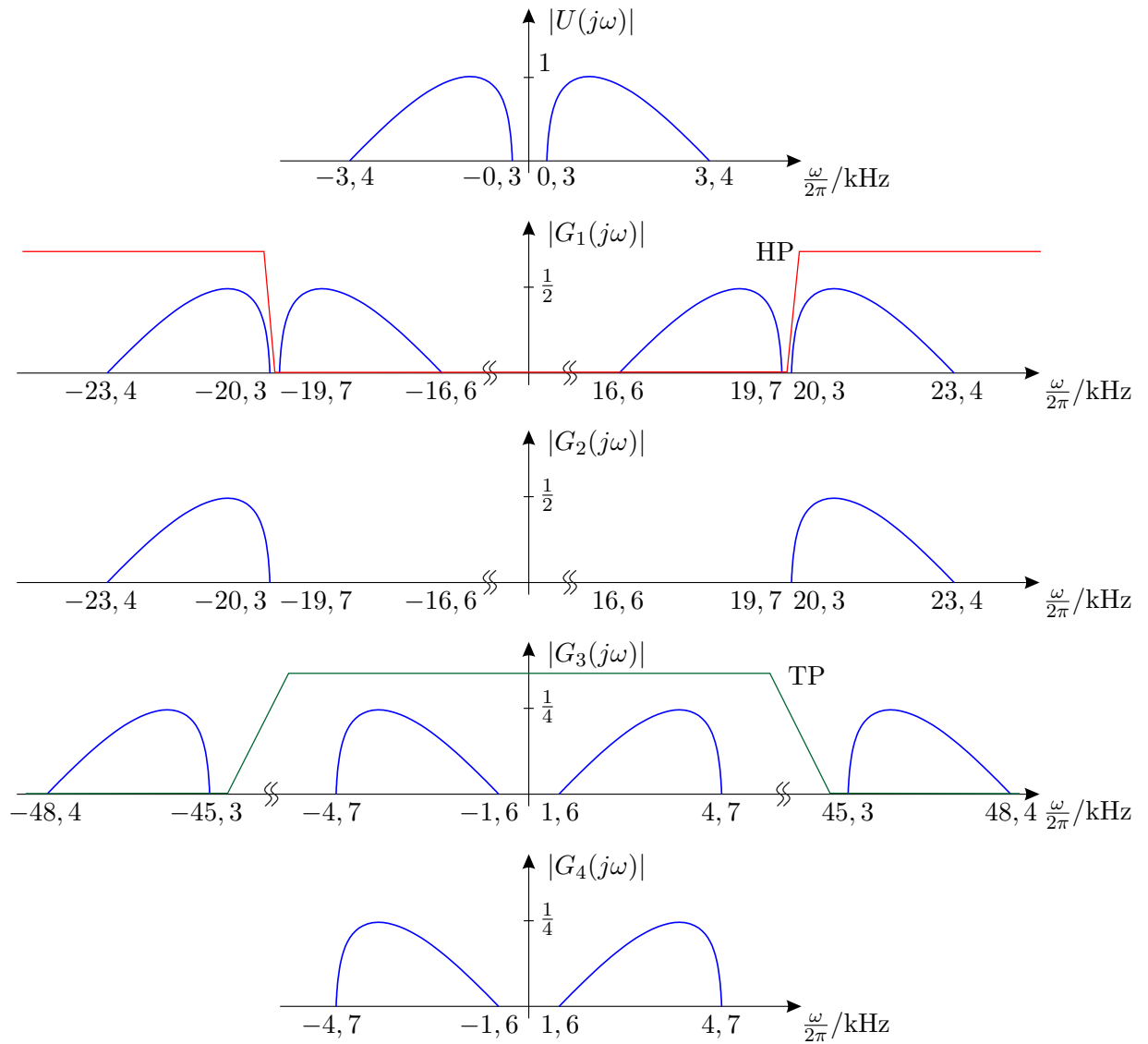


Abbildung 3: Teilspektren zu Aufgabe 1 (b).

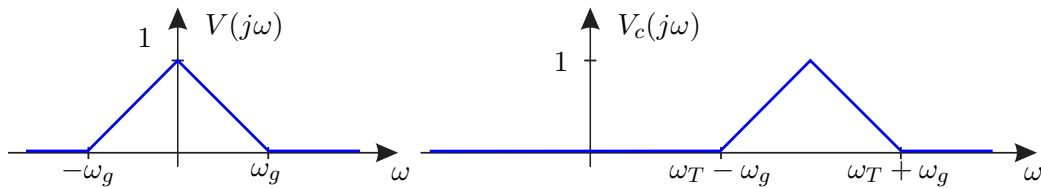


Abbildung 4: Veranschaulichung der Aufgabenstellung zu Aufgabe 2.

gilt. Zur Übertragung soll dieses Signal so modifiziert werden, dass das resultierende Spektrum $V_c(j\omega)$ um die Frequenz $\omega_T \gg \omega_g$ „verschoben“ wird. Gelten soll also

$$V_c(j\omega) = 0 \quad \forall (\omega_T - \omega_g) > \omega > (\omega_T + \omega_g).$$

- Welcher Ansatz für eine solche Modifikation ergibt sich aus dem Modulationssatz? Wie kann das Ausgangssignal $v(t)$ aus dem modulierten Signal $v_c(t)$ zurückgewonnen werden?
- Was ist ein Nachteil der Modulationsmethode aus (a)? Die Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) umgeht dieses Problem. Wie wird hier das modulierte Signal $y_z(t)$ erzeugt und wie kann es demoduliert werden?
- Ein Nachteil der ZSB-Modulation wird ersichtlich, wenn man das Spektrum $Y_z(j\omega)$ des modulierten Signals skizziert. Welche Erweiterung der ZSB-Modulation kann hier helfen, wie heißt diese Modulationsart und welche Vorteile bietet sie bei der Demodulation?
- Die Amplitudenmodulation ist ein weit verbreitetes, der ZSB-Modulation ähnliches, Verfahren. Worin bestehen die Gemeinsamkeiten?

2.1 Lösungsansatz

Zur Veranschaulichung wird ein dreiecksförmiges Spektrum $V(j\omega)$ angenommen. In der Aufgabenstellung wird gefordert, dass dieses wie in Abbildung 4 verschoben wird.

- Der Ansatz zur Modulation ergibt sich direkt aus dem Modulationssatz

$$v(t) e^{j\omega_0 t} \circ \bullet V(j(\omega - \omega_0)).$$

Ebenso kann durch eine negative Verschiebung des Spektrums wieder demoduliert werden.

- Ein Nachteil ist, dass das mit dem Modulationsverfahren aus (a) gewonnene Signal komplexwertig ist. Dies ist zum Einen direkt aus der Definition

$$v_c(t) = v(t) e^{j\omega_T t} \in \mathbb{C}$$

ersichtlich, zum Anderen aber auch aus der fehlenden Hermitesymmetrie des Spektrums

$$V(-j\omega) \neq V^*(j\omega).$$

Die Zweiseitenbandmodulation liefert ein reellwertiges Signal, indem sie nur den Realteil des Trägers $e^{j\omega_T t}$ benutzt:

$$y_z(t) = v(t) \cos(\omega_T t).$$

Demoduliert werden kann durch erneutes Multiplizieren mit $\cos(\omega_T t)$ und passende Tiefpassfilterung. Dies kann man sich gut klarmachen, wenn man die verschobenen Spektren skizziert.

- (c) Skizziert man das Spektrum $Y_z(j\omega)$ der ZSB-modulierten Signals so wird deutlich, dass die Information in den beiden um die Frequenz $\pm\omega_T$ liegenden Seitenbändern steckt. Würde man diese Redundanz entfernen, könnte der frei werdende Frequenzbereich für andere Signale genutzt werden. Daher verwendet die ESB-Modulation eine Bandpassfilterung um entweder das obere oder untere Seitenband zu eliminieren.

Wie bei den in (a)-(c) behandelten Modulationsverfahren können auch bei der ESB-Modulation zwei verschiedene Fehler im Trägersignal auftreten

- Trägerfrequenzfehler $\Delta\omega$ und
- Trägerphasenfehler φ .

Damit verändert sich das Trägersignal zu

$$\cos(\omega t) \Rightarrow \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi).$$

Ein Fehler $\Delta\omega$ in der Trägerfrequenz bewirkt, dass bei der Demodulation die Spektren nicht korrekt in den Durchlassbereich des Demodulationstiefpassfilters verschoben werden. Bei der ZSB-Modulation überlagern sich dabei zwei Spektren nicht optimal, während bei der ESB-Modulation „nur“ eine Lücke um die Frequenz $\omega = 0$ entsteht.

- (d) Die Amplitudenmodulation ist eine ZSB-Modulation, bei der die Trägerschwingung mitübertragen wird:

$$\begin{aligned} y_a(t) &= [1 + m v(t)] \cos(\omega_T t) \\ &= \cos(\omega_T t) + \underbrace{m v(t) \cos(\omega_T t)}_{y_z(t)}. \end{aligned}$$

Die zusätzlich übertragene Trägerschwingung verschlechtert zwar die Energieeffizienz des Verfahrens, erleichtert aber, Trägerphasenfehler in der Demodulation zu korrigieren.

2.2 Ergebnis

- (a) Modulation: $v_c(t) = v(t) e^{j\omega_T t}$
 Demodulation: $v(t) = v_c(t) e^{-j\omega_T t}$

- (b) Nachteil von (a): $v_c(t) \in \mathbb{C}$
 Modulation: $y_z(t) = v(t) \cos(\omega_T t)$
 Demodulation: $v(t) = [y_z(t) \cos(\omega_T t)] * h(t)$
 mit $h(t)$ Impulsantwort eines passenden Tiefpassfilters
- (c) Nachteil von (b): Verminderte Bandbreiteneffizienz, da jedes Seitenband von $y_z(t)$ die Information des Signals trägt.
 Lösung: Einseitenband Modulation (ESB-Modulation)
 Vorteil: Trägerfrequenzfehler bei Demodulation weniger kritisch als bei ZSB-Modulation
- (d) Bei der AM wird zusätzlich die Trägerschwingung mitübertragen, was die Demodulation vereinfacht.

3 Winkelmodulation

Wie in der Vorlesung vorgestellt kann die Winkelmodulation als kontinuierliche Modulation eines Sinusträgers verstanden werden:

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cos(\omega_T t + \varphi_T) = \hat{c}_T \cos(\Phi_T(t)).$$

- (a) Wie ließe sich eine ZSB-Modulation in diesem Trägersignal $c_T(t)$ integrieren?
- (b) Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen der Frequenzmodulation (FM) und der Phasenmodulation (PM)?
- (c) In Abbildung 5 ist ein einfaches Nutzsinal $v(t)$ dargestellt. Bestimmen Sie jeweils für PM und FM die Momentan-Frequenz $\Omega_T(t)$ und skizzieren Sie diese.
- (d) Welche Systemeigenschaften weist die Winkelmodulation bezüglich der Linearität, der Kausalität, der Verschiebungsinvarianz und der Stabilität auf? Weisen Sie diese Eigenschaften nach.

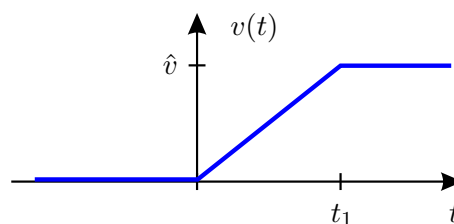


Abbildung 5: Nutzsinal zu Aufgabe 3.

3.1 Lösungsansatz

Die Winkelmodulation ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} c_T(t) &= \hat{c}_T \cos(\omega_T t + \varphi_T) \\ &= \cos(\Phi_T(t)). \end{aligned}$$

-
- (a) Obige Definition enthält die ZSB-Modulation als Sonderfall, wenn die Amplitude des Trägers durch das Signal $v(t)$ moduliert wird

$$\hat{c}_T \Rightarrow \hat{c}_T(t) = v(t).$$

- (b) In obiger Definition der Winkelmodulation ist die Momentanphase

$$\Phi_T(t) = f(v(t))$$

eine Funktion des Signals $v(t)$ und trägt somit die Signalinformation. Phasen- und Frequenzmodulation unterscheiden sich in der Art und Weise, wie die Information von $v(t)$ in $\Phi_T(t)$ eingepreßt wird:

- Phasenmodulation (PM):

$$\text{Momentanphase} \quad \Phi(t) = \omega_T t + k 2\pi v(t)$$

$$\text{Momentanfrequenz} \quad \Omega_T(t) = \frac{d\Phi_T(t)}{dt} = \omega_T + k 2\pi \frac{dv(t)}{dt}$$

- Frequenzmodulation (FM):

$$\text{Momentanfrequenz} \quad \Omega_T(t) = \omega_T + k 2\pi v(t)$$

$$\text{Momentanphase} \quad \Phi_T(t) = \omega_T t + k 2\pi \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

In einer Nachrichtenübertragung wäre also $c_T(t)$ das Sendesignal. Im Allgemeinen kann das Spektrum $C(j\omega) = \mathcal{F}\{c_T(t)\}$ nicht berechnet werden.

- (c) Das gegebene Signal $v(t)$ in die obigen Definitionen für die Momentanfrequenz $\Omega_T(t)$ einsetzen und vereinfachen.

- (d) Überprüfen der Systemeigenschaften der Winkelmodulation:

- **Linearität:** Wie in Aufgabenteil (b) die Momentanphase $\Phi_T(t) = f(v(t))$ als Funktion des Signals

$$v(t) = \alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t)$$

ausdrücken. Gilt der Überlagerungssatz? Um sich das klar zu machen, kann man auch eine einfache Funktion, z.B. $f(x) = x$, annehmen.

- **Kausalität:** Ein System ist auch nichtkausal, wenn es ohne Anregung ein Ausgangssignal generiert („Reaktion ohne Ursache“). Ist dies bei der Winkelmodulation der Fall?
- **Verschiebungsinvarianz:** Die Bedingung für Verschiebungsinvarianz für Phasen- und Frequenzmodulation getrennt überprüfen.
- **Stabilität:** Kriterium der BIBO-Stabilität anwenden.

3.2 Ergebnis

- (a) Die Trägeramplitude durch das Signal $v(t)$ modulieren:

$$\hat{c}_T \Rightarrow \hat{c}_T(t) = v(t).$$

(b) Phasen- und Frequenzmodulation unterscheiden sich in der Art und Weise, wie die Information von $v(t)$ in $\Phi_T(t)$ eingepreßt wird.

(c) • Phasenmodulation:

$$\Omega_T(t) = \frac{d\Phi_T(t)}{dt} = \begin{cases} \omega_T, & t < 0 \\ \omega_T + k 2\pi \frac{\hat{v}}{t_1}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \omega_T, & t > t_1 \end{cases}$$

• Frequenzmodulation:

$$\Omega_T(t) = \omega_T + k 2\pi(t) = \begin{cases} \omega_T, & t < 0 \\ \omega_T + k 2\pi \frac{\hat{v}}{t_1} t, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \omega_T + k 2\pi \hat{v}, & t > t_1 \end{cases}$$

(d) Die Winkelmodulation ist

linear?	nein
kausal?	nein
verschiebungsinvariant?	nein
stabil?	✓ ja!

4 Frequenzmodulation

Gegeben ist ein frequenzmoduliertes Signal der Form

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cdot \cos \left(\omega_T t + \frac{2\pi \Delta f}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) .$$

Trägeramplitude $\hat{c}_T = 2 \text{ V}$

Trägerfrequenz $\omega_T = 2\pi \cdot 10,7 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$

Frequenzhub $\Delta f = 75 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

- (a) Bei welcher Modulationsfrequenz wird mit den angegebenen Werten der Modulationsgrad $\eta = 5$ erreicht?
- (b) Wie groß ist nach Carson die zur Übertragung dieses FM-Signals erforderliche Bandbreite?
- (c) Welchen Frequenzabstand besitzen die einzelnen Spektrallinien des FM-Signals zueinander, und wieviele Linien werden durch die Abschätzung nach Carson berücksichtigt?
- (d) Ermitteln Sie mit Hilfe von Abbildung 6 die Beträge der Amplituden der Spektrallinien bis zur Ordnung $\mu = 3$ und geben Sie die zugehörigen Frequenzen an.

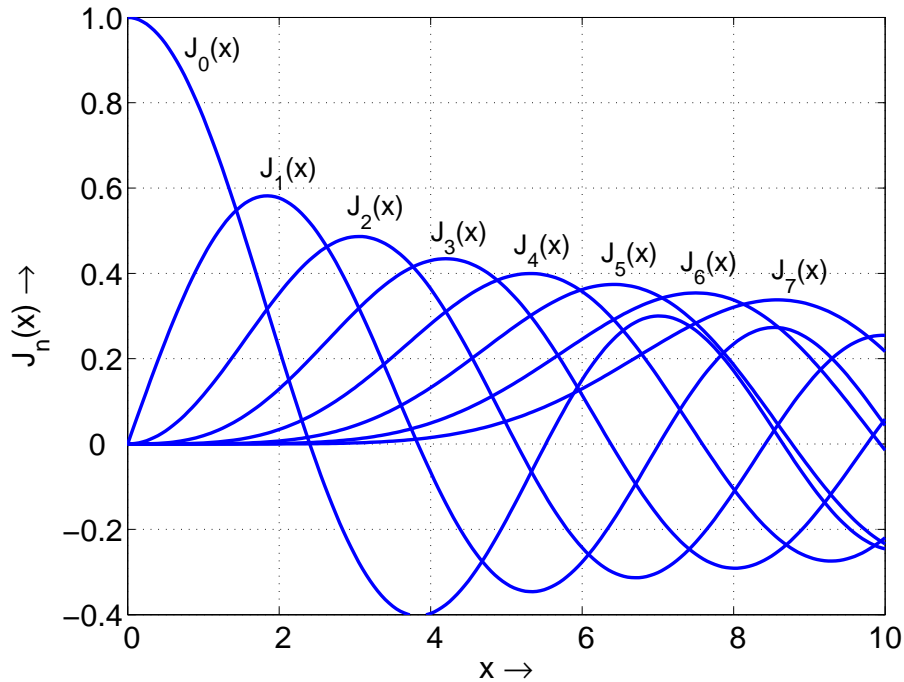


Abbildung 6: Besselfunktionen 1. Gattung n -ter Ordnung, zu Aufgabe 4.

4.1 Lösungsansatz

Wie in den Vorlesungsfolien (V-68 ff.) beschrieben, kann für das Spektrum eines frequenzmodulierten Signals für den Sonderfall,

$$v(t) = \hat{v} \cos(\omega_1 t)$$

berechnet werden. Dies ist genau der Fall, der in dieser Aufgabe betrachtet wird. Für das Trägersignal gilt also

$$\begin{aligned}
 c_T(t) &= \hat{c}_T \cos\left(\omega_T t + 2\pi k \int_{-\infty}^t \hat{v} \cos(\omega_1 \tau) d\tau\right) \\
 &= \hat{c}_T \cos\left(\omega_T t + 2k\pi \hat{v} \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)\right) \\
 &= \hat{c}_T \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_T t} e^{j2\pi k \frac{\hat{v}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)} \right\} \\
 &= \hat{c}_T \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_T t} \tilde{c}(t) \right\}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Der Term $\tilde{c}(t)$ kann wie in den Vorlesungsfolien beschrieben als komplexer Zeiger interpretiert werden. Hierzu werden üblicherweise die beiden Größen

- Frequenzhub $\Delta f = k\hat{v}$ und
- Modulationsgrad $\eta = 2\pi k \frac{\hat{v}}{\omega_1} = \frac{\Delta f}{f_1}$

eingeführt.

Des Weiteren kann $\tilde{c}(t)$ durch die Potenzreihenentwicklung für die Exponentialfunktion dargestellt werden:

$$\tilde{c}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_{\mu}(\eta) e^{j\mu\omega_1 t}.$$

Dabei stellt $J_{\mu}(\eta)$ die Besselfunktion (oder auch Zylinderfunktion) erster Gattung der Ordnung η dar (die Funktionswerte werden für gewöhnlich einer Tabelle oder einem Graphen entnommen). Setzt man dies in Gleichung (1) ein, erhält man

$$c_T(t) = \hat{c}_T \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_{\mu}(\eta) e^{j(\omega_T + \mu\omega_1)t} \right\}, \quad (2)$$

was für Aufgabenteile (c) und (d) hilfreich ist.

- (a) Die Formeln für Frequenzhub und Modulationsgrad entsprechend umformen und die gegebenen Kenngrößen einsetzen.
- (b) Die Breite f_B des Bandes, in dem 99% der Energie des Trägersignals $c_T(t)$ liegen, lässt sich nach Carson über

$$f_B = 2(\eta + 2)f_1$$

abschätzen.

- (c) Gleichung (2) zeigt, dass das Trägersignal Spektrallinien bei den Frequenzen

$$\pm(\omega_T + \mu\omega_1)$$

aufweist (das \pm kommt von der Realteilbildung, die aus der Exponentialfunktion einen Kosinus erzeugt). Der Abstand der Spektrallinien ist also

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 15 \text{ kHz}$$

und die Anzahl der berücksichtigten Spektrallinien

$$\text{Anzahl der Spektrallinien} = \frac{\text{Bandbreite}}{\text{Abstand}} = \frac{f_B}{f_1} = 2(\eta + 2).$$

- (d) Aus Gleichung (2) wird ersichtlich, dass die einzelnen Signalkomponenten mit den Faktoren

$$c_{\mu} = \hat{c}_T J_{\mu}(\eta).$$

gewichtet werden. Die Werte der Besselfunktionen können aus dem Graphen entnommen werden, zusätzlich gilt für ganzzahlige μ

$$J_{-\mu}(\eta) = (-1)^{\mu} J_{\mu}(\eta).$$

Für $\mu = 1$ gilt also beispielsweise

$$|c_1| = |2\text{V} \cdot J_1(\eta)| \approx |2\text{V} \cdot (-0,3276)| = 0,6552 \text{ V}$$

mit der zugehörigen Frequenz

$$f_1 = \pm(10,7 \text{ MHz} + 0,015 \text{ MHz}) = \pm 10,715 \text{ MHz}.$$

4.2 Ergebnis

- (a) Der Modulationsgrad $\eta = 5$ wird bei der Modulationsfrequenz $f_1 = 15 \text{ kHz}$ erreicht.
- (b) Die benötigte Bandbreite ist nach Carson $f_B = 210 \text{ kHz}$.
- (c) Der Abstand zwischen den Spektrallinien beträgt $\omega_1 = 2\pi \cdot 15 \text{ kHz}$. Es werden 14 Linien berücksichtigt.
- (d) Die Tabelle zeigt die Betrags-Amplitudengewichte für $\mu \in [-3, 3] \in \mathbb{N}$ sowie die zugehörigen Frequenzen.

μ	Gewicht $ c_{\pm\mu} $	$f_\mu = \pm(f_T + \mu f_1)$	$f_{-\mu} = \pm(f_T - \mu f_1)$
0	0,3552 V	$\pm 10,7 \text{ MHz}$	$\pm 10,7 \text{ MHz}$
1	0,6552 V	$\pm 10,715 \text{ MHz}$	$\pm 10,685 \text{ MHz}$
2	0,0932 V	$\pm 10,73 \text{ MHz}$	$\pm 10,67 \text{ MHz}$
3	0,7296 V	$\pm 10,745 \text{ MHz}$	$\pm 10,655 \text{ MHz}$

5 Puls-Amplituden-Modulation und Quantisierung

In dieser Aufgabe werden die Grundlagen der Puls-Amplituden-Modulation (PAM) wiederholt. Dabei bezeichne $v(t)$ das Informationssignal und $y_p(t)$ das modulierte Signal. $V(j\omega)$ und $Y_p(j\omega)$ seien die entsprechenden Spektren.

- (a) Worin unterscheiden sich PAM und Amplitudenmodulation, worin liegen die Gemeinsamkeiten?
- (b) Wie kann ein PAM-Signal demoduliert werden? Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Demodulation überhaupt möglich ist. Erklären Sie dies, indem Sie ein geeignetes Spektrum $V(j\omega)$ annehmen und das resultierende Spektrum $Y_p(j\omega)$ skizzieren.
- (c) Welcher weitere Schritt ist notwendig, um aus dem PAM-Signal ein digitales Signal $v_Q(n)$ zu erzeugen?

5.1 Lösungsansatz

(a) Die Pulsamplitudenmodulation (PAM) ist folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned}y_p(t) &= v(t)p(t) \\ &= T_A v(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A) \\ &= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT_A) \delta_0(t - nT_A)\end{aligned}$$

Sie beschreibt also die Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals.

(b) Das Spektrum des PAM-Signals ist

$$Y_p(j\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V\left(j\left(\omega - \underbrace{\mu \frac{2\pi}{T_A}}_{\omega_A}\right)\right).$$

Es besteht also aus der Überlagerung verschobener Spektren $V(j\omega)$. Nur wenn diese Spektren sich nicht überlappen, kann durch Tiefpassfilterung demoduliert werden. Dies ist der Fall, wenn das Abtasttheorem

$$\omega_A \geq 2\omega_g$$

erfüllt ist, wobei ω_g die höchste im Signal $v(t)$ auftretende Frequenz sei. Für eine Skizze bietet sich z.B. ein dreieckiges Spektrum an.

(c) Durch die PAM wird ein zeitdiskretes Signal erzeugt. Um ein digitales Signal zu erhalten, ist zusätzlich Amplitudenquantisierung notwendig, um das Signal auch wertediskret zu machen.

5.2 Ergebnis

(a) Sowohl bei PAM als auch bei AM steckt die Information des Nutzsignals in der Amplitude des modulierten Signals. Die beiden Verfahren unterscheiden sich lediglich im Trägersignal.

$$\begin{array}{ll}\text{ZSB-Modulation (als AM):} & \cos(\omega_T t) \\ \text{PAM:} & T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A)\end{array}$$

(b) Demodulation ist durch Tiefpassfilterung möglich, wenn das Abtasttheorem

$$\omega_A \geq 2\omega_g$$

erfüllt ist, wobei ω_g die höchste im Signal $v(t)$ auftretende Frequenz sei.

(c) Durch Amplitudenquantisierung wird aus dem PAM-Signal ein digitales Signal erzeugt.

6 Systembeschreibung im Zustandsraum

Gegeben ist ein System, beschrieben durch folgende Zustandsgleichungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(n) \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + v(n)\end{aligned}$$

- (a) Berechnen Sie $y(n)$ für $n \in \{0, 1\}$ bei einer Anregung $v(n) = \gamma_0(n)$ und einem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Welchen Wert nimmt $\mathbf{x}(n)$ im eingeschwungenen Zustand ein?
(c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.
(d) Berechnen Sie die Impuslantwort $h_0(n)$.

6.1 Lösungsansatz

- (a) Ein zeitdiskretes, lineares System kann im Zustandsraum durch die Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{v}(n)$$

zusammen mit der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{v}(n)$$

beschrieben werden. Dabei sei $\mathbf{v}(n)$ der Eingangssignalvektor, $\mathbf{y}(n)$ der Ausgangssignalvektor und $\mathbf{x}(n)$ der Zustandsvektor. Die vier Matrizen können aus den gegebenen Gleichungen abgelesen werden:

$$\text{Systemmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$\text{Eingangsmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times L}$$

$$\text{Ausgangsmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{R \times N}$$

$$\text{Durchgangsmatrix} \quad \mathbf{D} = \mathbf{d} = d = 1 \in \mathbb{R}^{R \times L}$$

Einige der Matrizen sind also Vektoren oder Skalare. Ebenso kann an den Dimensionen abgelesen werden:

$$\text{Anzahl der Eingänge} \quad L = 1$$

$$\text{Anzahl der Ausgänge} \quad R = 1$$

$$\text{Anzahl der Zustände} \quad N = 2$$

Zur Lösung der Aufgabe für $n = 0$ und $n = 1$ jeweils zuerst die Zustands- und dann

die Ausgangsgleichung lösen.

- (b) Eingeschwungener Zustand herrscht auf jeden Fall für $n \rightarrow \infty$. Für das Eingangssignal gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_0(n) = 0$$

Damit kann die Zustandsgleichung für $n \rightarrow \infty$ aufgestellt und das entstehende lineare Gleichungssystem nach $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_\infty$ aufgelöst werden.

- (c) Wendet man die z-Transformation auf die Zustandsgleichung an, so erhält man

$$\begin{array}{c} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{v}(n) \\ \circ \\ \bullet \\ \mathbf{x}(z) \cdot z = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}\mathbf{v}(z). \end{array}$$

Löst man dies nach $\mathbf{x}(z)$ auf, so erhält man mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}(z).$$

Ebenso gilt für die z-Transformierte der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{c} \mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{v}(n) \\ \circ \\ \bullet \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{v}(z) \\ = \underbrace{[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]}_{\mathbf{H}(z)} \mathbf{v}(z). \end{array}$$

Die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(z)$ kann also durch Einsetzen der bekannten Matrizen bestimmt werden. Da das vorgegebene System nur einen Eingang ($L = 1$) und einen Ausgang ($R = 1$) hat, ist die Übertragungsmatrix hier eine Übertragungsfunktion $\mathbf{H}(z) = H(z)$.

- (d) Die Impulsantwort $h_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ kann durch Transformation mittels aus Tabellen bekannter Korrespondenzen bestimmt werden.

6.2 Ergebnis

(a) $y(0) = 2, y(1) = \frac{3}{2}$

(b) $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_\infty = [0 \ 0]^T$

(c) $\mathbf{H}(z) = H(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$

(d) $h_0(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [\gamma_{-1}(n) + \gamma_{-1}(n-1)] = \gamma_0(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \gamma_{-1}(n-1)$

7 Systembeschreibung im Zustandsraum[†]

Ein System sei durch die folgenden Zustandsgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}(n)\end{aligned}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, und $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

- (a) Zeichnen Sie den Signalflussgraphen des Systems.
- (b) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(z)$.
- (c) Wie lautet die Impulsantwortmatrix $\mathbf{h}_0(n)$?

7.1 Lösungsansatz

- (a) Der Signalflussgraph veranschaulicht die beiden Zustandsgleichungen. Ein strukturiertes Vorgehen um ihn zu zeichnen ist es, zuerst die L Eingangsknoten, die N Knoten für die inneren Zustände jeweils zu den Zeitpunkten $n+1$ und n sowie die R Ausgangsknoten in dieser Reihenfolge von links nach rechts aufzuzeichnen. Anschließend müssen diese nur noch entsprechend der Zustandsgleichung und der Ausgangsgleichung verbunden und beschriftet werden.
- (b) Die Übertragungsmatrix wird durch Vereinfachen der Gleichung

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

berechnet. Dabei bezeichnet \mathbf{I} die Einheitsmatrix der selben Dimension wie \mathbf{A} . Das Ergebnis sollte in Form *einer* $R \times L$ Matrix vorliegen. Die Übertragungsmatrix besteht aus den Teilübertragungsfunktionen $H_{rl}(z)$ von jedem Systemeingang l zu jedem Systemausgang r :

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(z)}{V_1(z)} & \frac{Y_1(z)}{V_2(z)} \\ \frac{Y_2(z)}{V_1(z)} & \frac{Y_2(z)}{V_2(z)} \end{bmatrix}$$

- (c) Die Impulsantwortmatrix wird als inverse z -Transformation der Übertragungsmatrix bestimmt

$$\mathbf{h}_0(n) = \mathcal{Z}^{-1} \{ \mathbf{H}(z) \} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}^{-1} \{ H_{11}(z) \} & \mathcal{Z}^{-1} \{ H_{12}(z) \} \\ \mathcal{Z}^{-1} \{ H_{21}(z) \} & \mathcal{Z}^{-1} \{ H_{22}(z) \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{0,11}(n) & h_{0,12}(n) \\ h_{0,21}(n) & h_{0,22}(n) \end{bmatrix}.$$

7.2 Ergebnis

- (a) Der Signalflussgraph ist in Abbildung 7 dargestellt.

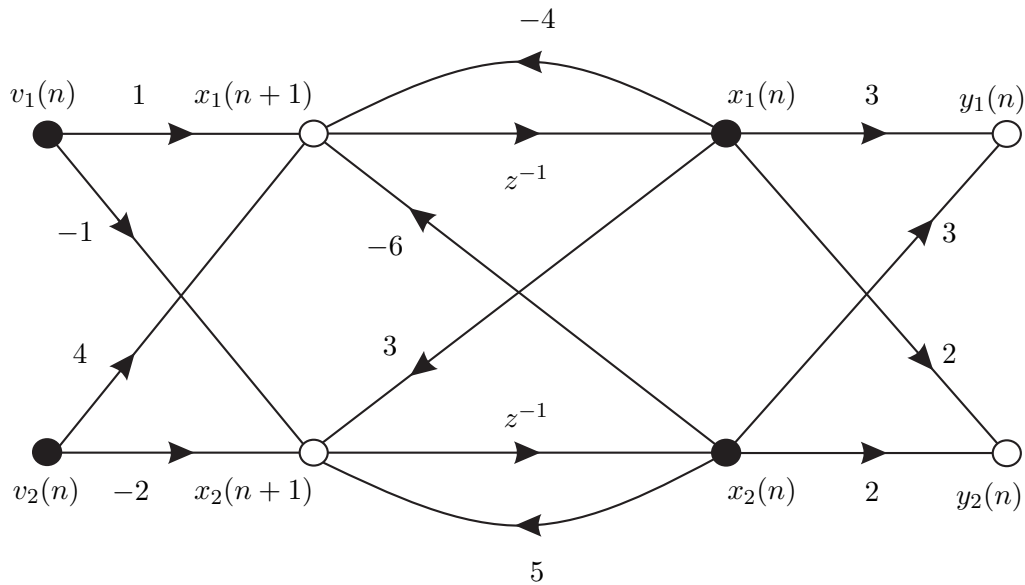


Abbildung 7: Signalflussgraph zu Aufgabe 7 (b).

$$(b) \mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{z+1} \\ 0 & \frac{4}{z+1} \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{h}_0(n) = \begin{bmatrix} 0 & 6(-1)^{n-1}\gamma_{-1}(n-1) \\ 0 & 4(-1)^{n-1}\gamma_{-1}(n-1) \end{bmatrix}, \quad \forall |z| > 1$$

8 Laplaceverteilung

Gegeben ist die Laplace-verteilte Zufallsvariable v , für deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gilt

$$f_v(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}.$$

- Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_v(x)$ und auch grob die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$. Welcher Wertebereich ist für den Parameter α zulässig?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E\{v\}$ sowie die Varianz σ_v^2 .
- Bestimmen Sie die charakteristische Funktion $C_v(\omega)$ der Laplaceverteilung.
- Mit Hilfe des Momententheorems

$$E\{v^k\} = \frac{1}{j^k} \frac{d^k C_v(\omega)}{d\omega^k} \Big|_{\omega=0}$$

kann das k te Moment aus der charakteristischen Funktion bestimmt werden. Überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (c).

8.1 Lösungsansatz

(a) Für eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_v(x) dx = 1$$

gelten. Für welche Werte von α ist dies möglich? Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch

$$F_v(x) = \int_{-\infty}^x f_v(u) du$$

definiert. Was muss also für die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} F_v(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_v(x)$ gelten? Daraus lässt sich eine grobe Skizze für $F_v(x)$ anfertigen.

(b) Beim Lösen des Integrals über $f_v(x)$ muss eine Fallunterscheidung für $x \leq 0$ vorgenommen werden.

(c) Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen v mit Verteilungsdichtefunktion $f_v(x)$ ist folgendermaßen definiert:

$$E\{v\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_v(x) dx = m_v$$

In diesem Fall gibt es mindestens drei unterschiedliche Lösungswege beim Bestimmen des Integrals

- (i) Einsetzen und losrechnen.
- (ii) Den Integranden genauer anschauen und erkennen, dass $f_v(x) = f_v(-x)$ eine gerade, x eine ungerade Funktion ist. Was bedeutet das für das Ergebnis der Integration?
- (iii) Ähnlich zu (ii): den Graphen zu $f_v(x)$ betrachten und erkennen, dass die Zufallsvariable für positive und negative Werte identisch verteilt ist.

Für die Varianz der Zufallsvariablen v gilt

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= E\{(v - E\{v\})^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 f_v(x) dx. \end{aligned}$$

Um dieses Integral zu lösen, können Symmetrien von $f_v(x)$ genutzt werden. Außerdem hilft zweimaliges, partielles Integrieren oder eine Integraltabelle.

(d) Die charakteristische Funktion ist definiert als

$$C(\omega) = E\{e^{j\omega v}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_v(x) e^{+j\omega x} dx.$$

Dies kann auch als „Fouriertransformation der Verteilungsdichtefunktion mit falschem Vorzeichen im Exponenten“ angesehen werden – oder als „inverse Fouriertransformation der Verteilungsdichtefunktion, wobei der Faktor $1/2\pi$ fehlt“.

(e) Über das Momententheorem zuerst den Mittelwert m_v (erstes Moment) und dann

die Varianz σ_v^2 (zweites zentrales Moment) bestimmen.

8.2 Ergebnis

(a) Es muss $\alpha > 0$ gelten.

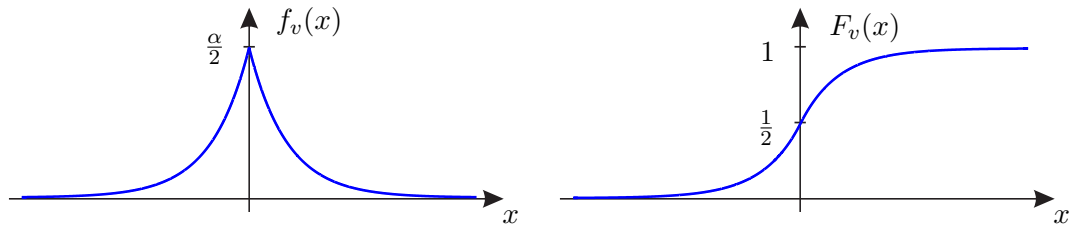


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_v(x)$ und Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$ der Laplace-Verteilung zu Aufgabe 8.

(b) Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion ergibt sich

$$F_v(x) = \frac{1}{2} e^{\alpha x} + \delta_{-1}(x) \left(-\frac{1}{2} e^{\alpha x} + 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha x} \right)$$

(c) Für Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable v gilt:

$$E\{v\} = m_v = 0 \quad \sigma_v^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

(d) Die charakteristische Funktion ist

$$C_v(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

(e) Ja, es klappt. Ergebnis siehe (c).

9 Stationarität und Ergodizität

In dieser Aufgabe werden wichtige Grundbegriffe zur Beschreibung von Zufallsprozessen wiederholt. Die folgenden Fragen sollen auf einige Versuche mit MATLAB hinführen.

- (a) Zwei bedeutende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind die Gleichverteilung und die Normalverteilung (auch Gaußverteilung genannt). Geben Sie jeweils die Verteilungsdichtefunktionen an und skizzieren Sie diese.
- (b) Was bedeutet Stationarität?
- (c) Was bedeutet Ergodizität?
- (d) Gegeben seien N Werte $v(n)$ der Realisierung eines Zufallsprozesses. Wie können Schätzwerte \hat{m}_v und $\hat{\sigma}_v^2$ für Mittelwert und Varianz des Prozesses bestimmt werden?

9.1 Lösungsansatz

- (a) In den Vorlesungsfolien nachschlagen.
- (b) In den Vorlesungsfolien nachschlagen.
- (c) In den Vorlesungsfolien nachschlagen.
- (d) In den Vorlesungsfolien nachschlagen.

9.2 Ergebnis

- (a) Bei stationären Prozessen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte in allen Beobachtungszeitpunkten gleich, d.h.

$$f_v(x, t) = f_v(x) \quad \text{bzw.} \quad f_v(x, n) = f_v(x).$$

Daraus folgt, dass alle Momente

$$E \{v^k\} = m_v^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_v(x) dx$$

ebenfalls zeitunabhängig sind (auch für diskrete Zufallsvariablen). Gleiches gilt für die zentralen Momente.

- (b) Bei ergodischen Zufallsprozessen stimmen die Zeitmittelwerte mit den Scharmittelwerten überein. Stationarität ist Voraussetzung für Ergodizität.

Seien K Realisierungen $v_k(n)$ eines Zufallsprozesses mit jeweils N Stützstellen gegeben, gilt für den

$$\text{Zeitmittelwert für Realisierung } k \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_k(n)$$

$$\text{Scharmittelwert zum Zeitpunkt } n_0 \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K v_k(n_0).$$

- (c) **Gleichverteilung**

$$\text{Verteilungsdichtefunktion} \quad f_{vg}(v) = \begin{cases} \frac{1}{v_{\max} - v_{\min}}, & v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Mittelwert:} \quad m_{vg} = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}$$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma_{vg}^2 = \frac{1}{12} (v_{\max} - v_{\min})^2$$

Normalverteilung

$$\text{Verteilungsdichtefunktion:} \quad f_{vn}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{vn}} e^{-\frac{(v-m_{vn})^2}{2\sigma_{vn}^2}}$$

Mittelwert: m_{vn} kann direkt aus $f_{vn}(v)$ abgelesen werden

Varianz: σ_{vn}^2 kann direkt aus $f_{vn}(v)$ abgelesen werden

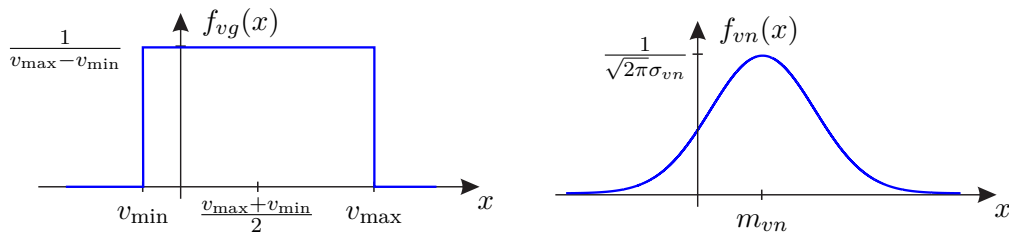


Abbildung 9: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{vg}(x)$ der Gleichverteilung und $f_{vn}(x)$ der Normalverteilung zu Aufgabe 9.

(d) Schätzungen für Mittelwert und Varianz des beobachteten Zufallsprozesses sind

$$\hat{m}_v = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v(n)$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v(n) - \hat{m}_v)^2$$

Je länger die Beobachtung ist, also je größer N , desto genauer („besser“) wird die Schätzung. Die Varianz wird manchmal auch auf $\frac{1}{N-1}$ normiert - bei großen N fällt dies jedoch kaum ins Gewicht.

10 Kreuz- und Autokorrelation

In dieser Aufgabe werden einige Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) bzw. -folge und der Autokorrelationsfunktion (AKF) bzw. -folge untersucht.

(a) Zeigen Sie, dass für die KKF gilt

$$s_{v_1 v_2}(\kappa) = s_{v_2 v_1}^*(-\kappa).$$

Was folgt daraus für die KKF der reellen Signale $v_1(n)$, $v_2(n)$? Wie kann dieser Zusammenhang auf die AKF eines reellen Signals übertragen werden?

(b) Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zufallsvariablen v_1 und v_2 die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$[\mathbb{E}\{v_1 v_2\}]^2 \leq \mathbb{E}\{v_1^2\} \mathbb{E}\{v_2^2\}.$$

Was folgt daraus für die AKF eines reellen Signals?

(c) Wie lassen sich die in (a) und (b) für diskrete Signale erzielten Ergebnisse auf die KKF bzw. AKF von kontinuierlichen Signalen übertragen?

(d) Das Leistungsdichtespektrum $S_{vv}(j\omega)$ ist die Fouriertransformierte der AKF $s_{vv}(\tau)$. Zeigen Sie, dass für $\forall \omega \in \mathbb{R}$ gilt: $S_{vv}(j\omega) \geq 0$.

10.1 Lösungsansatz

Die Kreuzkorrelierte zweier stationärer, diskreter Zufallsprozesse $v_1(n)$ und $v_2(n)$ ist als der Erwartungswert

$$s_{v_1 v_2}(\kappa) = \mathbb{E}\{v_1(n) v_2^*(n + \kappa)\}$$

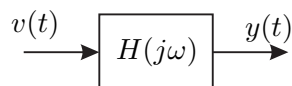
definiert.

- (a) Die Kreuzkorrelierte $s_{v_2 v_1}^*(\kappa)$ durch den Erwartungswert ausdrücken und umformen.
(b) Da der Erwartungswert einer quadrierten Zahl positiv ist, gilt die Aussage

$$\mathbb{E}\{(a v_1 - v_2)^2\} \geq 0$$

für beliebige Parameter a . Durch geschickte Wahl von a lässt sich die Cauchy-Schwartz-Ungleichung ableiten.

- (c) Gleicher Ansatz wie in Aufgabenteil (a) und (b).
(d) Der Beweis kann geführt werden, indem man ein Bandpassfilter $H(j\omega)$ annimmt, über das das Signal $v(t)$ übertragen werden soll.



Welche Eigenschaft weißt die AKF $s_{yy}(\tau)$ für $\tau = 0$ auf? Wie ist das Leistungsdichtespektrum $S_{yy}(j\omega)$ bestimmt? Beide Informationen können unter der Annahme, dass das Bandpassfilter sehr schmalbandig sei, zu der Schlussfolgerung $S_{vv}(j\omega) \geq 0$ kombiniert werden.

10.2 Ergebnis

- (a) Für die Kreuzkorrelierte gilt

$$\begin{aligned} s_{v_2 v_1}^*(-\kappa) &= \left[\mathbb{E}\{v_2(n) v_1^*(n - \kappa)\} \right]^* && | \quad m = n - \kappa \\ &= \left[\mathbb{E}\{v_2(m + \kappa) v_1^*(m)\} \right]^* \\ &= \mathbb{E}\{v_1(m) v_2^*(m + \kappa)\} \\ &= s_{v_1 v_2}(\kappa). \end{aligned}$$

Die komplexe Konjugation hat keine Auswirkung auf reellwertige Signale, daher gilt

$$s_{v_1 v_2}(\kappa) = s_{v_1 v_2}(-\kappa).$$

Für die Autokorrelation, also den Fall $v_1(n) = v_2(n) = v(n)$, gilt

$$s_{vv}(\kappa) = s_{vv}(-\kappa).$$

(b) Mit dem Lösungsansatz ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ (a v_1 - v_2)^2 \right\} &\geq 0 \\ a^2 \mathbb{E} \left\{ v_1^2 \right\} - 2a \mathbb{E} \left\{ v_1 v_2 \right\} + \mathbb{E} \left\{ v_2^2 \right\} &\geq 0 \quad \left| \quad a = \frac{\mathbb{E} \left\{ v_1 v_2 \right\}}{\mathbb{E} \left\{ v_1^2 \right\}} \right. \\ \frac{[\mathbb{E} \left\{ v_1 v_2 \right\}]^2}{\mathbb{E} \left\{ v_1^2 \right\}} - 2 \frac{[\mathbb{E} \left\{ v_1 v_2 \right\}]^2}{\mathbb{E} \left\{ v_1^2 \right\}} + \mathbb{E} \left\{ v_2^2 \right\} &\geq 0 \\ \mathbb{E} \left\{ v_2^2 \right\} &\geq \frac{[\mathbb{E} \left\{ v_1 v_2 \right\}]^2}{\mathbb{E} \left\{ v_1^2 \right\}} \\ \mathbb{E} \left\{ v_1^2 \right\} \cdot \mathbb{E} \left\{ v_2^2 \right\} &\geq [\mathbb{E} \left\{ v_1 v_2 \right\}]^2 \end{aligned}$$

Für die Autokorrelierte gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{[\mathbb{E} \left\{ v(n)v(n+\kappa) \right\}]^2}_{s_{vv}(\kappa)} &\leq \underbrace{\mathbb{E} \left\{ v^2(n) \right\}}_{s_{vv}(0)} \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left\{ v^2(n+\kappa) \right\}}_{s_{vv}(0)} \\ s_{vv}^2(0) &\geq s_{vv}^2(\kappa) \\ \Rightarrow s_{vv}(0) &\geq |s_{vv}(\kappa)| \end{aligned}$$

(c) Die Ergebnisse lassen sich direkt auf kontinuierliche Signale übertragen. Es muss nur n durch t und κ durch τ ersetzt werden.

(d) Für die AKF des Ausgangssignals des Bandpassfilters aus dem Lösungsansatz sowie das Leistungsdichtespektrum gilt

$$\begin{aligned} s_{yy}(0) &= \mathbb{E} \left\{ y_2^2 \right\} \geq 0 \\ S_{yy}(j\omega) &= \mathcal{F} \left\{ s_{yy}(\tau) \right\} = |H(j\omega)|^2 S_{vv}(j\omega) \\ s_{yy}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ S_{yy}(j\omega) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

Für $\tau = 0$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} s_{yy}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(j\omega) \underbrace{e^{j\omega 0}}_{=1} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_{vv}(j\omega) d\omega \end{aligned}$$

Annahme: $H(j\omega)$ sei ein sehr schmalbandiges Bandpassfilter

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 - \varepsilon < \omega < \omega_0 + \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$, so dass $S_{vv}(j\omega)$ im Durchlassbereich um die Frequenz ω_0 annähernd

konstant ist. Damit lässt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} s_{yy}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon} |H(j\omega)|^2 S_{vv}(j\omega) d\omega \\ &\approx \frac{S_{vv}(j\omega_0)}{2\pi} \int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon} 1 d\omega \\ &= \frac{S_{vv}(j\omega_0)}{2\pi} \cdot 2\varepsilon \geq 0 \end{aligned}$$

Da dies für alle ω_0 gilt: $S_{vv}(j\omega) \geq 0$.

11 Stochastische Signale und lineare Systeme

Ein Nutzsignal $x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$ ist additiv durch mittelwertfreies weißes Rauschen $z(t)$ mit der Varianz σ_z^2 gestört, so dass nur das Signal

$$v(t) = x(t) + z(t)$$

gemessen werden kann. Dieses Signal $v(t)$ soll mit einem System mit dem Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \text{mit } \alpha > 0$$

gefiltert werden, um so das Signal $y(t)$ zu erhalten.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert des gefilterten Signals $y(t)$.
- (b) Geben Sie das Verhältnis von Nutz- zu Störleistung (SNR) am Filterausgang an.
- (c) Für welche Wahl von α wird das SNR maximal?

11.1 Lösungsansatz

(a) Zur Berechnung des Erwartungswertes können die folgenden Schritte hilfreich sein:

- Für das Signal $y(t)$ gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= v(t) * \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} \\ &= x(t) * h(t) + z(t) * h(t) \\ &= s(t) + n(t). \end{aligned}$$

Dabei seien $s(t)$ das Nutzsignal und $n(t)$ das Störsignal oder Rauschsignal ($n(t)$ von englisch *noise*). Werden beide Signalanteile als unkorreliert angenommen, können die Erwartungswerte getrennt bestimmt werden:

$$E\{y(t)\} = E\{s(t) + n(t)\} = E\{s(t)\} + E\{n(t)\}.$$

- Bestimmung von $E\{n(t)\}$: Ausnutzen, dass $z(t)$ mittelwertfrei ist.

- Bestimmung von $E\{s(t)\}$: Wie reagiert das System $H(j\omega)$ auf das Eingangssignal $x(t)$? Da $x(t)$ monofrequent ist (Spektralanteile nur bei der Frequenz ω_0), ist eine Lösung ohne Berechnung von $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ oder $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$ möglich. Dazu muss $H(j\omega)$ in Betrag und Phase aufgespalten werden.

(b) Das Verhältnis von Nutz- zu Störleistung (*signal to noise ratio*) ist folgendermaßen definiert:

$$SNR = \frac{\text{Leistung des Nutzsignals}}{\text{Leistung des Störsignals}} = \frac{P_s}{P_n}$$

- Die Nutzsingalleistung kann durch Integration über eine beliebige Signalperiode T berechnet werden:

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt$$

- Die Störsingalleistung ist gleich der Autokorrelationsfunktion an der Stelle $\tau = 0$:

$$P_n = s_{nn}(\tau)|_{\tau=0} = \mathcal{F}^{-1}\{S_{nn}(j\omega)\}|_{\tau=0}.$$

Das benötigte Geräuschleistungsdichtespektrum ist bekannt, da es durch Filterung aus dem *weißen* Rauschsignal $z(t)$ mit der Varianz σ_z^2 generiert wird. Es gilt:

$$S_{nn}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{zz}(j\omega).$$

Bei der Berechnung der inversen Fourier-Transformation hilft das Integral

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

(c) Der in (b) berechnete Ausdruck für den SNR hängt von dem Filterparameter α ab. Durch Ableiten dieses Ausdrucks kann das Maximum gefunden werden.

Zusatzfrage: Durch welchen anderen Filtertyp könnte ein noch besseres SNR erreicht werden? Abbildung 10 zeigt das Filter $H(j\omega)$ für verschiedene Werte von α .

11.2 Ergebnis

$$(a) E\{y(t)\} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)\right) = \hat{s} \cos(\omega_0 t - \varphi_s)$$

$$(b) SNR = \frac{\alpha^2}{\sigma_z^2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$$

$$(c) \alpha = \omega_0$$

Zur Optimierung des SNR wäre ein Bandpassfilter mit Mittenfrequenz ω_0 noch besser geeignet, als das hier verwendete Tiefpassfilter.

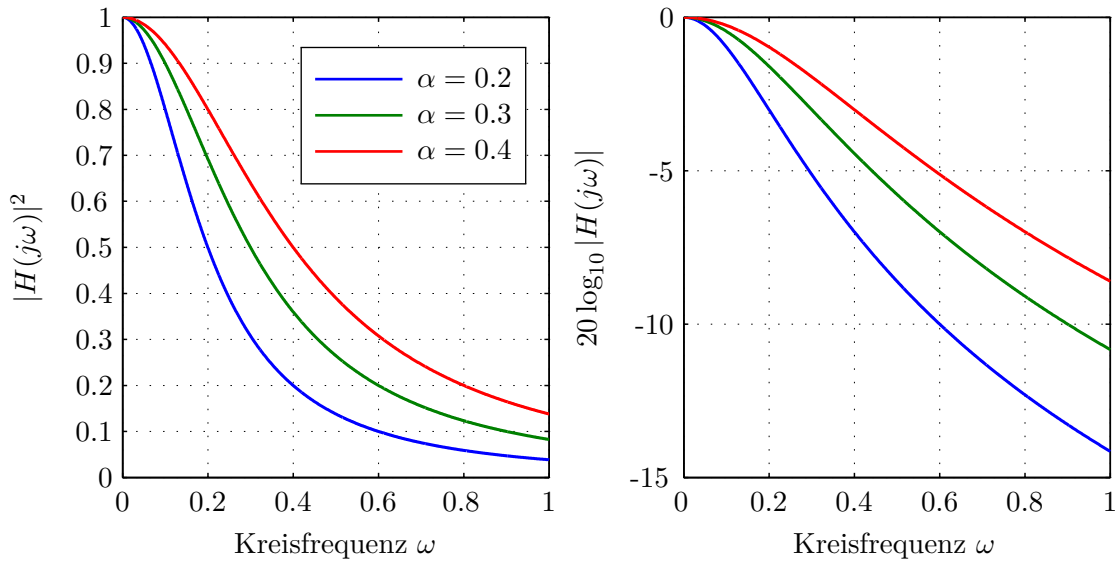


Abbildung 10: Übertragungsfunktion $\tilde{H}(j\omega) = \alpha H(j\omega)$ aus Aufgabe 11 in linearer und logarithmischer Darstellung. Durch die Multiplikation mit α wird die Übertragungsfunktion auf $\tilde{H}(j0) = 1$ normiert.

12 Autokorrelation und lineare Systeme

Die Autokorrelierte $s_{vv}(\kappa)$ einer Zufallsfolge $v(n)$ sei für $\kappa \geq 0$ durch

$$s_{vv}(\kappa) = \left(\frac{1}{2}\right)^\kappa, \quad \kappa \geq 0$$

gegeben.

- Geben Sie $s_{vv}(\kappa)$ für $\kappa \leq 0$ an.
- Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von $v(n)$.
- Berechnen Sie die z-Transformierte $S_{vv}(z)$ von $s_{vv}(\kappa)$.
- Die Folge $v(n)$ werde auf ein System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z+2}{z+\frac{1}{2}}$$

gegeben. Geben Sie $S_{yy}(z)$ und $s_{yy}(\kappa)$ an.

12.1 Lösungsansatz

- In Aufgabe 10 wurde bereits gezeigt, dass für die Autokorrelationsfolge der Zusammenhang

$$s_{vv}(-\kappa) = s_{vv}^*(\kappa)$$

gilt. Dies kann hier angewendet werden.

- (b) Die Autokorrelationsfolge kann über die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte bestimmt werden:

$$s_{vv}(\kappa) = \mathbb{E} \left\{ \underbrace{v(n)}_{v_1} \underbrace{v(n+\kappa)}_{v_2} \right\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{vv}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2.$$

Unter der Annahme, dass die beiden Zufallsvariablen $v_1 = v(n)$ und $v_2 = v(n + \kappa)$ für $\kappa \rightarrow \infty$ statistisch unabhängig sind, ist die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte separierbar. Damit lassen sich die beiden Integrale getrennt berechnen und man erhält

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} s_{vv}(\kappa) = m_v^2,$$

wovon nun nur noch der Grenzwert bestimmt werden muss.

Die Varianz wird über den Ansatz

$$\sigma_v^2 = \mathbb{E} \left\{ (v - \mathbb{E}\{v\})^2 \right\}$$

berechnet.

- (c) Die Autokorrelationsfolge in die Definition der z-Transformation

$$S_{vv}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{vv}(\kappa) z^{-n}$$

einsetzen und die Summe in die beiden Summen $\sum_{n=-\infty}^0$ und $\sum_{n=0}^{\infty}$ aufspalten. Diese so umformen, dass die geometrische Reihe angewendet werden kann. Wie lautet der Konvergenzbereich für die z-Transformierte $S_{vv}(z)$?

- (d) Für die z-Transformierte der Autokorrelationsfolge des Ausgangssignals des Filters $H(z)$ gilt

$$S_{yy}(z) = S_{vv}(z) H(z) H^* \left(\frac{1}{z^*} \right).$$

Das gegebene $H(z)$ einsetzen und vereinfachen.

12.2 Ergebnis

(a) $s_{vv} = \left(\frac{1}{2} \right)^{|\kappa|}$

(b) Mittelwert $m_v = 0$
Varianz $\sigma_v^2 = 1$

(c) $S_{vv}(z) = \frac{3z}{(2-z)(2z-1)}$
Konvergenzbereich: $\frac{1}{2} < |z| < 2$

(d) $S_{yy}(z) = 4 S_{vv}(z) \bullet \text{---} \circ s_{yy}(\kappa) = 4 s_{vv}(\kappa)$

13 Idealisierte Systeme

Gegeben ist ein einseitiger idealer Bandpass mit der Mittenfrequenz ω_m , einer Bandbreite von $2\Delta\omega$ und einer linearen Phase von $(-\omega t_0)$.

- (a) Wie lautet der Frequenzgang $H^{(1)}(j\omega)$ dieses Bandpasses?
- (b) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0^{(1)}(t)$ dieses Bandpasses.
- (c) Wie lautet der Frequenzgang $H^{(2)}(j\omega)$ eines entsprechenden zweiseitigen Bandpasses?
- (d) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0^{(2)}(t)$ des zweiseitigen Bandpasses

13.1 Lösungsansatz

- (a) Bei idealen Filtern wird angenommen, dass sie im Durchlassbereich den Betrag $|H(j\omega)| = 1$ und im Sperrbereich $|H(j\omega)| = 0$ haben. Die Phase ist in der Aufgabenstellung gegeben.
- (b) Die Impulsantwort ist als inverse Fourier-Transformation der Übertragungsfunktion definiert:

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(j\omega)\}.$$

Sie kann mit Hilfe der Korrespondenz für die Rechteckfunktion sowie Verschiebungs- und Modulationsatz bestimmt werden.

- (c) Gleiche Vorgehensweise wie in (a).
- (d) Gleiche Vorgehensweise wie in (b).

13.2 Ergebnis

$$(a) H^{(1)}(j\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0}, & \text{für } \omega_m - \Delta\omega < \omega < \omega_m + \Delta\omega \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = r_{\Delta\omega}(\omega - \omega_m) e^{-j\omega t_0}$$

$$(b) h_0^{(1)}(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \text{si}(\Delta\omega(t - t_0)) e^{j\omega_m(t - t_0)}$$

$$(c) H^{(2)}(j\omega) = [r_{\Delta\omega}(\omega + \omega_m) + r_{\Delta\omega}(\omega - \omega_m)] e^{-j\omega t_0}$$

$$(d) h_0^{(2)}(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \text{si}(\Delta\omega(t - t_0)) 2 \cos(\omega_m(t - t_0))$$

14 Idealisierte Systeme

Betrachtet wird ein linearphasiges System $S^{(1)}$ mit einer kosinusförmigen Betragsschwankung:

$$H^{(1)}(j\omega) = H_0 (1 + \alpha \cos(\omega\tau)) e^{-j\omega t_0}.$$

- (a) Wie lautet die Impulsantwort des Systems $S^{(1)}$?

- (b) Das Ausgangssignal von $S^{(1)}$ wird mit Hilfe eines idealen Tiefpassfilters $S^{(2)}$ mit der Grenzfrequenz ω_g bandbegrenzt. Geben sie die Impulsantwort der Kaskade aus $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ an.

14.1 Lösungsansatz

- (a) Den cos-Term vor der Rücktransformation mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$\cos(\omega\tau) = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau} \right)$$

durch zwei Exponentialfunktionen darstellen und die Klammer ausmultiplizieren. Danach kann die inverse Fouriertransformation einfach mit Hilfe des Verschiebungssatzes bestimmt werden.

- (b) Für den Frequenzgang des idealen Tiefpassfilters gilt

$$H^{(2)}(j\omega) = r_{\omega_g}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_g \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die gesuchte Gesamtimpulsantwort für das kaskadierte System kann nun entweder im Frequenz- oder Zeitbereich berechnet werden

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ H^{(1)}(j\omega) \cdot H^{(2)}(j\omega) \right\} \\ &= h_0^{(1)}(t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ H^{(2)}(j\omega) \right\}. \end{aligned}$$

14.2 Ergebnis

$$(a) h_0^{(1)}(t) = H_0 \left[\delta_0(t - t_0) + \frac{\alpha}{2} \delta_0(t - t_0 + \tau) + \frac{\alpha}{2} \delta_0(t - t_0 - \tau) \right]$$

$$(b) h_0(t) = \frac{H_0 \omega_g}{\pi} \left[\text{si}(\omega_g(t - t_0)) + \frac{\alpha}{2} \text{si}(\omega_g(t - t_0 + \tau)) + \frac{\alpha}{2} \text{si}(\omega_g(t - t_0 - \tau)) \right]$$

15 Filterung und Autokorrelation

Diese Aufgabe wiederholt einige Grundbegriffe zur Autokorrelation und soll auf einen kleinen Versuch mit MATLAB vorbereiten.

Gegeben sei das Signal $v(n)$ als weißes Rauschen mit Mittelwert $m_v = 0$. Dieses soll mit einem schmalbandigen Bandpassfilter $H(z)$ gefiltert werden, um so das Ausgangssignal $y(n)$ zu erhalten.

- (a) Durch welche Differenzengleichung kann die Bandpassfilterung beschrieben werden? Geben Sie auch die Übertragungsfunktion $H(z)$ in allgemeiner Form an.
- (b) Wie ist die Autokorrelationsfolge $s_{vv}(\kappa)$ für stationäre Signale definiert? Wie kann sie geschätzt werden, wenn für $v(n)$ eine Messung vorliegt? Worin unterscheiden sich

die Autokorrelation $s_{vv}(\kappa)$ und die Autokovarianz $\psi_{vv}(\kappa)$?

- (c) Skizzieren Sie $s_{vv}(\kappa)$. Welche Unterschiede erwarten Sie für die Autokorrelationsfolge $s_{yy}(\kappa)$ nach der Filterung?

15.1 Lösungsansatz

- (a) Mit der Differenzgleichung

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i v(n-i) - \sum_{i=1}^{M-1} a_i y(n-i)$$

kann bei ausreichenden Filterordnungen N und M ein beliebiges LTI-System beschrieben werden, wobei $v(n)$ das Eingangs- und $y(n)$ das Ausgangssignal des Systems ist. Je nach Wahl der Filterkoeffizienten a_i und b_i können verschiedene Filtertypen, wie z.B. Hochpass, Tiefpass oder Bandpass, realisiert werden. Diese Filterstruktur wird auch als *infinite impulse response* (IIR) Filter bezeichnet, weil das Ausgangssignal wieder zurückgekoppelt wird und somit unendlich lange Impulsantworten realisiert werden können.

Für die Übertragungsfunktion gilt

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M-1} a_i z^{-i}},$$

wobei $a_0 = 1$ ist.

- (b) Für stationäre Folgen ist die Autokorrelationsfolge durch

$$s_{vv}(\kappa) = \mathbb{E} \{v(n)v(n+\kappa)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{vv}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2$$

definiert und kann aus beobachteten Daten durch

$$\hat{s}_{vv}(\kappa) = \langle v(n)v(n+\kappa) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N v(n)v(n+\kappa) \right\}$$

geschätzt werden. Die Autokovarianz ist zusätzlich mittelwertbereinigt

$$\begin{aligned} \psi_{vv}(\kappa) &= \mathbb{E} \{ (v(n) - m_v)(v(n+\kappa) - m_v) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_1 - m_v)(v_2 - m_v) f_{vv}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2 \\ &= s_{vv}(\kappa) - m_v^2. \end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen, wurden in den Integralen die Abkürzungen $v(n) = v_1$ und $v(n+\kappa) = v_2$ verwendet. Dabei ist anzumerken, dass die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{vv}(v_1, v_2, \kappa)$ nicht vom absoluten Zeitpunkt n abhängt, sondern nur von der Zeit κ zwischen den beiden Zufallsvariablen v_1 und v_2 .

(c) Da $v(n)$ weißes Rauschen ist, gilt

$$s_{vv}(\kappa) = \sigma_s^2 \gamma_0(\kappa).$$

Durch die Filterung werden benachbarte Signalabtastwerte korreliert. Folglich wird auch die Autokorrelationsfolge „verschmiert“, das heißt, sie wird nun für $\kappa \neq 0$ von 0 verschiedene Funktionswerte aufweisen.

15.2 Ergebnis

(a) Differenzgleichung: $y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i v(n-i) - \sum_{i=1}^{M-1} a_i y(n-i)$

Übertragungsfunktion: $H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M-1} a_i z^{-i}}$ mit $a_0 = 1$

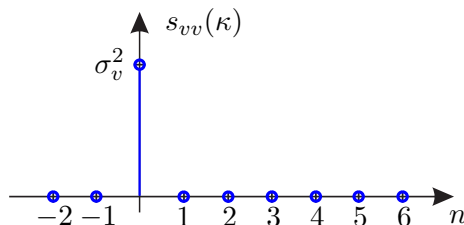
(b) Autokorrelationsfolge: $s_{vv}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{vv}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2$

Schätzwert für die Autokorrelationsfolge: $\hat{s}_{vv}(\kappa) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N v(n)v(n+\kappa) \right\}$

Autokovarianzfolge: $\psi_{vv}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_1 - m_v)(v_2 - m_v) f_{vv}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2$

Dabei gilt $v(n) = v_1$ und $v(n + \kappa) = v_2$.

(c) Autokorrelationsfolge:



16 Hilbert-Transformation und Einseitenbandmodulation

In dieser Aufgabe werden zuerst Grundlagen zur Hilbert-Transformation wiederholt und anschließend eine Anwendungsmöglichkeit untersucht.

- (a) Wie ist die Hilbert-Transformation definiert? Geben Sie sowohl Frequenzgang als auch Impulsantwort an. Was ist unter dem *analytischen Signal* $v_a(t)$ zu verstehen?
- (b) Ist der Hilbert-Transformator kausal? Ist er bandbegrenzt?
- (c) Geben Sie eine Realisierung der idealen Einseitenbandmodulation mit Hilfe des Hilbert-Transformators als Blockschaltbild an. Verwenden Sie dabei die Definition

der Einseitenbandmodulation.

- (d) Ist das resultierende System aus (c) kausal und bandbegrenzt? Wenn nicht, modifizieren Sie das System so, dass es kausal und bandbegrenzt wird.

16.1 Lösungsansatz

- (a) Der Frequenzgang des Hilbert-Transformators ist durch

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H_0(j\omega) e^{-j\omega t_0} \\ &= -j \operatorname{sign}(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

definiert. Oft wird dabei die Verzögerung $t_0 = 0$ gesetzt, so dass

$$H(j\omega) = H_0(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega)$$

gilt. Teilt man den Frequenzgang in Betrag und Phase auf wird klar, warum der Hilbert-Transformator manchmal auch als 90° -Phasendreher bezeichnet wird.

Für die Impulsantwort des Hilbert-Transformators mit $t_0 = 0$ gilt

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H_0(j\omega)\} = \begin{cases} \frac{1}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Die Filterung mit einem Hilbert-Transformator lässt sich also im Zeit- und Frequenzbereich folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v(t) * h_0(t) = \mathcal{H} \{v(t)\} \\ &\quad \downarrow \\ \tilde{V}(j\omega) &= V(j\omega) \cdot H(j\omega) \\ &= -V(j\omega) \cdot j \cdot \operatorname{sign}(\omega) \\ &= \operatorname{Im} \{ \operatorname{sign}(\omega) V(j\omega) \} + j \operatorname{Re} \{ -\operatorname{sign}(\omega) V(j\omega) \} \\ &= \operatorname{Re} \{ \tilde{V}(j\omega) \} + j \operatorname{Im} \{ \tilde{V}(j\omega) \} \end{aligned}$$

Realteil und Imaginärteil des Spektrums werden also durch die Hilbert-Transformation „ausgetauscht“, was zur Bildung des *analytischen* Signals

$$v_a(t) = v(t) + \mathcal{H} \{v(t)\} = v(t) + \tilde{v}(t)$$

ausgenutzt werden kann. Das Besondere daran ist, dass es ein einseitiges Spektrum

$$V_a(j\omega) = \begin{cases} 2V(j\omega), & \omega > 0 \\ V(j\omega), & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

besitzt. Man beachte in den obigen Betrachtungen außerdem die verwendete Nota-

tion mit $\tilde{\cdot}$ und $\mathcal{H}\{\cdot\}$ zur Beschreibung der Hilbert-Transformation.

- (b) Der Hilbert-Transformator ist nicht kausal, da die Impulsantwort $h_0(t) \neq 0$ für $t < 0$. Der Hilbert-Transformator ist auch nicht bandbegrenzt, da $H(j\omega) \neq 0$ für alle $\omega \neq 0$.
- (c) Die Einseitenbandmodulation kann auch realisiert werden, indem mit Hilfe eines Hilbert-Transformators ein rechtsseitiges und ein linksseitiges analytisches Signal gebildet und anschließend jeweils komplex moduliert wird. Die einzelnen Schritte sind in Abbildung 11 schematisch für das Spektrum eines reellen, bandbegrenzten Signals dargestellt.

Die nötigen Signalverarbeitungsschritte

$$\begin{aligned} y(t) &= 2v(t) \cos(\omega_0 t) - 2\tilde{v}(t) \sin(\omega_0 t) \\ &= 2[v(t) \cos(\omega_0 t) - \mathcal{H}\{v(t)\} \sin(\omega_0 t)] \end{aligned}$$

sind im Blockschaltbild von Abbildung 12 dargestellt.

- (d) Das in (c) hergeleitete System ist wegen des enthaltenen Hilbert-Transformators weder kausal noch bandbegrenzt. Daher sind drei Modifikationen nötig:

1. Der Frequenzgang des Hilbert-Transformators kann einfach bandbegrenzt werden, indem man für alle Frequenzen $\omega > \omega_g$ die Übertragungsfunktion $H(j\omega) = 0$ setzt und so die Übertragungsfunktion $H_{\text{BP}}(j\omega)$ erhält, für deren Impulsantwort

$$h_{\text{BP}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\text{BP}}(j\omega)\} = \frac{1 - \cos(\omega_g t)}{\pi t}$$

gilt.

2. Die Impulsantwort $h_{\text{BP}}(t)$ ist zeitlich nicht begrenzt. Dies kann durch Multiplikation mit einer Fensterfunktion $w(t)$ erreicht werden, die außerhalb des Bereiches $t \in [-t_0, t_0]$ den Funktionswert $w(t) = 0$ hat und für gewöhnlich zu diesen Rändern hin langsam abklingt. So erhält man die Impulsantwort $h_{\text{BP},w}(t)$.
3. Um ein kausales System zu erhalten, muss die Impulsantwort aus Schritt 2 noch um die halbe Fensterlänge t_0 verzögert werden:

$$h_{\text{mod}}(t) = h_{\text{BP},w}(t - t_0).$$

Diese Impulsantwort $h_{\text{mod}}(t)$ stellt also eine kausale und bandbegrenzte Approximation des Hilbert-Transformators dar.

16.2 Ergebnis

- (a) Frequenzgang: $H(j\omega) = H_0(j\omega) e^{-j\omega t_0} = -j \text{sign}(\omega) e^{-j\omega t_0}$, oft mit $t_0 = 0$

$$\text{Impulsantwort: } h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

- (b) Der Hilbert-Transformator ist weder kausal noch bandbegrenzt.
- (c) Eine ideal einseitenbandmodulierte Signal $y(t)$ kann aus dem Eingangssignal $v(t)$

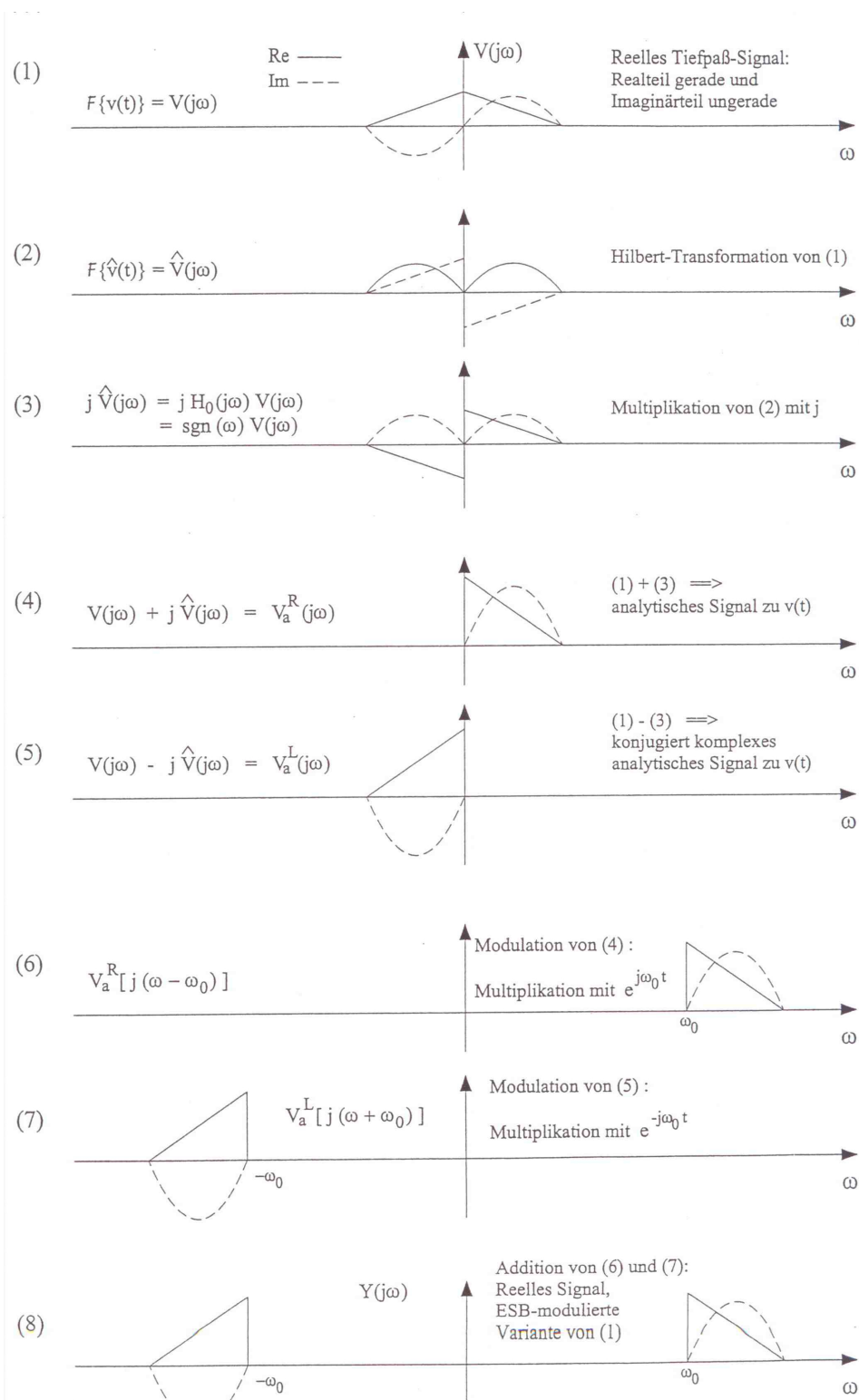


Abbildung 11: Realisierung der Einseitenbandmodulation mit Hilfe des Hilbert-Transformators in Aufgabe 16. Die Hilbert-Transformierte wird hier mit $\hat{v}(t) = \mathcal{H}\{v(t)\}$ bezeichnet.

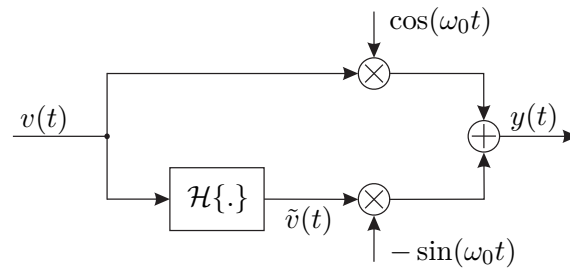


Abbildung 12: Blockschaltbild zur Realisierung der Einseitenbandmodulation mit Hilfe des Hilbert-Transformators in Aufgabe 16.

mit Hilfe eines Hilbert-Transformators durch

$$\begin{aligned} y(t) &= 2v(t) \cos(\omega_0 t) - 2\tilde{v}(t) \sin(\omega_0 t) \\ &= 2[v(t) \cos(\omega_0 t) - \mathcal{H}\{v(t)\} \sin(\omega_0 t)] \end{aligned}$$

erzeugt werden.

(d) Das System aus (c) ist weder kausal noch bandbegrenzt. Drei Modifikationen sind notwendig

1. Bandbegrenzung des Frequenzganges des Hilbert-Transformators.
2. Zeitliche Begrenzung der Impulsantwort des bandbegrenzten Hilbert-Transformators aus 1. durch Fensterung der Impulsantwort.
3. Verzögerung der durch Schritt 2 gewonnen Impulsantwort um ein kausales System zu erzeugen.