

Signale und Systeme – Modulation

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ **Modulation**
 - ❑ **Grundlagen**
 - ❑ **Lineare Modulation**
 - ❑ **Nichtlineare Modulation**
 - ❑ **Digitalisierung**
 - ❑ **Winkelmodulation**
- ❑ Systembeschreibung im Zustandsraum
- ❑ Stochastische Signale und ihre Spektren
- ❑ Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- ❑ Idealisierte Systeme
- ❑ Ergänzungen zu Spektraltransformationen



Komplexe Modulation – Teil 1

Modulation (Wiederholung):

Aus dem Vorlesungsteil über die Fourier-Transformation sind die Modulationssätze bekannt.
Folgende Korrespondenzen wurden für ...

□ ... kontinuierliche Signale gefunden:

$$v(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(j\omega),$$

$$y_c(t) = v(t) e^{j\omega_T t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(j(\omega - \omega_T)).$$

□ ... diskrete Signale gefunden:

$$v(n) \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(e^{j\Omega}),$$

$$y_c(n) = v(n) e^{j\Omega_T n} \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(e^{j(\Omega - \Omega_T)}).$$

Eine Multiplikation mit einer harmonischen Exponentiellen bewirkt eine spektrale Verschiebung um die Trägerfrequenz ω_T bzw. Ω_T . Dies wird als **Modulation** bezeichnet.

... Der Zweck dieser Operation ist die Anpassung des Signalspektrums an den Frequenzbereich des zu nutzenden Übertragungs-, Speicher- oder Verarbeitungsmediums!

Demodulation:

Will man das Signal $v(\dots)$ bzw. das Spektrum $V(\dots)$ aus dem modulierten Signal $y_c(\dots)$ bzw. Spektrum $Y_c(\dots)$ wiedergewinnen, so ist eine erneute Multiplikation mit einer harmonischen Exponentiellen notwendig. Da dieser zweite Modulationsterm mit dem ersten „synchron“ sein muss, wird diese Maßnahme auch als **Synchron-Demodulation** bezeichnet.

Für kontinuierliche Signale gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
 y_c(t) e^{-j\omega_T t} & = & v(t) e^{j(\omega_T - \omega_T)t} & = & v(t), \\
 \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow \\
 Y_c(j(\omega + \omega_T)) & = & V(j(\omega - \omega_T + \omega_T)) & = & V(j\omega).
 \end{array}$$

Für diskrete Signale gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
 y_c(n) e^{-j\Omega_T n} & = & v(n) e^{j(\Omega_T - \Omega_T)n} & = & v(n), \\
 \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow \\
 Y_c(e^{j(\Omega + \Omega_T)}) & = & V(e^{j(\Omega - \Omega_T + \Omega_T)}) & = & V(e^{j\Omega}).
 \end{array}$$

Andere Modulationsverfahren / Lineare Modulation

Andere Modulationsverfahren:

Neben den bisher beschriebenen Modulationsverfahren existieren auch andere Varianten. Hier wird dann eine Anpassung des Signals **nicht** nur bezüglich der Frequenz vorgenommen. Hierbei steht vor allem eine **Verringerung der Fehleranfälligkeit** im Vordergrund.

Lineare Modulation:

Die bisher beschriebene Modulation (siehe die beider vorigen Folien) ist **linear** im Sinne der Definition dieser Vorlesung.

... Aber sie (wie auch alle im Folgenden beschriebenen Modulationsverfahren) ist **nicht verschiebungsinvariant!**

Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) – Teil 1

Verwendung von reellen Trägersignalen:

Verwendet man anstelle von einer harmonischen Exponentiellen einen Cosinus-Modulationsterm, so entstehen folgende Signale:

□ *Kontinuierliche* Zweiseitenband-Modulation:

$$y_z(t) = v(t) \cos(\omega_T t) = v(t) \frac{1}{2} \left[e^{j\omega_T t} + e^{-j\omega_T t} \right],$$



$$Y_z(j\omega) = \frac{1}{2} \left[V(j(\omega - \omega_T)) + V(j(\omega + \omega_T)) \right].$$

□ *Diskrete* Zweiseitenband-Modulation:

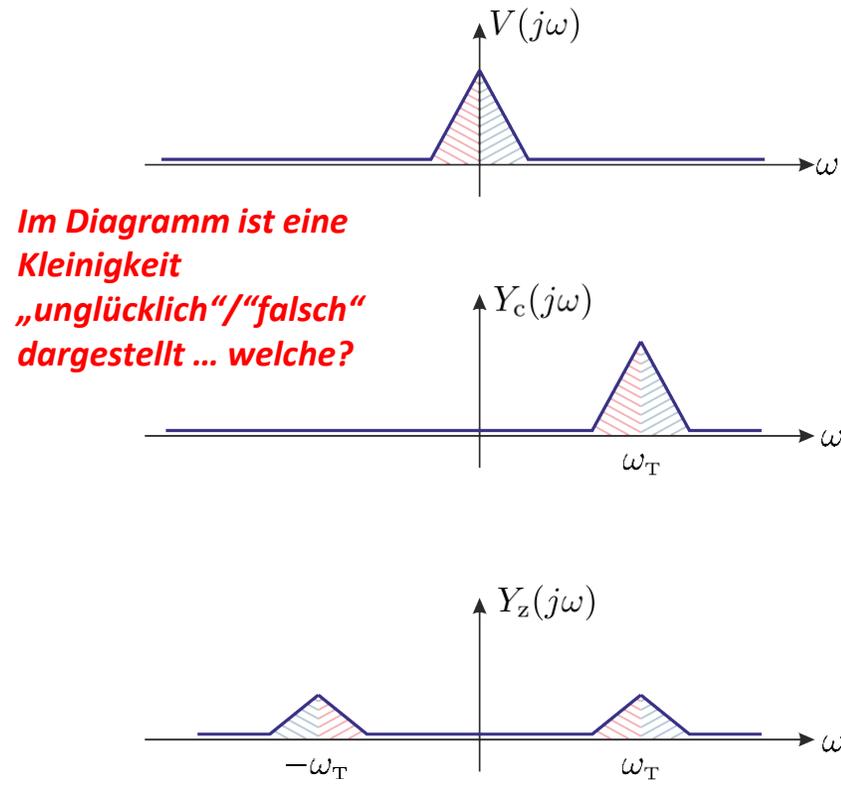
$$y_z(n) = v(n) \cos(\Omega_T n) = v(n) \frac{1}{2} \left[e^{j\Omega_T n} + e^{-j\Omega_T n} \right],$$

$$Y_z(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} \left[V(e^{j(\Omega - \Omega_T)}) + V(e^{j(\Omega + \Omega_T)}) \right].$$

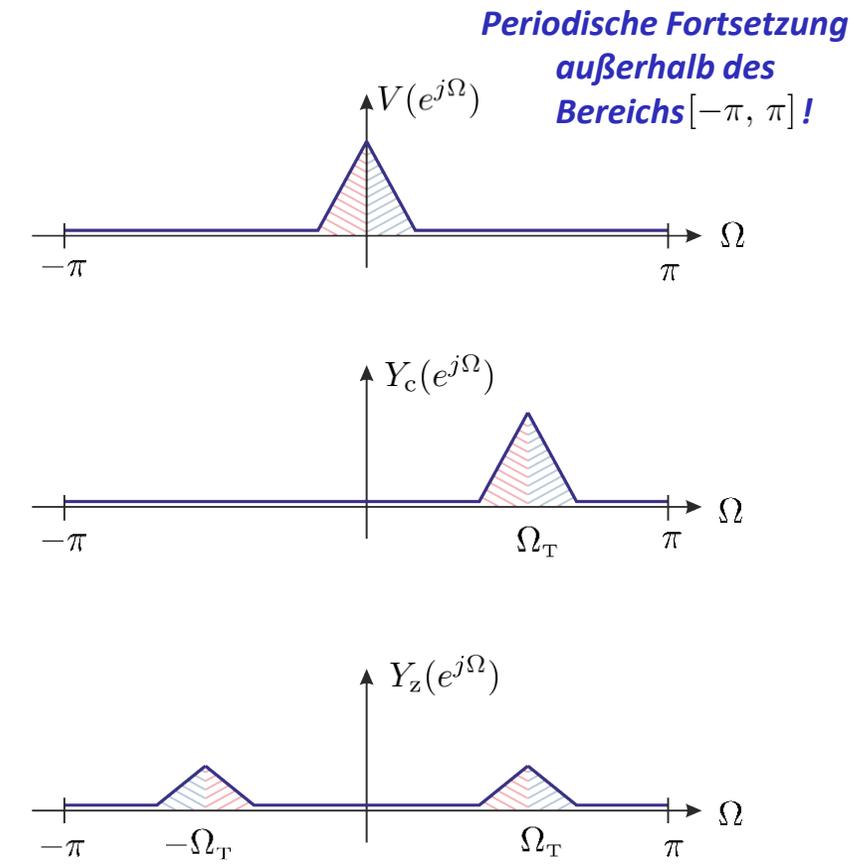
Lineare Modulationsverfahren

Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) – Teil 2

Graphische Veranschaulichung:



Im Diagramm ist eine Kleinigkeit „unglücklich“/“falsch“ dargestellt ... welche?



Periodische Fortsetzung außerhalb des Bereichs $[-\pi, \pi]$!

Offenbar ist die vollständige Information über $v(\dots)$ bzw. $V(\dots)$ in den beiden äußeren Hälften des Spektrums (= obere Seitenbänder) und in den beiden inneren Hälften (= untere Seitenbänder) enthalten.

Nachteile der Zweiseitenband-Modulation:

Die Übertragung oder auch die Speicherung beider Seitenbänder würde **Redundanz** bedeuten. Dies ist nachteilig, insbesondere bei Frequenz-Multiplex-Übertragungen, da man hier möglichst viele Nutzer (z.B. Rundfunksender oder Telefon-Benutzer) über einen begrenzten Frequenzbereich übertragen will.

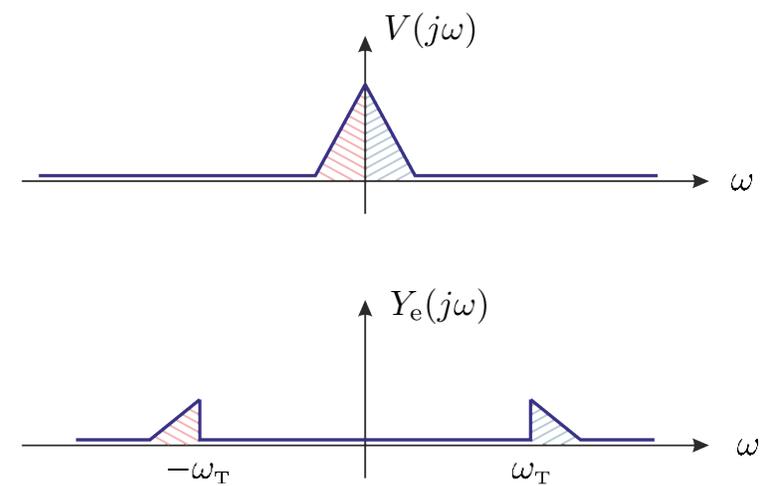
Will man die sog. **Frequenzeffizienz** erhöhen, so kann man z.B. eine Einseitenband-Modulation (dargestellt auf den nächsten Folien) verwenden.

Lineare Modulationsverfahren

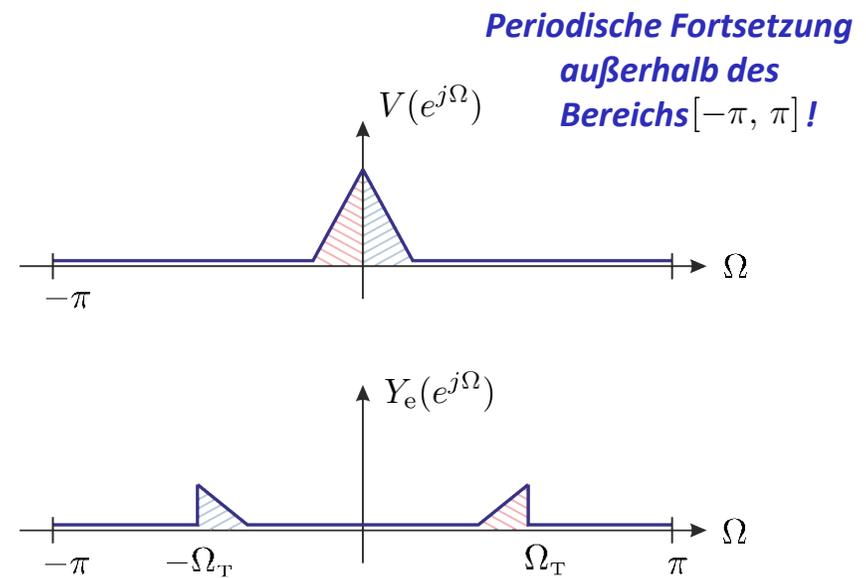
Einseitenband-Modulation (ESB-Modulation) – Teil 1

Graphische Veranschaulichung:

Bei der Einseitenband-Modulation vermeidet man die Redundanz der Zweiseitenband-Modulation, in dem man nur die oberen oder die unteren Seitenbänder moduliert. Dabei bleiben die Symmetrien von reellwertigen Signalen erhalten.



Einseitenband-Modulation unter Verwendung der oberen Seitenbänder für kontinuierliche Signale!



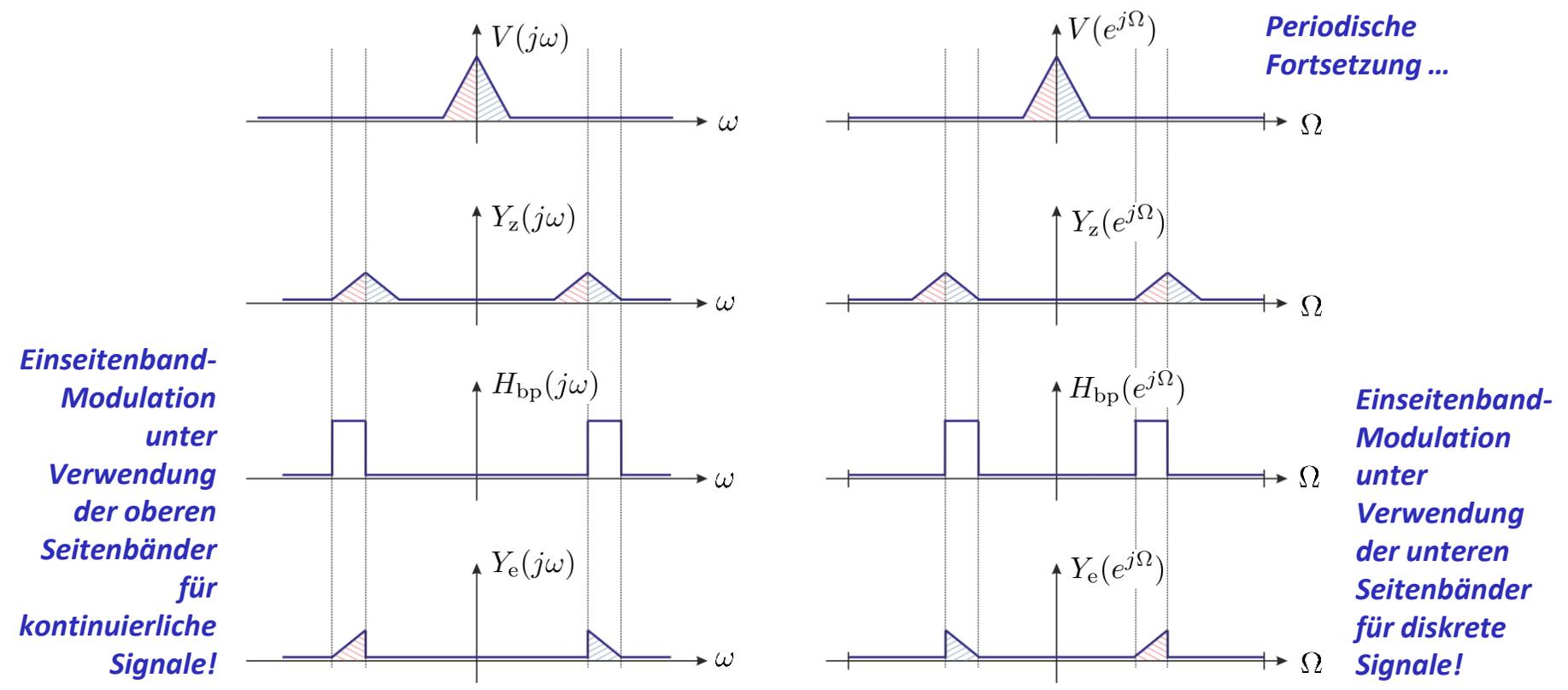
Einseitenband-Modulation unter Verwendung der unteren Seitenbänder für diskrete Signale!

Lineare Modulationsverfahren

Einseitenband-Modulation (ESB-Modulation) – Teil 2

Prinzipielle Realisierung:

Die Einseitenband-Modulation kann durch eine **Zweiseitenband-Modulation** mit einer anschließenden **idealen Bandpassfilterung** realisiert werden.



Lineare Modulationsverfahren

Amplituden-Modulation (AM) – Teil 1

„Zweiseiten-Modulation mit Träger“:

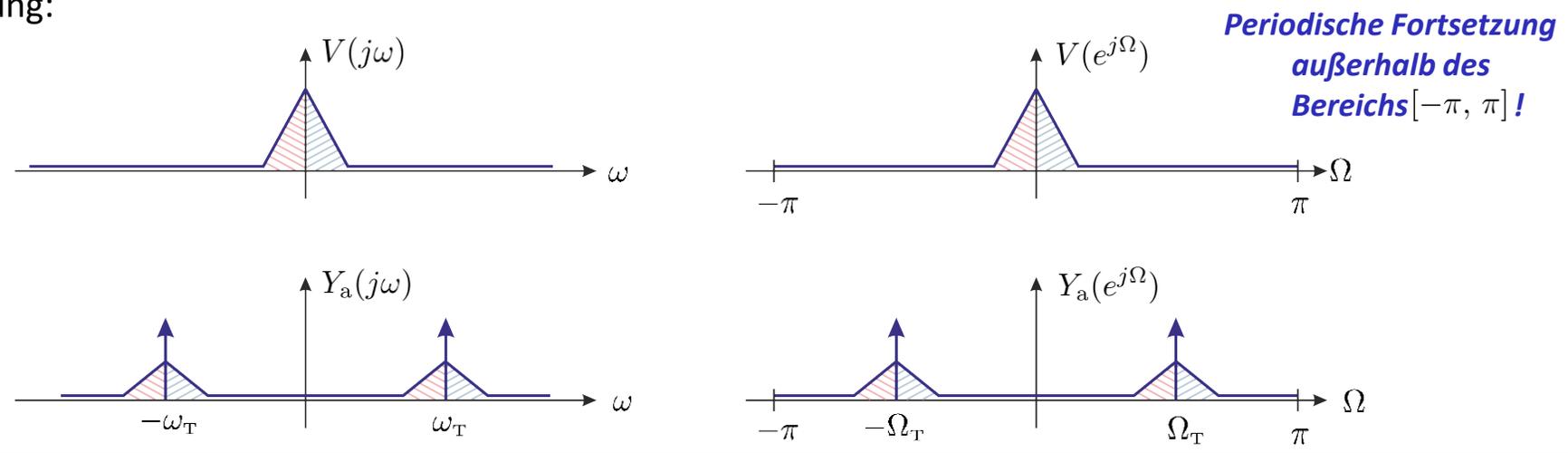
Eine Amplituden-Modulation kann als Zweiseiten-Modulation mit einer Trägerschwingung interpretiert werden. Sie wird für *kontinuierliche* Signale gemäß

$$y_a(t) = [1 + m v(t)] \cos(\omega_T t) = \cos(\omega_T t) + m \underbrace{v(t) \cos(\omega_T t)}_{= y_z(t)} = \cos(\omega_T t) + m y_z(t)$$

berechnet. Entsprechend gilt für *diskrete* Signale

$$y_a(n) = [1 + m v(n)] \cos(\Omega_T n) = \cos(\Omega_T n) + m \underbrace{v(n) \cos(\Omega_T n)}_{= y_z(n)} = \cos(\Omega_T n) + m y_z(n).$$

Graphische Darstellung:



Anmerkungen:

- Es ist zu beachten, dass bei dieser Modulationsart die **Trägerschwingung zusätzlich** auftritt, d.h. sie ist auch zu übertragen bzw. zu verarbeiten.
- Eine Amplituden-Modulation weist die **gleiche (schlechte) Bandbreiteneffizienz** wie eine Zweiseitenband-Modulation auf. Zusätzlich hat sie außerdem noch eine **schlechtere Energie-Effizienz**.
- Dennoch ist die Amplituden-Modulation ein **klassisches, weit verbreitetes Übertragungsverfahren** im Rundfunk (insbesondere im KW-, MW- und LW-Bereich).
- Der Grund dafür liegt in der **einfachen Demodulation** (es lassen sich billige Empfänger in großer Stückzahl herstellen). Dazu später mehr.

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 1

Ansatz – Teil 1:

Für die Demodulation eines ZSB-modulierten Signals wird wieder mit einem Trägersignal multipliziert. Die Frequenz ist dabei die gleiche, die auch für den Träger verwendet wurde. Man spricht dann von einer **Synchron-Demodulation**:

□ **Kontinuierliche** Zweiseitenband-Demodulation:

$$\begin{aligned}
 y_z(t) \cos(\omega_T t) &= v(t) \cos^2(\omega_T t) \\
 &\quad \dots \text{cos-Theorem und Aufteilung in Exponentialterme einsetzen} \dots \\
 &= v(t) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_T t)] = v(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\omega_T t} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega_T t} \right], \\
 &\quad \circ \\
 &\quad \bullet \\
 &\quad \frac{1}{2} V(j\omega) + \frac{1}{4} V(j(\omega - 2\omega_T)) + \frac{1}{4} V(j(\omega + 2\omega_T)).
 \end{aligned}$$

Anschließend ist eine **Tiefpassfilterung** notwendig, welche die Signalkomponenten bei $\omega - 2\omega_T$ bzw. $\omega + 2\omega_T$ unterdrückt.

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 2

Ansatz – Teil 2:

□ **Diskrete** Zweiseitenband-Demodulation:

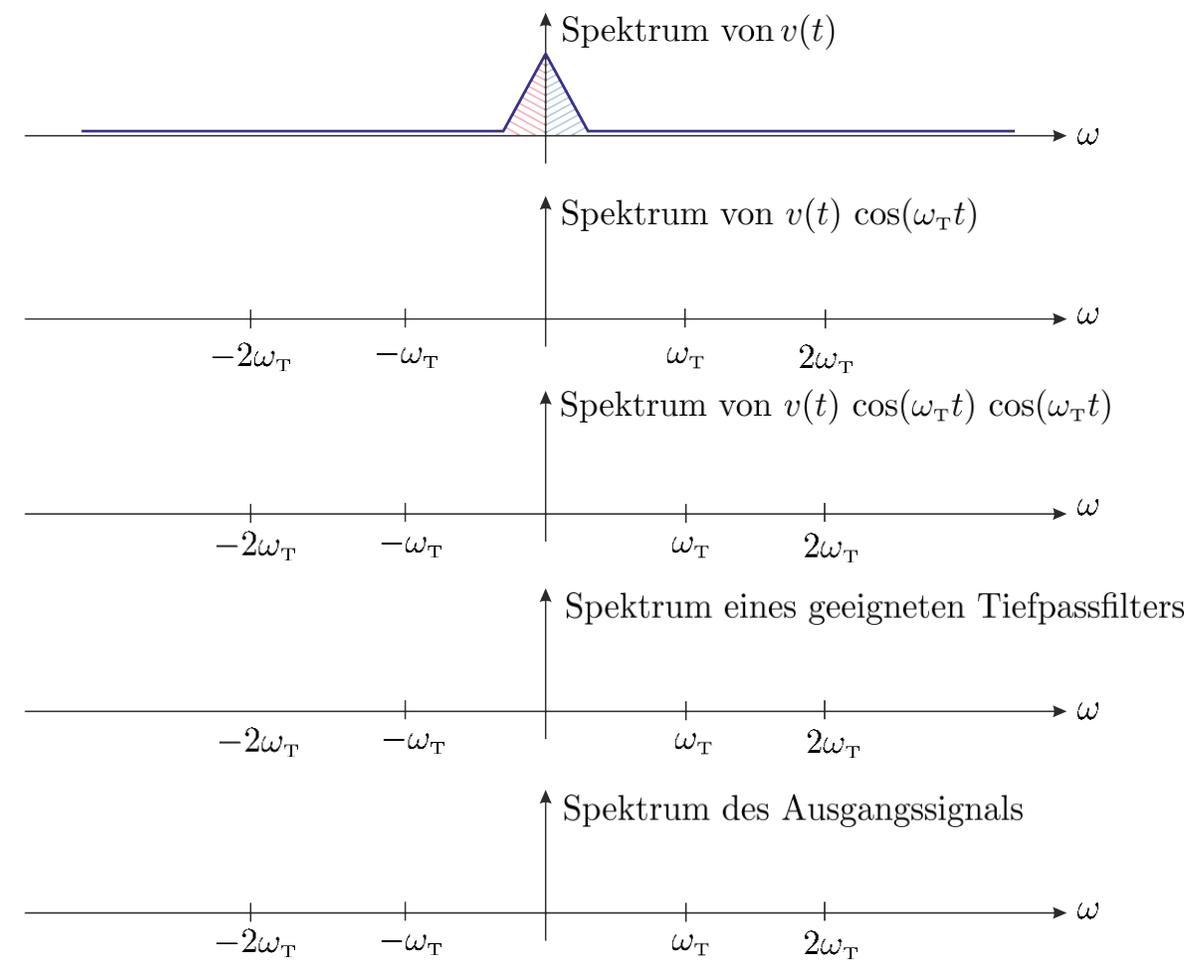
$$\begin{aligned}
 y_z(n) \cos(\Omega_T n) &= v(n) \cos^2(\Omega_T n) \\
 &\quad \dots \text{cos-Theorem und Aufteilung in Exponentialterme einsetzen ...} \\
 &= v(n) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\Omega_T n)] = v(n) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\Omega_T n} + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega_T n} \right], \\
 &\quad \circ \\
 &\quad \bullet \\
 &\quad \frac{1}{2} V(e^{j\Omega}) + \frac{1}{4} V(e^{j(\Omega-2\Omega_T)}) + \frac{1}{4} V(e^{j(\Omega+2\Omega_T)}).
 \end{aligned}$$

Anschließend ist eine **Tiefpassfilterung** notwendig, welche die Signalkomponenten bei $\Omega - 2\Omega_T$ bzw. $\Omega + 2\Omega_T$ unterdrückt.

Am Ausgang des Tiefpassfilters liegt dann (vorausgesetzt die (einseitige) Bandbreites des Signals $v(\dots)$ ist kleiner als die Trägerfrequenz) das gewichtetet Eingangssignal $1/2 v(\dots)$ vor!

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 3

Ansatz – Teil 3:



Vervollständigen Sie die nebenstehenden Spektraldarstellungen!

Eigener Versuch, dann gemeinsame Lösung an der Tafel!

Schwierigkeiten bei der Demodulation – Teil 1:

Die Modulationen auf der Sende- und auf der Empfangsseite arbeiten (im Allgemeinen) mit Trägersignalen, die nicht gleichzeitig / am selben Ort erzeugt wurden. Nimmt man auf der Empfangsseite **Trägerfrequenzfehler** bzw. **Trägerphasenfehler** an, dann verwendet man für die kontinuierliche Demodulation das Modulationssignal

$$\cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi)$$

↙ Trägerfrequenzfehler
↖ Trägerphasenfehler

bzw. für diskrete Signale

$$\cos((\Omega_T + \Delta\Omega)n + \varphi)$$

↙ Trägerfrequenzfehler
↖ Trägerphasenfehler

Auf eine entsprechende Herleitung im Diskreten wird im Folgenden verzichtet, da diese völlig analog zu den kontinuierlichen Überlegungen verläuft.

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 5

Schwierigkeiten bei der Demodulation – Teil 2:

Im Kontinuierlichen ergibt sich für eine Demodulation mit einem fehlerbehafteten Trägersignal:

$$\begin{aligned}y_z(t) \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi) &= v(t) \cos(\omega_T t) \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi) \\ &= v(t) \frac{1}{2} \left[\cos((2\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi) + \cos(\Delta\omega t + \varphi) \right].\end{aligned}$$

Durch eine geeignete Tiefpassfilterung kann der Signalanteil rund um $2\omega_T + \Delta\omega$ entfernt werden.

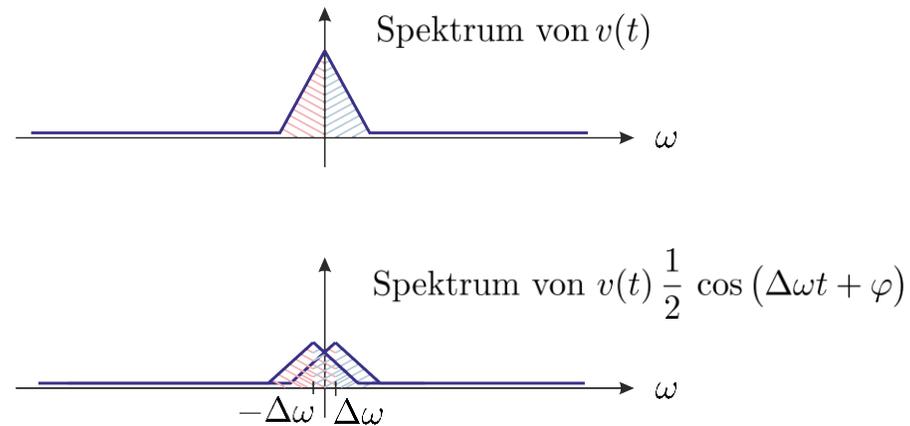
Damit erhält man für das demodulierte, tiefpassgefilterte Signal:

$$v(t) \frac{1}{2} \cos(\Delta\omega t + \varphi).$$

Im Spektrum entspricht dies zwei verschobenen Teilspektren, die sich **nicht** zu $\frac{1}{2} V(j\omega)$ überlagern!

Dies führt zu starken **Verzerrungen**.

Schwierigkeiten bei der Demodulation – Teil 3:

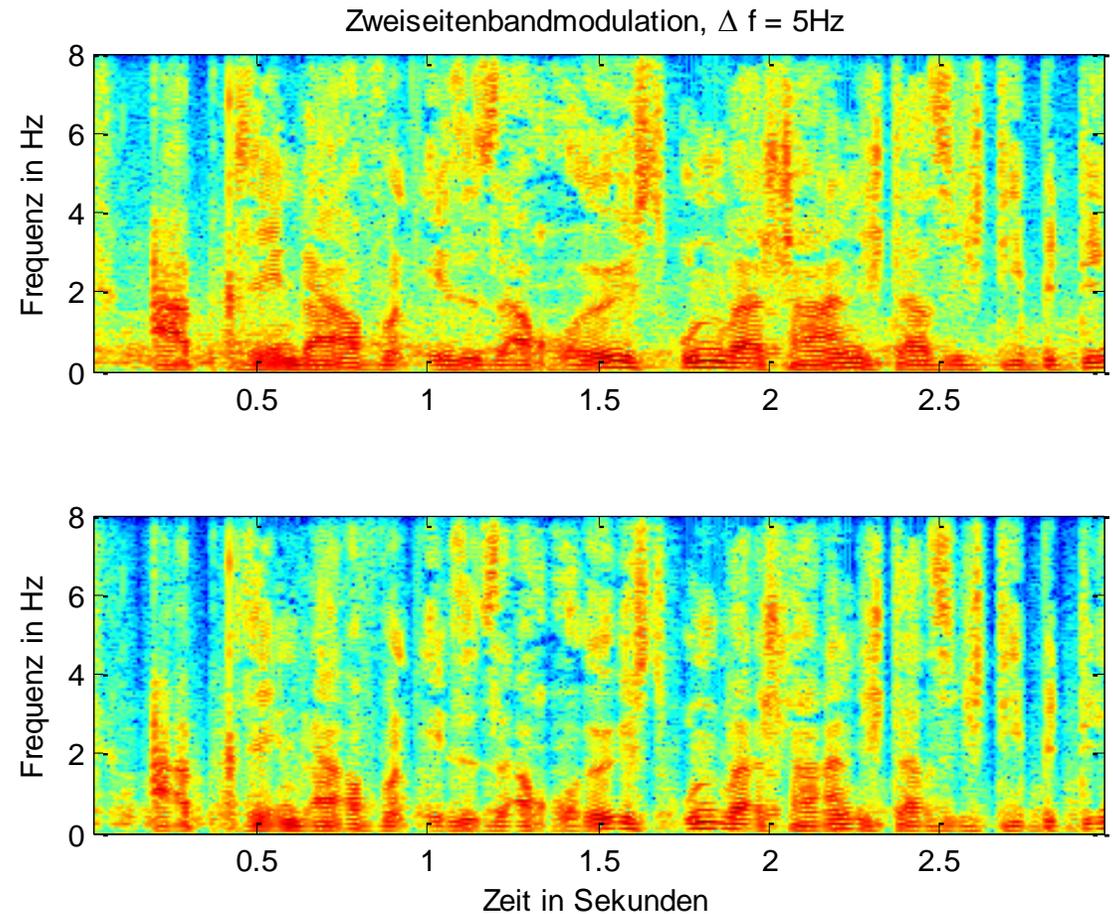


Nimmt man an, dass es keine Trägerfrequenzfehler gäbe (dies ist mit einigem Aufwand verbunden), d.h. $\Delta\omega = 0$, so bleiben noch Phasenfehler übrig:

$$v(t) \frac{1}{2} \cos(\varphi).$$

Diese sind aber unkritisch, solange $\varphi \ll \pi/2$ bleibt. In diesem Fall gilt $\cos(\varphi) \approx 1$. Es ist daher keine perfekte, aber eine gute Phasensynchronisation notwendig.

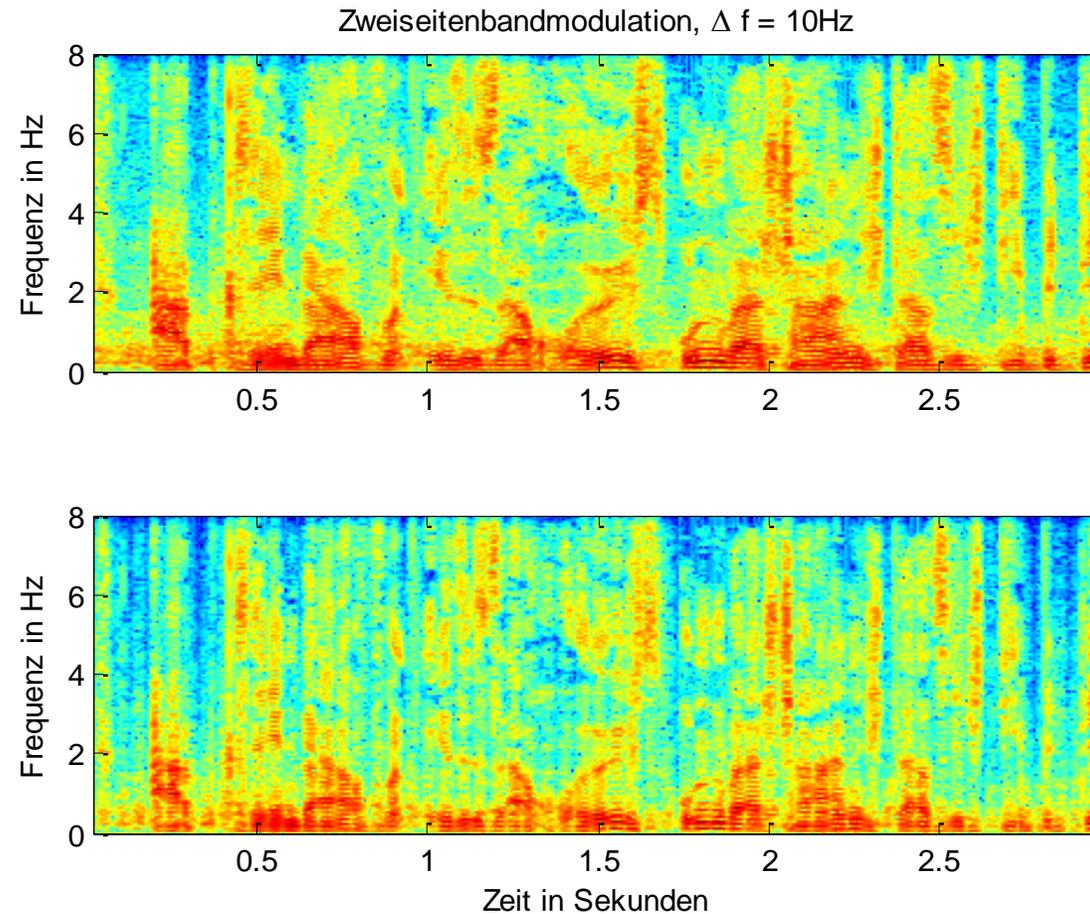
ZSB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler – Teil 1:



🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 5 Hz
 Frequenzversatz

ZSB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler – Teil 2:



🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 10 Hz
Frequenzversatz

Einseitenband-Demodulation (ESB-Demodulation) – Teil 1

Ansatz – Teil 1:

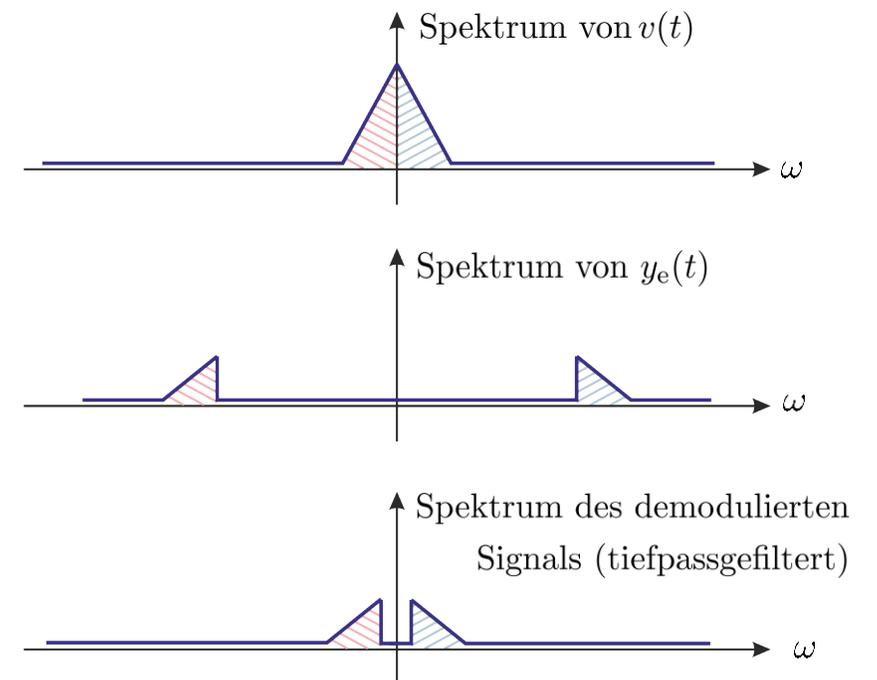
Die Demodulation eines einseitenband-modulierten Signals geschieht analog zur Demodulation eines zweiseitenband-modulierten Signals, d.h. mittels Multiplikation mit einem cosinus-Träger entsprechender Frequenz und anschließender Tiefpassfilterung:

$$y_e(t) \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi).$$

Es werden Frequenz- und Phasenfehler angenommen!

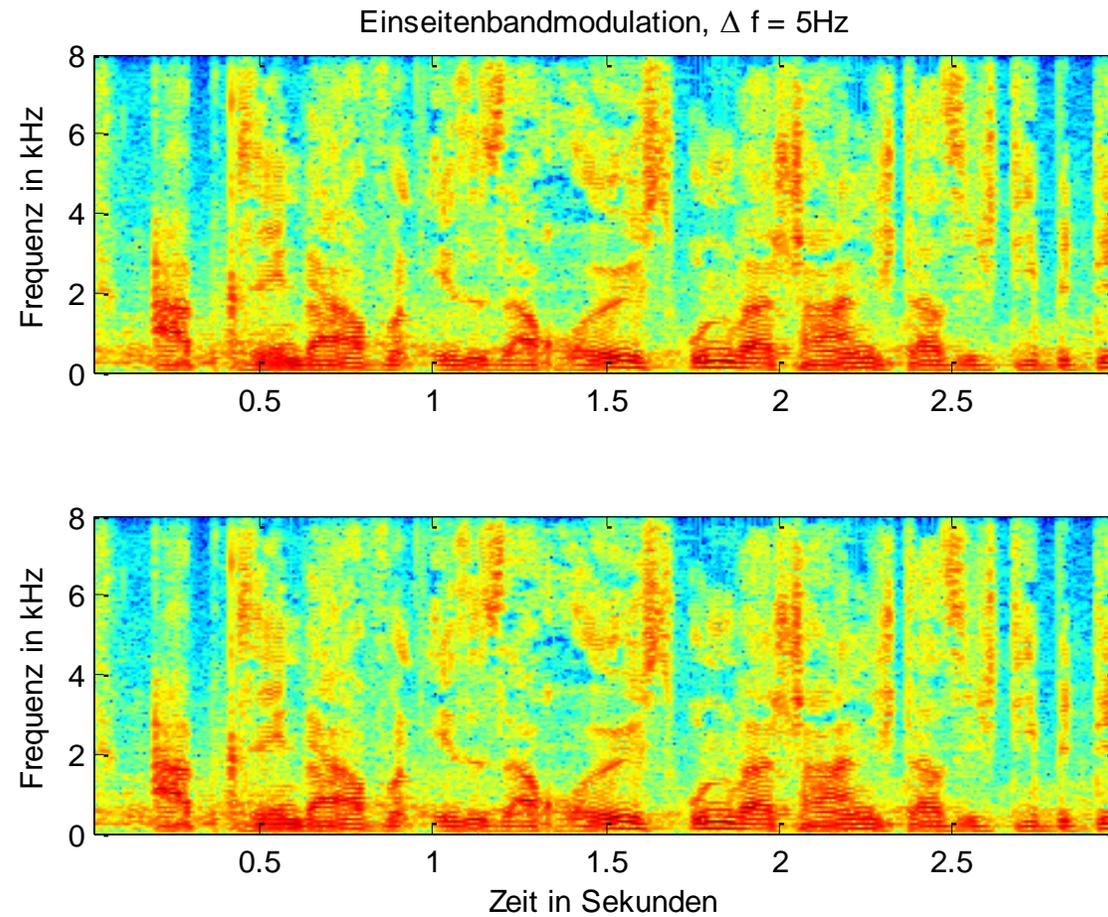
Ist der Frequenzversatz klein und positiv, so sind **Frequenzfehler** bei der Einseitenband-Demodulation **unkritischer** als bei der Zweiseitenband-Demodulation.

Phasenfehler bewirken lediglich einen zusätzlichen Phasenterm im Ausgangsspektrum und sind i.A. vollkommen **unkritisch**.



Einseitenband-Demodulation (ESB-Demodulation) – Teil 2

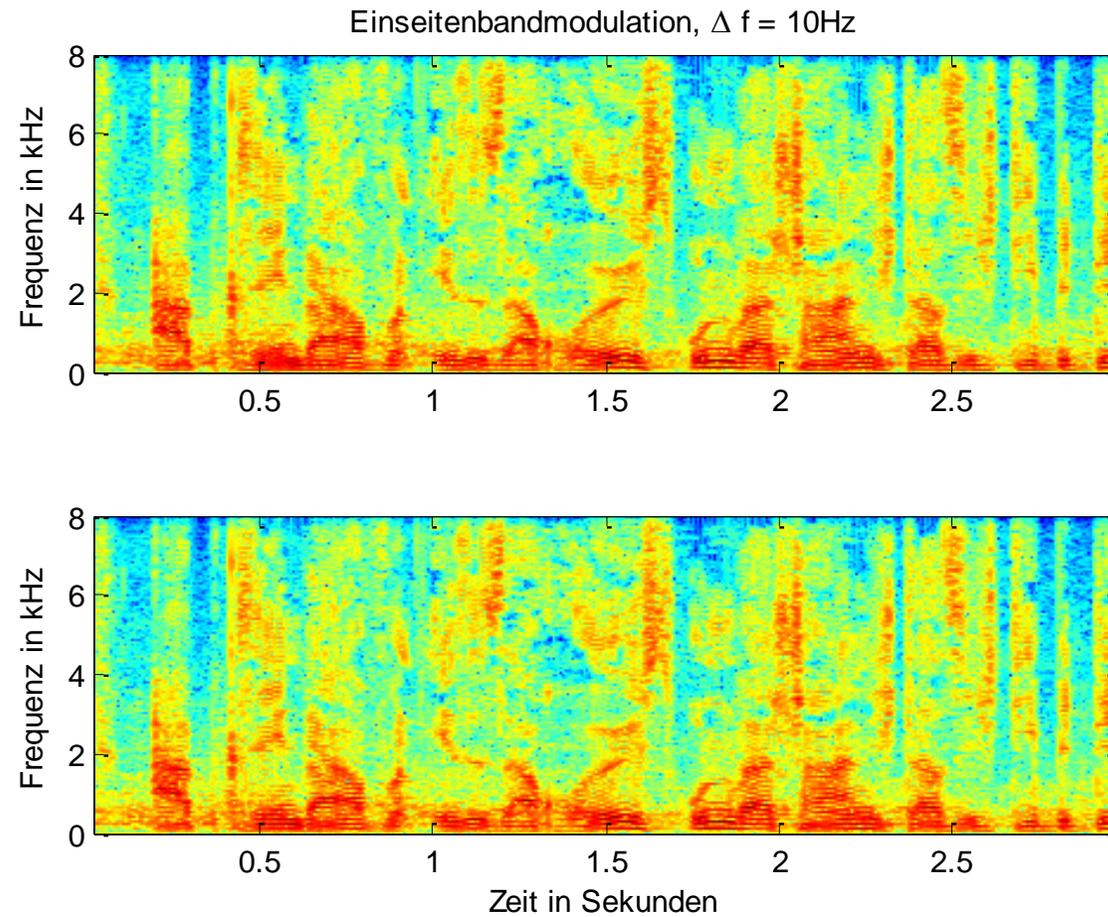
ESB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler:



🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 5 Hz
Frequenzversatz

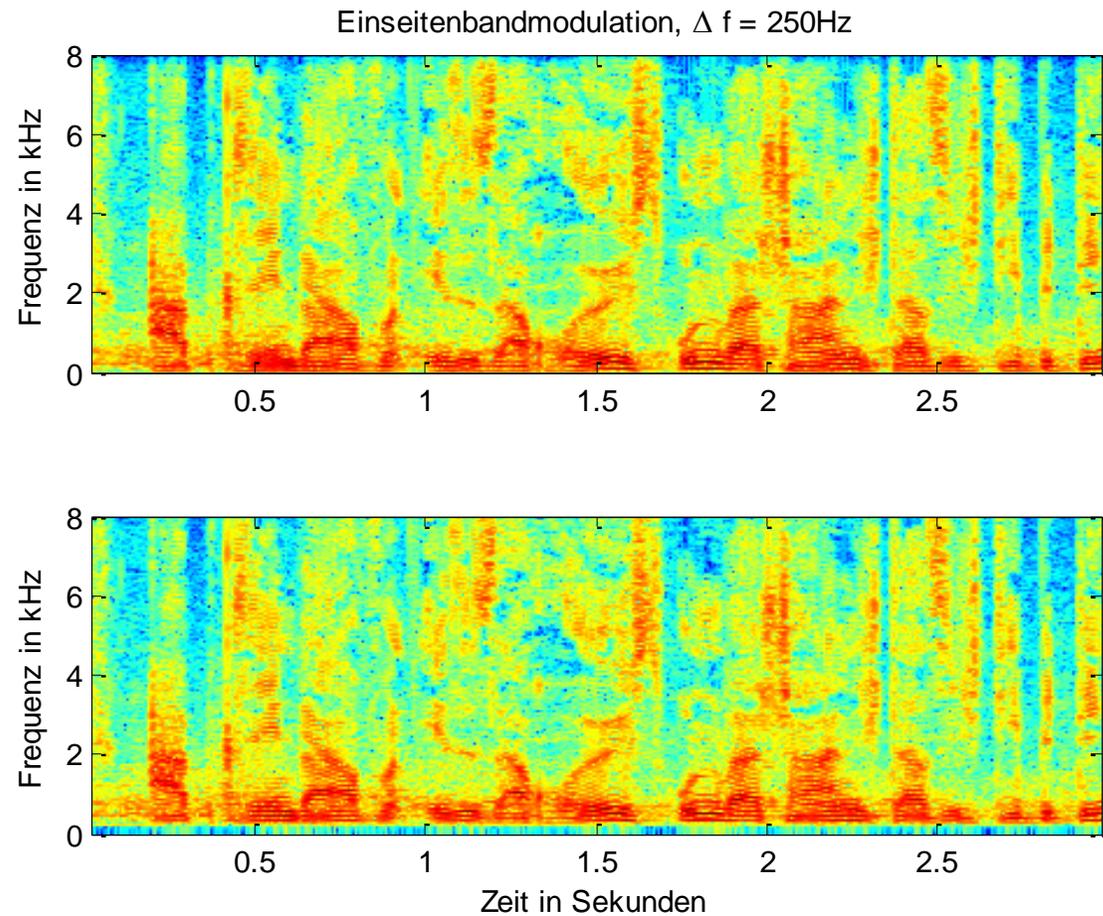
ESB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler:



🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 10 Hz
 Frequenzversatz

ESB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler:



🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 250 Hz
Frequenzversatz

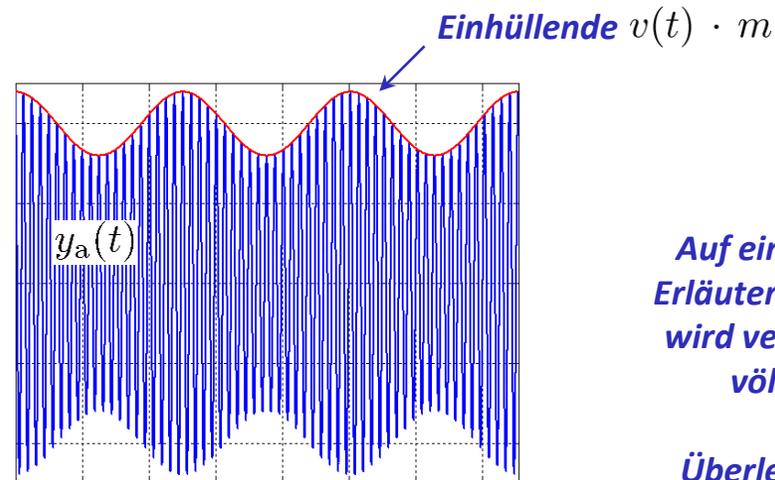
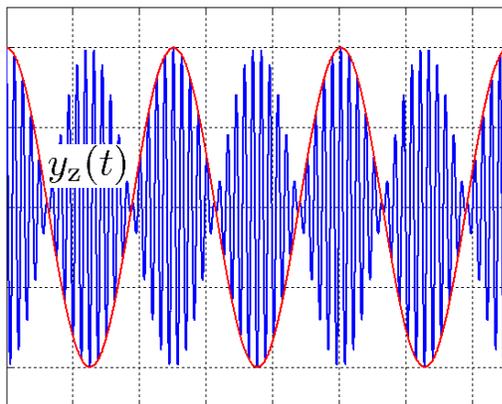
AM-Demodulation

Ansatz :

Grundsätzlich ist eine Amplituden-Modulation eine Zweiseitenband-Modulation mit Träger, d.h. man benötigt eine Synchron-Demodulation wie bei der Zweiseitenband-Demodulation. Allerdings kann hier ein viel einfacherer Ansatz angewendet werden:

- Man kann ein amplituden-moduliertes Signal zunächst **gleichrichten** $x(t) = |y_a(t)|$ und dann **tiefpassfiltern** (mit einem sehr einfachen Tiefpassfilter, zur Unterdrückung des Trägers [im einfachsten Fall: Diode und einfaches RC-Glied]).

Beispiel: $v(t) = \cos(\omega_v t)$ mit $\omega_v \ll \omega_T$.



Auf eine entsprechende Erläuterung im Diskreten wird verzichtet, da diese völlig analog zu den kontinuierlichen Überlegungen verläuft.

Ansatz – Teil 1:

Bei einer Amplituden-Modulation steckt die (Nutz-Signal-) Information in der momentanen Amplitude des Trägers.

Bei einer Puls-Amplituden-Modulation steckt die **Information** in den **Momentangewichten der Trägerimpulse**.

Als „Trägersignal“ wird hier eine Impulsfolge

$$p(t) = T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A)$$

verwendet. Wie aus dem Transformationsteil der Vorlesung bekannt ist, gilt für das zugehörige Spektrum:

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_0\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right).$$

Zur Modulation wird das Nutzsinal $v_0(t)$ mit der Trägerimpulsfolge multipliziert:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= v_0(t) p(t) = T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(t) \delta_0(t - nT_A) \\ &\quad \dots \text{Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion} \dots \\ &= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A). \end{aligned}$$

Ansatz – Teil 2:

Bezeichnet man das abgetastete Signal $v_0(nT_A)$ als $v(n)$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A) \\ &= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) \delta_0(t - nT_A), \end{aligned}$$

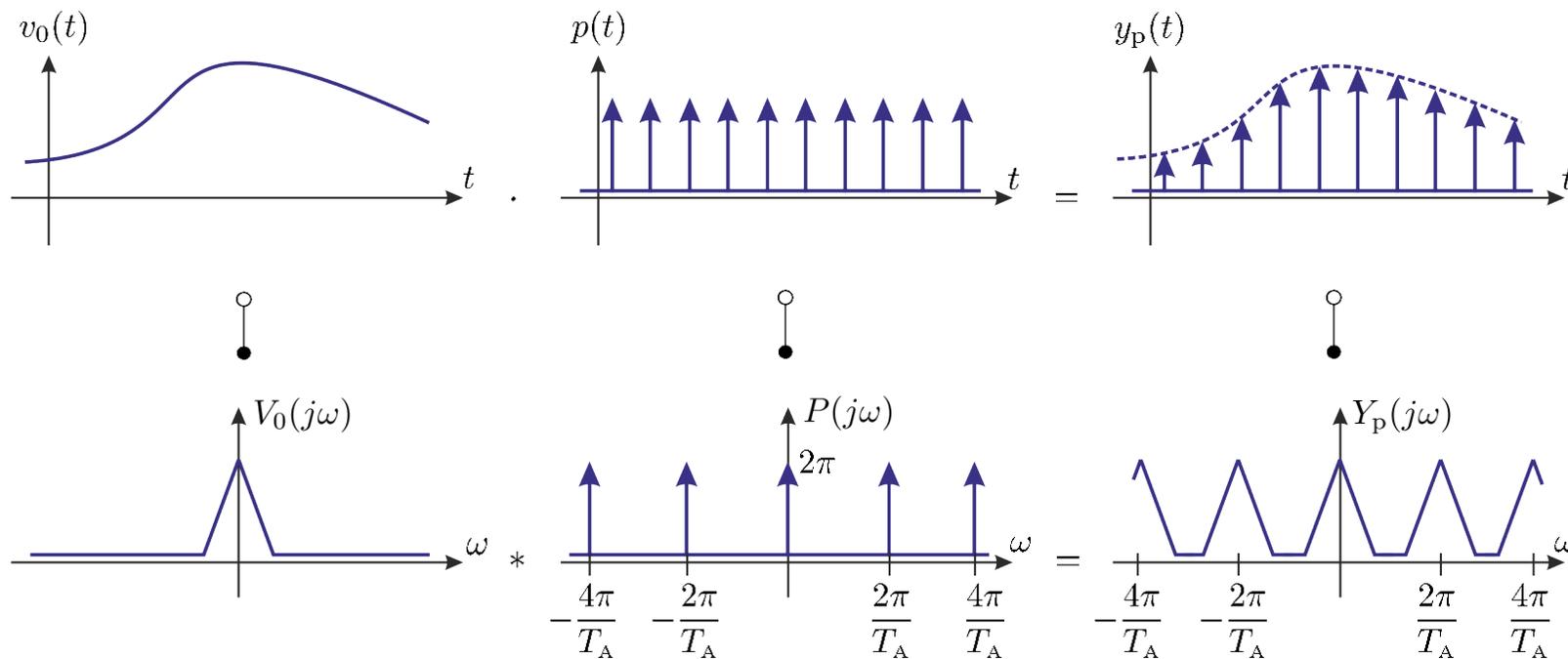
so ergibt sich der **erste Schritt einer Analog-Digital-Wandlung** (AD-Wandlung). $v(n)$ ist dabei als Folge von Abtastwerten, d.h. eine Zahlenfolge / diskretes Signal, zu verstehen.

Die Multiplikation mit der Trägerimpulsfolge $p(t)$ entspricht einer Faltung im Spektralbereich mit $P(j\omega)$, welche wiederum eine Impulsfolge ist, d.h. es gilt für das **Spektrum des puls-amplituden-modulierten Signals**:

$$Y_p(j\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_0 \left(j\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right) \right).$$

Ansatz – Teil 3:

Graphische Veranschaulichung:



Ansatz – Teil 4:

Offenbar bewirkt die Abtastung (mit der idealen Dirac-Impulsfolge) eine **periodische Wiederholung des Spektrums** mit der Periode

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_A} = 2\pi f_A = \omega_A,$$

also mit der Abtastfrequenz f_A .

Aufgrund der Periodizität kann auch ein **Zusammenhang mit der Fourier-Transformation der Folge** $v(n) \circ \bullet V(e^{j\Omega})$ hergestellt werden. Hierbei gilt

$$V(e^{j\Omega}) = Y_p(j\omega) \quad \text{mit} \quad \Omega = \omega T_A = \frac{\omega}{f_A} = \frac{2\pi f}{f_A}.$$

Demodulationsprinzip:

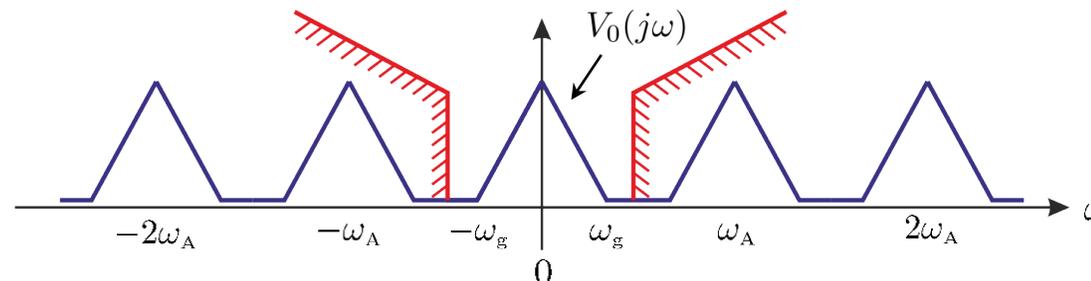
Gemäß der graphischen Veranschaulichung (siehe vorherige Folie) kann man die Puls-Amplituden-Modulation als Zweiseitenband-Modulation auffassen, allerdings mit unendlich vielen parallelen Trägern bei $\omega_T = \mu \omega_A, \mu \in \mathbb{Z}$. Es stellen sich daher die Fragen:

- ❑ Ist eine ähnliche Synchron-Demodulation wie bei der Zweiseitenband-Modulation nötig?
- ❑ Ist eine Einhüllenden-Demodulation nötig wie bei der Amplitudenmodulation?

Beides wird nicht gebraucht. Die Demodulation kann auf einfache Weise durch

- ❑ ideale Tiefpassfilterung, wenn $\omega_A = 2\omega_g$ oder durch
- ❑ einfache Tiefpassfilterung (Filter mit endlicher Steilheit), wenn $\omega_A > 2\omega_g$.

durchgeführt werden.



Interpretation der Tiefpass-Demodulation im Zeitbereich – Teil 1:

Das Signal $y_p(t)$ besteht aus einer Folge von gewichteten Dirac-Impulsen im Abstand T_A .

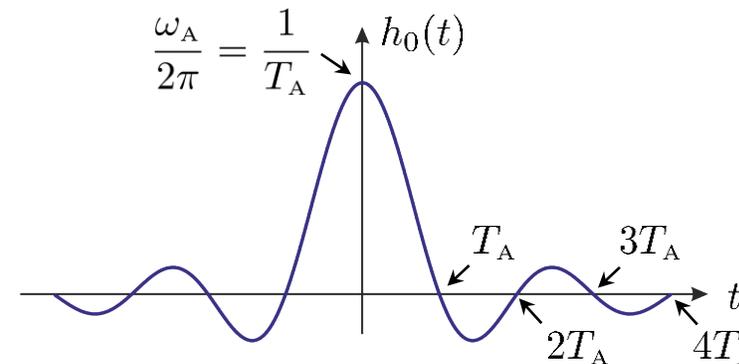
Nach der Tiefpassfilterung erhält man daraus eine Folge von gewichteten Tiefpassimpulsantworten.

Für ein ideales Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz $\omega_1 = \omega_A/2$ ergibt sich die Impulsantwort

$$h_0(t) = \frac{\omega_A}{2\pi} \frac{\sin(\frac{\omega_A}{2}t)}{\frac{\omega_A}{2}t},$$

mit äquidistanten Nulldurchgängen in

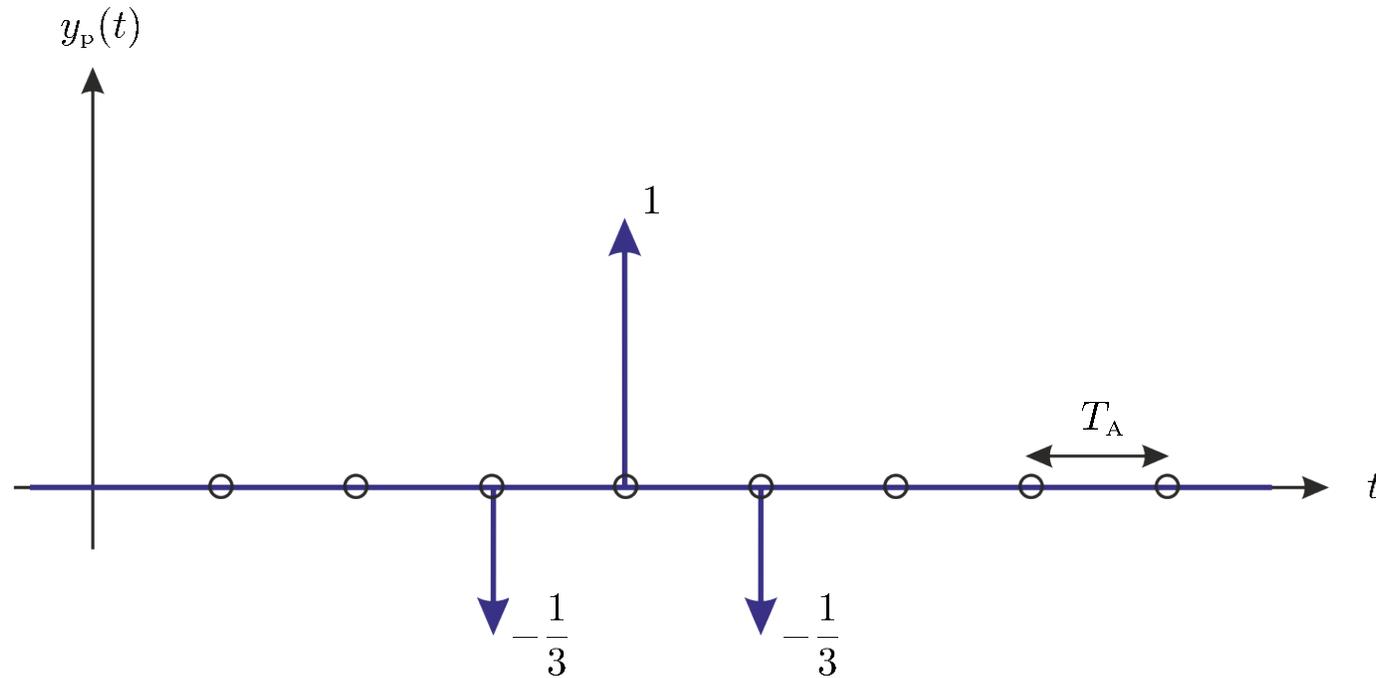
$$t = \nu \frac{2\pi}{\omega_A} = \nu T_A.$$



Durch Überlagerung (Gewichtung und Verschiebung) solcher Funktionen erhält man schließlich den kontinuierlichen Verlauf des demodulierten Signals.

Interpretation der Tiefpass-Demodulation im Zeitbereich – Teil 2:

Bitte versuchen Sie das demodulierte Signal für folgendes Eingangssignal zu zeichnen (eigener Versuch, anschließend gemeinsame Lösung an der Tafel).



Puls-Amplituden-Demodulation – Teil 4

Interpretation der Tiefpass-Demodulation im Zeitbereich – Teil 3:

Die Überlagerung der $\sin(x)/x$ -Verläufe führt auf einen kontinuierlichen Signalverlauf. Zu den Abtastzeitpunkten sind nahezu alle Funktionswerte der Überlagerung Null, bis auf einen. Die Abtastwerte bleiben damit unverändert, es wird lediglich dazwischen interpoliert – und zwar ideal!

Daraus folgt, dass $v_0(t)$ bzw. $V_0(j\omega)$ eindeutig und ideal wiedergewonnen werden können – die Abtastwerte beschreiben das Signal vollständig.

Konsequenz aus den bisherigen Überlegungen:

Die Tiefpass-Demodulation ist offenbar nur dann möglich, wenn gilt $\omega_A - \omega_g \geq \omega_g$.

- Das Signal muss daher bandbegrenzt sein!
- Wenn das Signal bandbegrenzt ist, muss abgetastet werden mit

$$\omega_A \geq 2\omega_g \text{ bzw. } f_A \geq 2f_g$$

Bei Verletzung dieses „Abtasttheorems“ ergeben sich (siehe Graphiken zuvor) spektrale Überlappungen (diese werden „Alias-Anteile“ bzw. „Aliasing“ genannt), eine Wiedergewinnung von

$$V_0(j\omega) \bullet \text{---} \circ v_0(t)$$

ist dann nicht möglich.

Inhalt des zweiten Teils des Abschnitts über Modulation

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Nichtlineare Modulation**
 - Übertragungsstörungen**
 - Störabstand**
 - Digitalisierung
 - Winkelmodulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- ...

Grundlegende Überlegungen:

Auf dem Übertragungskanal (bzw. bei der Speicherung oder der Verarbeitung mit realen Geräten) kommen zum Nutzsignal Störungen hinzu. Diesen können

- **additiv** (z.B. Rauschen oder Störfrequenzen [„Netzbrummen“ bei 50 Hz])
oder auch
- **multiplikativ** (z.B. durch Verstärkungsschwankungen) sein.

Diese Störungen verändern bzw. verfälschen die Signalamplitude, welche aber bei linearer Modulation gerade die Information über das zu übertragende Signal $v(t)$ trägt (**AM**, **PAM**).

Kanalstörungen gehen unmittelbar in Störungen des demodulierten Signals über, der „Störabstand“ am Ausgang ist daher (höchstens) so groß wie der auf dem Kanal.

Definition:

Der „Störabstand“ wird auch als Signal-zu-Geräusch-Verhältnis bzw. im Englischen als *signal-to-noise ratio* (SNR) bezeichnet. Er ist definiert über das Verhältnis von

- S (= Nutzsignalleistung) zu
- N (= Störungsleistung)

als logarithmisches Maß:

$$\frac{SNR}{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left\{ \frac{S}{N} \right\}.$$

Beispiele:

- Gute Telefonverbindung: $SNR \approx 40 \text{ dB} \longrightarrow S \approx 10^4 N.$
- Gute Rundfunkverbindung: $SNR \approx 60 \text{ dB} \longrightarrow S \approx 10^6 N.$

Vorsicht: die oben genannten Zahlen stellen Leistungsverhältnisse dar – für die entsprechenden Amplitudenverhältnisse gilt dann $\sqrt{S} \approx 10^2 \dots^3 \sqrt{N}.$

Anmerkungen:

- Bei linearer Modulation gilt für den Störabstand am Ausgang $SNR_{\text{Ausgang}} \leq SNR_{\text{Kanal}}$. Hierbei hat man den Nachteil, dass mit wachsender Länge der Übertragungsstrecke (bzw. bei mehrfacher Verarbeitung) der Rauschanteil zumeist proportional zur Länge wächst (sog. Fehlerakkumulation).
- Sowohl die Abhängigkeit vom Kanal-SNR als auch von der Länge der Übertragungsstrecke kann durch **nichtlineare Modulation** vermieden werden. Der Nachteil (Preis) dabei ist die erhöhte Bandbreite (im Vergleich zu Zweiseitenband-Modulation oder Amplituden-Modulation)

Im Folgenden werden nun nichtlineare Techniken besprochen

- Quantisierung bzw. Digitalisierung und
- Winkel-Modulation bzw. Frequenz-Modulation.

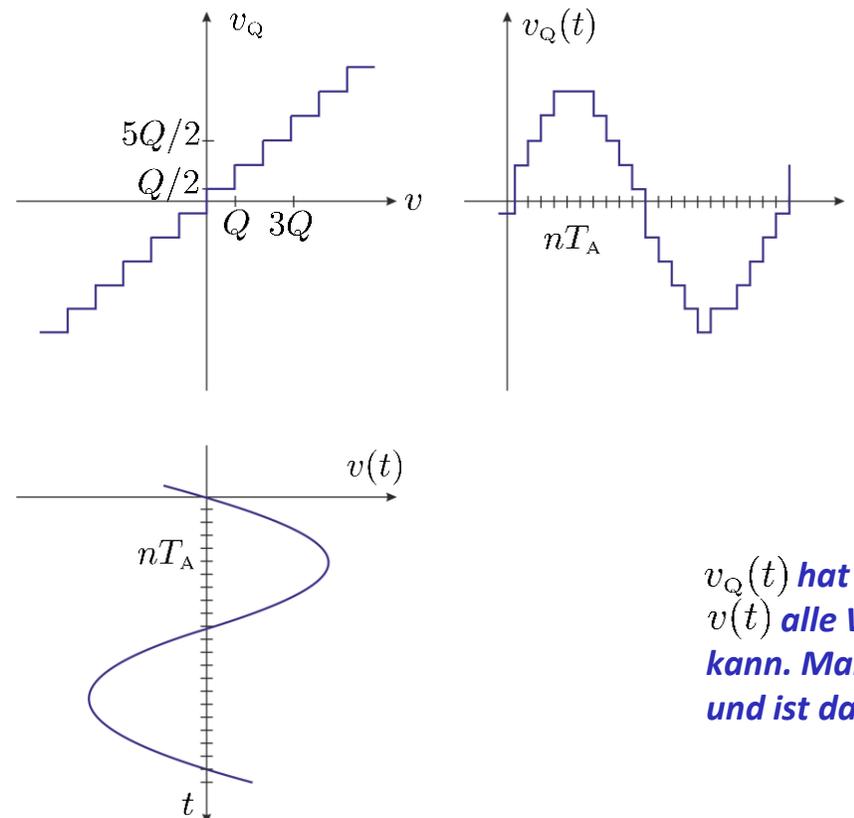
Inhalt der Vorlesung

- Signale und Systeme – Einführung
- ...
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Nichtlineare Modulation
 - Digitalisierung**
 - Quantisierung*
 - Puls-Code-Modulation bzw. Analog-Digital-Umsetzung*
 - Linearität bzw. Nichtlinearität*
 - Störverhalten der Puls-Code-Modulation*
 - Analog-Digital-Wandlung*
 - Quantisierungsfehler*
 - Winkelmodulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- ...

Quantisierung – Teil 1

Grundidee:

Ein System mit dem unten skizzierten Zusammenhang $v_Q = f(v)$ erlaubt das Vermeiden der Störungsakkumulation.



Bezeichnung:
„Quantisierungskennlinie“

$v_Q(t)$ hat nur noch diskrete Werte, während $v(t)$ alle Werte kontinuierlich annehmen kann. Man nennt das: $v(t)$ wird quantisiert und ist dann als $v_Q(t)$ wertdiskret!

Quantisierung – Teil 2

Vor- und Nachteile der Wertdiskretisierung – Teil 1:

Beispiel: Für das Signal $v_Q(t) = 7/2 Q$ für $t \in (t_1, t_2)$ darf eine Störung mit $|n(t)| < Q/2$ hinzukommen und man würde (weil nur diskrete Werte $v_Q = iQ + Q/2$ erlaubt sind!) richtig „entscheiden“ können, so dass wieder $v_Q(t) + n(t) = iQ + Q/2$ (also für das Beispiel hier wieder $v_Q(t) + n(t) = 7/2 Q$ gilt).

Technische Nutzung: Eine „Entscheider“-Elektronik (*repeater*) kann für Signale $v_Q(t) + n(t)$, die mit hinreichend kleinen Abstand quantisiert wurden, die Störung $n(t)$ wieder beseitigen, d.h. $v_Q(t)$ wieder fehlerfrei regenerieren!

Dennoch hat eine Quantisierung auch Nachteile: Man hat stets

$$\begin{aligned}v_Q(t) &\neq v(t), \\v_Q(t) &= v(t) + \Delta v(t).\end{aligned}$$

Es entstehen also Quantisierungsfehler. In den bisherigen Beispielen galt hierbei

$$\Delta v(t) \in \left[-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2} \right).$$

Quantisierung – Teil 3

Vor- und Nachteile der Wertdiskretisierung – Teil 2:

Zusammenfassend kann man erwähnen:

- ❑ Bei richtig eingestellter Quantisierung entsteht ein **unvermeidbare** Fehler, der allerdings nur **einmalig** auftritt.
- ❑ Das SNR hängt nur von der Quantisierung Q ab, nicht mehr von der Kanallänge.

Diese Idee lässt sich natürlich mit einer Puls-Amplituden-Modulation (PAM) bzw. einer Abtastung verbinden und damit auf zeitdiskrete Signale anwenden:

$$v_p(t) = T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{v(n)}_{=v_0(nT_A)} \delta_0(t - nT_A)$$

\Downarrow
 Quantisierung
 \Downarrow
 Zeit- und wertdiskrete Werte: $v(n) \implies v_Q(n)$

Zeit- und Wertdiskretheit zusammen wird als „digital“ bezeichnet!

Es gibt auch andere Quantisierungskennlinien, diese werden z.B. in der Vorlesung über digitale Signalverarbeitung behandelt.

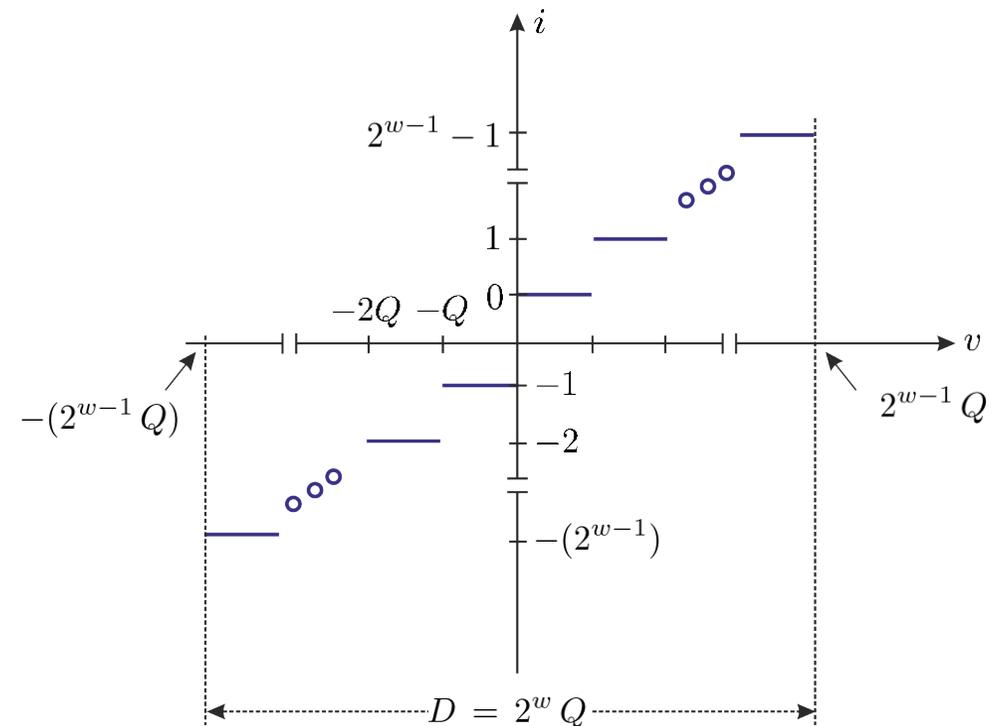
Puls-Code-Modulation bzw. Analog-Digital-Umsetzung – Teil 1

Grundidee:

Da das Signal $v_Q(t)$ nur bestimmte Werte (hier $iQ + Q/2, i \in \mathbb{Z}$) annimmt, kann man die Elemente dieser Werte-Folge nun auch durch die ganzen Zahlen i darstellen bzw. codieren. Eine Zahl i besteht aus Ziffern (englisch: *digits*), die z.B. dezimal sein können und – technisch oft – binär gewählt sind („**binary digits = bits**“).

In der Praxis besteht eine Zahl aus endlich vielen Ziffern (z.B. für eine Übertragung oder eine weitere Verarbeitung). Die Anzahl der Ziffern (insbesondere auch der Bits) heißt **Wortlänge** w .

Eine Binärzahl mit w Bits hat 2^w mögliche Werte. Die zuvor skizzierte Quantisierungskennlinie wäre dann (für symmetrische Signale $v(\dots)$) sinnvollerweise wie rechts dargestellt auszulegen.



Puls-Code-Modulation bzw. Analog-Digital-Umsetzung – Teil 2

Konsequenzen der Quantisierung:

Durch die Quantisierung ergibt sich stets ein **begrenzter Aussteuerungsbereich** D , d.h. $v(t)$ darf nicht beliebig groß werden (wie aber in allen „analogen Geräten“ auch). Zu große Signale verursachen Übersteuerungen.

Diese Übersteuerung kann man durch Erweiterung des Aussteuerungsbereichs D reduzieren. Die Folge davon wäre aber (bei unveränderter Wortlänge w) eine Vergrößerung des Quantisierungsfehlers Q . Will man also sowohl Übersteuerungen als auch Quantisierungseffekte verringern, so muss man sowohl D als auch w erhöhen.

Puls-Code-Modulation bzw. Analog-Digital-Umsetzung – Teil 3

Bezeichnungen:

- Es gilt:

Abtastung (=PAM) + Quantisierung + Codierung (binär)

= Analog-Digital-Umsetzung (ADU)

- Die Verwendung dieser digitalen Darstellung der Abtastwerte wird in der Übertragungstechnik als ***Puls-Code-Modulation*** bezeichnet. Dabei wird ein Bitstrom aus w Bits/Wert, d.h. mit einer Bitrate von $f_B = w f_A$ übertragen.

Die w Bits müssen nicht einer unmittelbaren Nummerierung von -2^{w-1} bis $2^{w-1} - 1$ entsprechen.

Linearität bzw. Nichtlinearität

Bezeichnungen:

- Die durch die bisherigen Überlegungen beschriebenen Quantisierungssysteme (stets „Treppenkurven“) sind immer **nicht-linear**, d.h. das Überlagerungsprinzip gilt hier nicht.
- Man spricht (trotzdem) von linearer Quantisierung, linearer Puls-Code-Modulation (PCM) bzw. linearer Analog-Digital-Umsetzung (ADU), wenn man durch die Kennlinie eine Gerade legen kann. Dies ist offenbar gleichbedeutend mit: $Q = \text{const}$.
- Nicht-lineare Quantisierungen, Puls-Code-Modulationen bzw. Analog-Digital-Umsetzungen verwenden dann offenbar eine gekrümmte Kennlinie, d.h. es gilt $Q = Q(v)$.

Störverhalten der Puls-Code-Modulation

Konsequenzen aus der Quantisierung:

Die Übertragung der einzelnen Bits $\in \{0, 1\}$ kann z.B. durch Spannungen $\in \{-5\text{ V}, 5\text{ V}\}$ geschehen.

Nun sind Störungsspannungen von bis zu $\pm(5 - \epsilon)\text{ V}$ = (halbe PCM-Signal-Amplitude des Bitstroms) zulässig und führen nicht zu Fehlern beim „Entscheiden“.

Dies bewirkt eine drastische *Erhöhung der Störungsfestigkeit* auf dem Kanal.

Der Preis dafür ist eine im Vergleich zur Puls-Amplituden-Modulation um das w -fache *höhere Bandbreite*.

Realisierungsmöglichkeiten für Analog-Digital- bzw. Digital-Analog-Wandlungen

Grundlegendes:

Die Wortlänge w ist eine wichtige Größe bei Analog-Digital- bzw. Digital-Analog-Wandlungen:

- Sie beeinflusst maßgeblich die Qualität (je mehr Bits, je genauer).
- Aber auch der Aufwand steigt mit größer werdender Wortlänge (bzw. die Bandbreite f_B bei Übertragungen wird größer, bzw. es erhöht sich der Schaltungsaufwand).

Möglichkeiten der AD- bzw. DA-Wandlung:

Im Prinzip muss bei der AD-Wandlung ein Vergleich mit allen erlaubten Werten $iQ + Q/2$ (Referenzwerten) durchgeführt werden. Dies kann

- gleichzeitig geschehen. Dann sind 2^w Referenzen und 2^w Komparatoren parallel notwendig.
- Alternativ kann dies auch sukzessiv geschehen. Dann braucht man eine „hochlaufende“ Referenz und einen Komparator. Dieses Wandlungsprinzip ist langsamer, aber auch billiger, da weniger Bauteile benötigt werden.

Alternativ können auch Mischformen aus beiden Wandlungsprinzipien verwendet werden. Diese werden in der Vorlesung „Digitale Signalverarbeitung“ (DSV) behandelt.

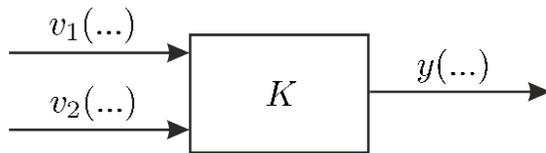
Prinzipien für Analog-Digital-Wandlungen – Teil 1

Der Komparator als Grundbaustein:

Ein Komparator kann durch folgende Kennlinie beschrieben werden:

$$y(\dots) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_1(\dots) \leq v_2(\dots), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

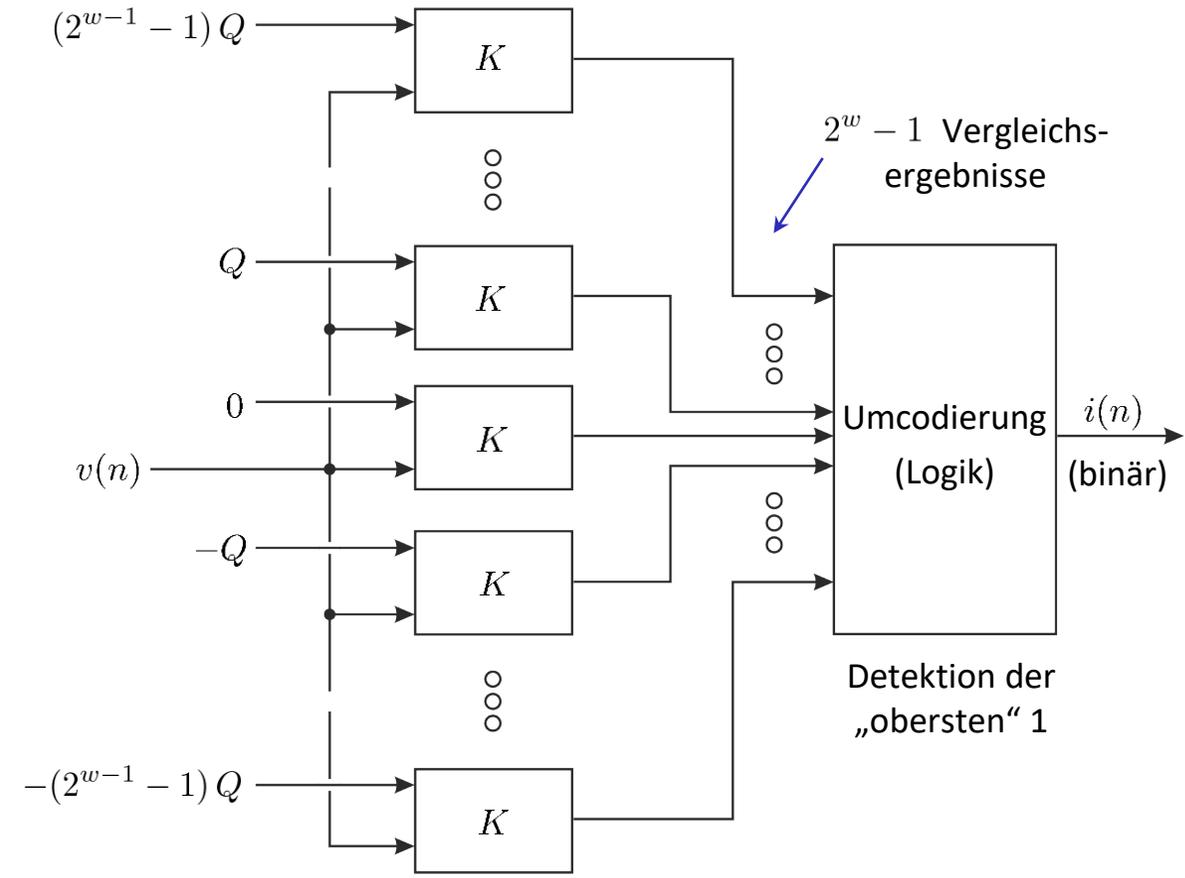
Er wird im folgenden durch dieses Symbol dargestellt:



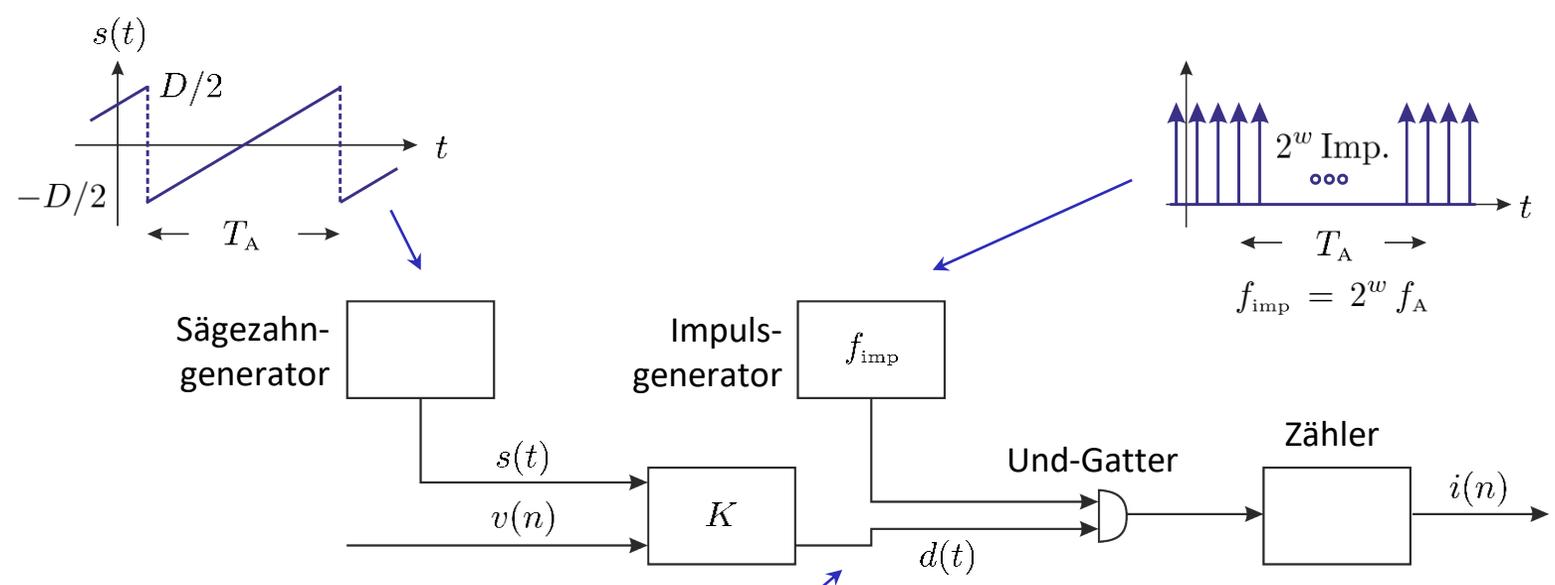
Prinzipien für Analog-Digital-Wandlungen – Teil 2

Parallel-Wandler:

Wie bereits beschrieben benötigt man hier $2^w - 1$ (exakte) Referenzen und $2^w - 1$ Komparatoren.



Serieller (Zähl-) Wandler:

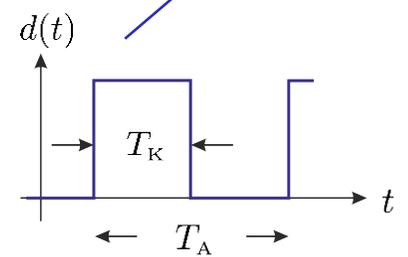


Puls-Dauer-Modulation:

$$d(t) = \begin{cases} 1, & \text{solange } v(n) > s(t), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Rechtecklänge:

$$T_K(n) = [D/2 + v(n)] T_A / D$$



Der Zähler zählt die „1“-Impulse nach dem Und-Gatter. Die Anzahl ist proportional zu T_K bzw. zu $v(n)$. Daraus entsteht dann $i(n)$.

Prinzipien für Digital-Analog-Wandlungen – Teil 1

Grundidee:

Man interpretiert die Binärzahl $i(n)$ (als unmittelbar „durchnummerierte“ Dualzahl) gemäß

$$i = \pm \sum_{\nu=0}^{w-2} \xi_{\nu} 2^{\nu} \quad \text{ganzzahlig, mit } |i| \leq 2^{w-1} - 1.$$

Häufig wird in der Signalverarbeitung auch eine normierte Darstellung (Normierung $\hat{i} = i/2^{w-1}$) gemäß

$$\hat{i} = \pm \sum_{\nu=0}^{w-2} \xi_{\nu} 2^{-w+1+\nu}$$

verwendet. Dabei sind:

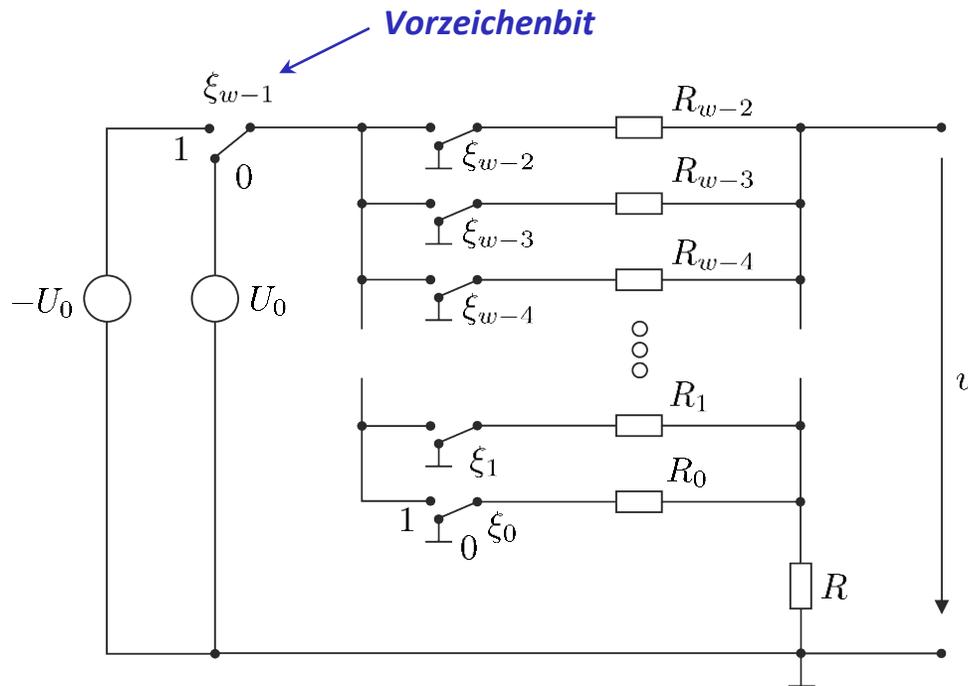
ξ_0, \dots, ξ_{w-2} : Bits $\in \{0, 1\}$ mit Wertigkeit 1 bzw. 2^{-w+1} (in der normierten Darstellung),
 ξ_{w-1} : das Vorzeichenbit (*most significant bit*).

Die w Bits müssen nun einen „Analogwert“ $v_Q(n)$ (z.B. eine Spannung) erzeugen, der (idealisiert) als Impuls (in quantisierter Form) ausgegeben wird:

$$i(n) \implies v_Q(n) \delta_0(t - nT_A).$$

Mögliche Anordnung:

Schalter, die durch Bits „gesetzt“ werden:



Hierbei ist es schwierig, die geforderten Widerstandswerte gut zu treffen (vor allem, aufgrund des großen Bereichs).

Analyse für $\xi_\mu = 1, \xi_\nu = 0 \forall \nu \neq \mu$:

$$u = u_\mu = \pm \frac{U_0}{R_\mu G_\Sigma} \sim \frac{1}{R_\mu},$$

mit

$$G_\Sigma = \sum_{\nu=0}^{w-2} \frac{1}{R_\nu} \quad \text{eigentlich } 1 - 2\xi_{w-1}$$

Wegen der Linearität gilt insgesamt:

$$u = \pm \frac{U_0}{G_\Sigma} \sum_{\nu=0}^{w-2} \xi_\nu \frac{1}{R_\nu} = v_Q.$$

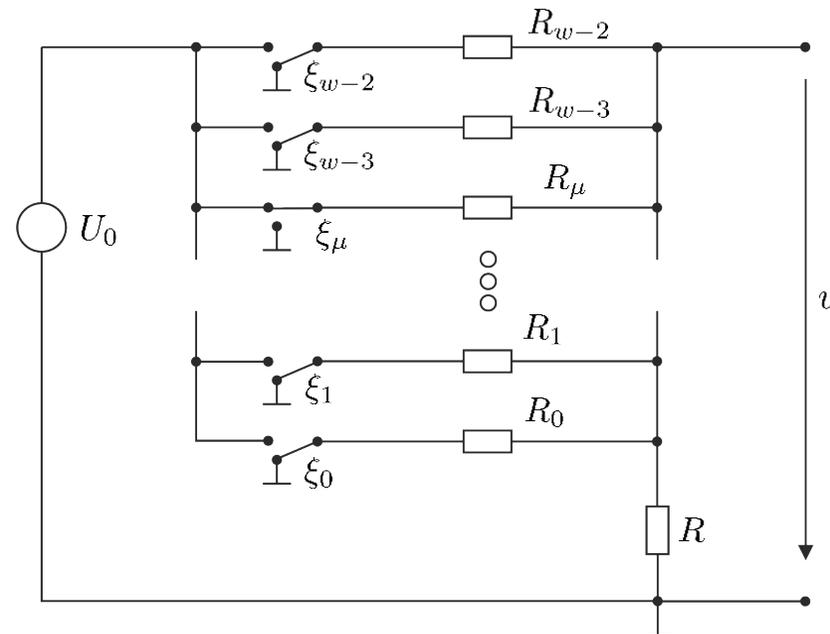
Daraus ergibt sich die Forderung (bei Vernachlässigung des Offsets):

$$R_\nu G_\Sigma = 2^{-\nu}, \nu \in \{0, \dots, w-2\}.$$

Prinzipien für Digital-Analog-Wandlungen – Teil 3

Schaltungsanalyse:

Nachvollziehen des Verhalten für ein einzeln gesetztes Bit und für den allgemeinen Fall an der Tafel.
Es wird davon ausgegangen, dass das Vorzeichenbit entsprechend gesetzt wurde.



Details an der Tafel!

Quantisierungsfehler

Modellierung von Quantisierungsfehlern:

Die Quantisierung geschieht während der Analog-Digital-Wandlung. Messbar wird dieser Fehler aber erst, nachdem wieder digital-analog gewandelt wurde. Bei Verwendung der Kennlinien der bisherigen Überlegungen wurde eine (vernünftige) Zuordnung

$$v_Q = iQ + \frac{Q}{2},$$

d.h. die **Mitte des Intervalls**, aus dem v kommt, gewählt. Für die Fehlerbeschränkung gilt damit

$$|\Delta v(n)| \leq \frac{Q}{2}.$$

Andere Kennlinien/Zuordnungen liefern gleiche oder größere Grenzen (Details in der Vorlesung „Digitale Signalverarbeitung“). Für eine exakte Modellierung müsste man die ADU bzw. PCM durch ein nichtlineares System beschreiben. Bereits die Analyse für ein Sinus-Signal gestaltet sich schon nicht mehr trivial.

Als Ausweg verwendet man eine Modellierung durch ein **additives Signal** (exakt), welches **unabhängig** vom Signal (Modellannahme) und **zufällig** (Modellannahme) sein soll. Beispiele für solche Signale werden im nächsten Hauptabschnitt („Stochastische Signale“) behandelt.

Zusammenfassung

Partnerarbeit:

Bitte arbeiten Sie für die folgende Aufgabe mit einem Partner zusammen und legen Sie gemeinsam die für Sie fünf wichtigsten Punkte bei der Digitalisierung fest (Zeit: etwa fünf Minuten). Begründen Sie Ihre Auswahl:

- Punkt 1:
.....
- Punkt 2:
.....
- Punkt 3:
.....
- Punkt 4:
.....
- Punkt 5:
.....

Zusammenfassung des letzten Abschnitts

- Signale und Systeme – Einführung
- ...
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Nichtlineare Modulation
 - Digitalisierung**
 - Quantisierung**
 - Puls-Code-Modulation bzw. Analog-Digital-Umsetzung**
 - Linearität bzw. Nichtlinearität**
 - Störverhalten der Puls-Code-Modulation**
 - Analog-Digital-Wandlung**
 - Quantisierungsfehler**
 - Winkelmodulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- ...

Inhalt des nächsten Abschnitts

- Signale und Systeme – Einführung
- ...
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Nichtlineare Modulation
 - Digitalisierung
 - Winkelmodulation**
 - Allgemeines*
 - Phasen- und Frequenzmodulation (PM und FM)*
 - Systemeigenschaften*
 - Einfluss von Störungen*
 - Winkeldemodulation*
 - FM-Spektren und FM-Bandbreite*
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- ...

Vergleich zwischen Amplituden- und Winkelmodulation:

Unter Winkelmodulation ist die kontinuierliche Modulation eines Sinusträgers zu verstehen:

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cos(\omega_T(t)t + \varphi_T(t)) = \hat{c}_T \cos(\Phi_T(t)).$$

\nearrow
Träger
(carrier)
 \nearrow
Träger-
amplitude
 \nwarrow
Träger-
frequenz
 \nwarrow
Träger-
phase
 \nwarrow
Träger-Winkel-
Momentanphase

Bei linearen Modulationen (z.B. **Zweiseitenbandmodulation oder Amplitudenmodulation**) wird die **Information mittels der Amplitude** umgesetzt:

$$\text{Information } v(t) \implies \hat{c}_T(t).$$

Eine Alternative ist die Amplitude konstant zu lassen, d.h. $\hat{c}_T(t) = \text{const.} = 1, \forall t$ und die **Information mittels des momentanen Trägerwinkels** $\Phi_T(t)$ zu übertragen. Für das Trägersignal gilt dann bei $c_T(t) = \cos(\Phi_T(t))$

□ für die **Momentan-Phase**

$$\Phi_T(t) \neq \omega_T t + \varphi_T, \text{ mit } \omega_T, \varphi_T = \text{const.}$$

□ bzw. für die **Momentan-Frequenz**

$$\Omega_T(t) = \frac{d\Phi_T(t)}{dt} \neq \omega_T = \text{const.}$$

Phasen- und Frequenzmodulation – Teil 1

Definitionen:

Die anschaulichste Art der Winkelmodulation ist die **Phasenmodulation** (PM). Für sie gilt:

$$\Phi_T(t) = \omega_T t + k 2\pi v(t).$$

Durch Differenzieren ergibt sich daraus für die **Momentan-Frequenz**

$$\Omega_T(t) = \omega_T + k 2\pi \frac{dv(t)}{dt}.$$

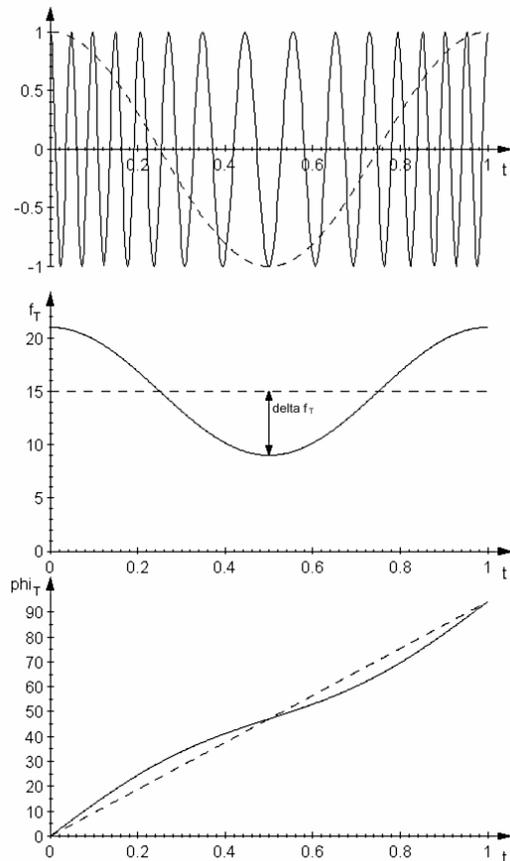
Die gängigste Art der Winkelmodulation ist die **Frequenzmodulation** (FM). Für sie gilt:

$$\Omega_T(t) = \omega_T + k 2\pi v(t).$$

Durch Integrieren erhält man daraus für die **Momentan-Phase**

$$\Phi_T(t) = \omega_T t + k 2\pi \int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

Frequenzmodulation – Beispiel:



Die durchgezogene Linie stellt das frequenzmodulierte Signal $c_T(t)$ dar. Gestrichelt ist $v(t)$ dargestellt.

Hier ist **Momentanfrequenz** dargestellt.

Dieses Bild zeigt die **Momentanphase**.

Bildquelle: Wikipedia

Systemeigenschaften

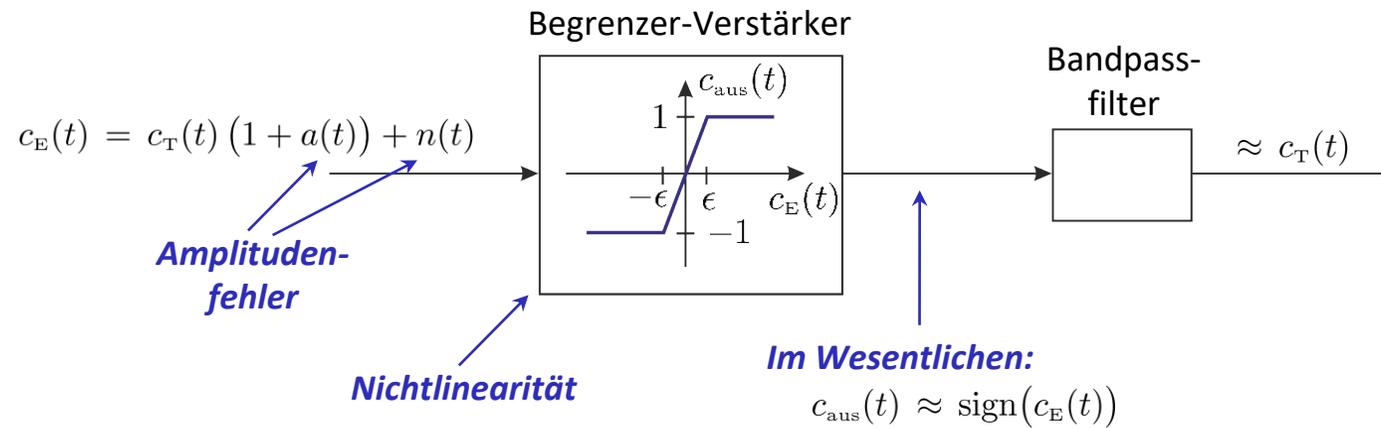
Grundlegende Eigenschaften:

- ❑ Im Sinne der **Wirkung** bestehen zwischen Frequenz- bzw. Phasenmodulation auf der einen Seite und den bisher vorgestellten Modulationsarten **keine Unterschiede**.
- ❑ Keine Unterschiede in den „Systemcharakteristiken“ gemäß der vorherigen Abschnitte dieser Vorlesung:
 - ❑ kontinuierliches System, deterministisch, stabil, dynamisch (= gedächtnisbehaftet),
 - ❑ nicht-kausal und nicht-passiv, wenn man den nicht-modulierten Träger als Reaktion auf $v(t) \equiv 0$ auffasst (siehe auch AM),
 - ❑ verschiebungs- bzw. zeitvariant (wie alle Modulationen),
 - ❑ nicht-linear, d.h. der Überlagerungssatz gilt nicht!
- ❑ Aus zwei Gründen (Zeitvarianz und Nichtlinearität) gibt es **keine Reproduktion von Sinus- bzw. harmonischen Signalen** gleicher Frequenz (nicht wie bei LTI-Systemen).
- ❑ Offensichtliche gemeinsame Eigenschaft von PM und FM: konstante Amplitude. Dadurch entstehen zwei Vorteile:
 - ❑ **konstante Aussteuerung des Sendesignals** und
 - ❑ **verbesserte Störfestigkeit**.

Amplituden-, Phasen- und Frequenzfehler – Teil 1:

Bei der Übertragung von Signalen über reale Kanäle entstehen zum einen zeitvariante Amplitudenfehler, zum anderen aber auch Verschiebungen der Träger-Nulldurchgänge.

- Amplitudenfehler sind bei Winkelmodulation unkritisch: \hat{c}_T ist „eigentlich konstant für alle Zeiten t “. Wird eine schwankende Amplitude empfangen, so kann diese Verfälschung (weitgehend) eliminiert werden durch einen sog. **Begrenzer-Verstärker** mit anschließendem **Bandpassfilter**:



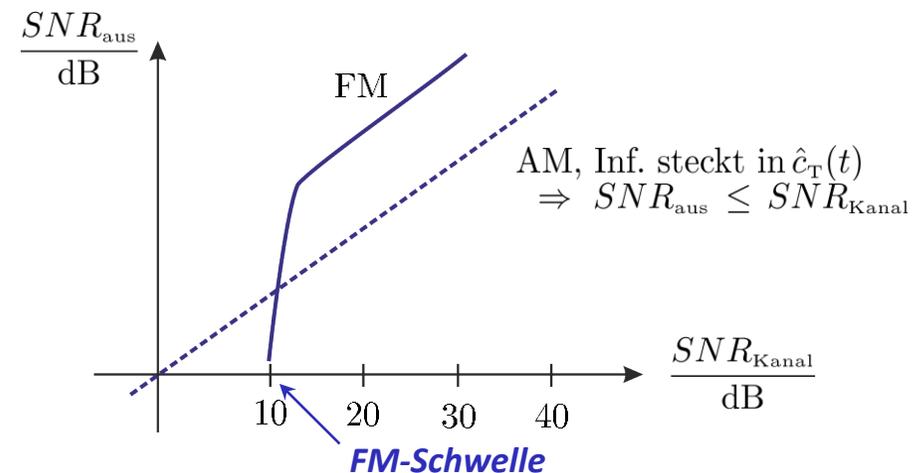
Amplituden-, Phasen- und Frequenzfehler – Teil 2:

Fortsetzung ...

- Verbleibende Fehler entstehen durch Nulldurchgangsverschiebungen von $c_{\text{aus}}(t)$ gegenüber denen von $c_{\text{T}}(t)$. Dies wirkt sich als Phasen- und Frequenzänderungen aus, was zu einer Verfälschung der zu übertragenden Information führt.

Solche Verfälschungen sind allerdings bei hinreichend großer Trägerfrequenz ω_{T} relativ klein, solange die Störungen eine gewisse Grenze nicht übersteigen.

Vorteile gegenüber linearer Modulation:
 Besserer Störabstand bis zur sog. FM-Schwelle
 (siehe Graphik rechts).



Winkeldemodulation – Teil 1

Allgemeines:

Grundprinzip: Es muss die Information $v(t)$ aus dem Argument eines Sinus-Signals wiedergewonnen werden.

□ *Theoretischer Ansatz:*

Zunächst **Differenzieren** von $c_T(t)$ und anschließend linear demodulieren, aber auch mittels der **Einhüllenden-Demodulation**, die bei der Amplitudendemodulation verwendet wurde.

□ *Praktische Realisierung:*

Man verwendet ein näherungsweise differenzierendes Filter mit einem Frequenzgang

$$H_{\text{diff}}(j\omega) \approx j\omega.$$

Dies muss zumindest im Bereich $\omega \approx \omega_T$ gelten.

Phasendemodulation:

Als ungestörtes Empfangssignal erhält man

$$c_T(t) = \cos(\underbrace{\omega_T t + k 2\pi v(t)}_{\Phi_T(t)}).$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$\frac{d}{dt}c_T(t) = -\left[\omega_T + k 2\pi \frac{dv(t)}{dt}\right] \sin(\Phi_T(t)).$$

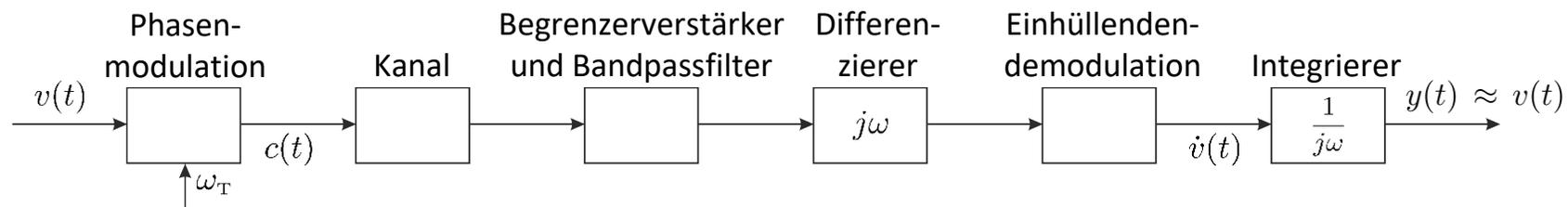
AM-Signal, allerdings mit variierender Trägerfrequenz!

Eine Einhüllenden-Demodulation liefert

$$[\omega_T + k 2\pi \dot{v}(t)].$$

Hieraus ergibt sich durch Entfernen des Gleichanteils, Gewichtung und Integration schließlich $v(t)$.

Gesamt-Blockschaltbild:



Frequenzdemodulation – Teil 1:

Als ungestörtes Empfangssignal erhält man

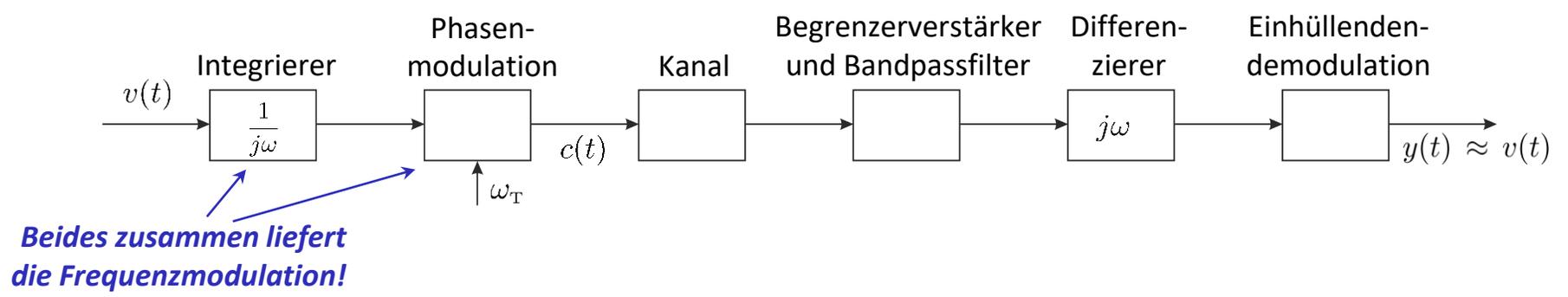
$$c_T(t) = \cos \left(\underbrace{\omega_T t + k 2\pi \int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau}_{\Phi_T(t)} \right).$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$\frac{d}{dt} c_T(t) = - [\omega_T + k 2\pi v(t)] \sin (\Phi_T(t)).$$

Eine Einhüllenden-Demodulation liefert daraus wieder $v(t)$.

Gesamt-Blockschaltbild:



FM-Spektren und FM-Bandbreite – Teil 1

Allgemeines – Teil 1:

Die Berechnung des Spektrums im Falle allgemeiner Signale ist nicht direkt möglich.
Deshalb betrachten wir zunächst den einfachen Fall einer

□ **Sinus-Träger-Frequenzmodulation mit einem Sinus-Signal als zu übertragende „Information“:**

Wir gehen dabei von folgendem Signal aus:

$$c_T(t) = \cos\left(\omega_T t + k 2\pi \int_{-\infty}^t \underbrace{v(\tau)}_{\hat{v} \cos(\omega_1 \tau)} d\tau\right) = \operatorname{Re}\left\{ \underbrace{e^{j\omega_T t} e^{jk2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)}}_{\tilde{c}(t) e^{j\omega_T t}} \right\}.$$

Eine genauere Betrachtung erlaubt es dabei, eine Vorstellung von den spektralen Effekten, die bei Winkelmodulationen auftreten, zu erhalten.

Nach Elimination des Drehterms kann man zur „üblichen“ Zeiger-Darstellung übergehen:

$$\tilde{c}(t) = e^{jk2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)}.$$

Allgemeines – Teil 2:

Offensichtlich gilt für die Zeigeranalyse $\tilde{c}(t + \lambda 2\pi/\omega_1) = \tilde{c}(t)$, d.h. es entsteht ein periodisches Signal mit der Periodendauer $2\pi/\omega_1 = T_1$ (also der gleichen Periode wie $v(t)$).

Anschaulich kann dies als pendelnder Zeiger interpretiert werden, dessen maximaler Winkel-Ausschlag als

$$\eta = k 2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1}$$

angegeben werden kann. Man verwendet dabei folgende Bezeichnungen:

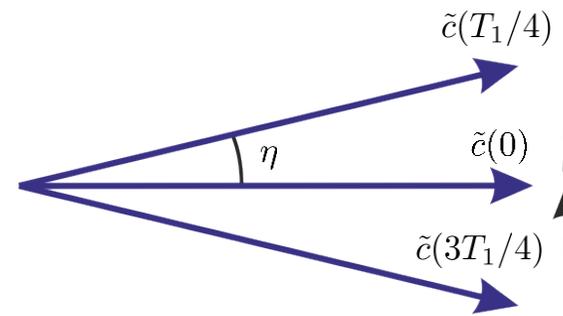
- Frequenzhub:

$$\Delta f = k \hat{v}.$$

- Modulationsindex:

$$\eta = k 2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1} = \frac{\Delta f}{f_1}.$$

$$\tilde{c}(t) = e^{jk2\pi \frac{\hat{v}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)}$$



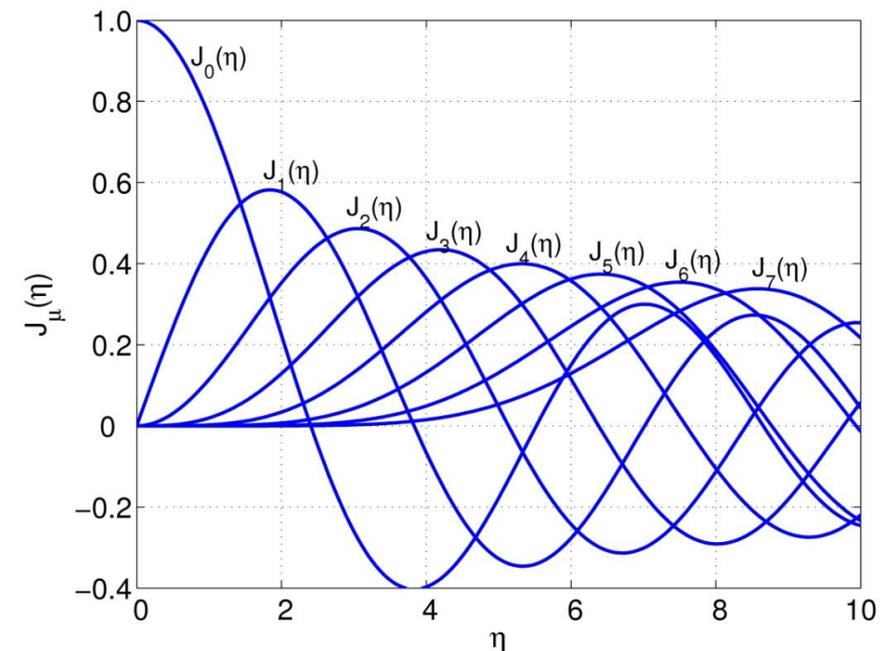
Allgemeines – Teil 3:

Bekanntlich kann man **periodische Signale** durch **Fourier-Reihen** darstellen – das gilt natürlich auch für diesen pendelnden Zeiger $\tilde{c}(t)$. Man findet die Fourier-Reihen-Koeffizienten am einfachsten mit Hilfe der **Potenz-Reihe für e^x** . Die dabei entstehenden Terme kann man in geeigneter Weise mit sog. „Besselfunktionen“ $J_\mu(\eta)$ zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t) &= e^{j\eta \sin(\omega_1 t)} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(\eta) e^{j\mu\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Die Reihenkoeffizienten bei $\mu\omega_1$ hängen vom Modulationsgrad η ab, mit

$$\eta \sim \frac{\hat{v}}{f_1}.$$



FM-Spektren und FM-Bandbreite – Teil 4

Allgemeines – Teil 4:

Insgesamt gilt damit für das modulierte Signal:

$$c_T(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{j[(\omega_T + \mu\omega_1)t]} J_{\mu}(\eta) \right\},$$

wobei für die Besselfunktionen

$$J_{-\mu}(\eta) = (-1)^{\mu} J_{\mu}(\eta)$$

beachtet werden kann. Als Konsequenz ergibt sich damit für die Frequenzmodulation eines Sinus-Signals ein unendlich breites Spektrum (mit jeweils monofrequenten Anteilen) mit Komponenten bei $\pm[\omega_T, \omega_T \pm \omega_1, \omega_T \pm 2\omega_1, \dots]$.

Da die Besselfunktionen aber mit zunehmendem μ kleiner werden, konzentriert sich das Spektrum um ω_T .

Allgemeines – Teil 5:

□ **Allgemeines „FM-Spektrum“:**

Wegen der Nichtlinearität der Winkelmodulation kann man das modulierte Signalspektrum nicht direkt angeben, anschaulich gilt aber:

Man erhält eine unendliche Verbreiterung des zur Trägerfrequenz ω_T verschobenen Spektrums.

□ **Bandbreitenabschätzung:**

Das theoretisch unendlich breite Spektrum lässt sich nach Carson abschätzen durch die Breite des Bandes, das bei Sinus-Signal-Modulation 99 % der Energie von $c_T(t)$ enthält:

$$\sum_{\mu=-\mu_{\max}}^{\mu_{\max}} J_{\mu}^2(\eta) = 0,99.$$

Dies führt auf

$$\mu_{\max} = \eta + 2.$$

Jeweils rechts und links von $\pm\omega_T$ sind $2\mu_{\max}$ Linien im Abstand von ω_1 zu berücksichtigen. Daraus ergibt sich ein Bandbreitenbedarf eines Signals (bzw. Teilnehmers) von $\omega_B = 2(\eta + 2)\omega_1$.

FM-Spektren und FM-Bandbreite – Teil 6

Allgemeines – Teil 6:

Bemerkungen und Interpretation der Carson-Bandbreite:

- FM wird (u.a.) im UKW-Rundfunk angewandt, als Trägerfrequenzen werden etwa $f_T = 100$ MHz verwendet, als Frequenzhub wird $\Delta f = 75$ kHz verwendet.
- Die dort übertragenen Frequenzbänder (Musik, Sprache) belegen etwa den Bereich von 30 Hz bis 15 kHz.
- Gemäß der Abschätzung ergibt sich eine Bandbreite von

$$f_B = 2(\eta + 2)f_1 = 2\left(\frac{\Delta f}{f_1} + 2\right)f_1.$$

- Für die beiden Grenzen (30 Hz bzw. 15 kHz) ergeben sich dabei Bandbreiten von ca. 150 kHz (für Signalanteile mit 30 Hz) bzw. 210 kHz (für Signalanteile mit 15 kHz).

Abschließende Zusammenfassung – Teil 1

- Signale und Systeme – Einführung
- ...
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Nichtlineare Modulation
 - Digitalisierung
 - Winkelmodulation**
 - Allgemeines*
 - Phasen- und Frequenzmodulation (PM und FM)*
 - Systemeigenschaften*
 - Einfluss von Störungen*
 - Winkeldemodulation*
 - FM-Spektren und FM-Bandbreite*
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- ...

Abschließende Zusammenfassung – Teil 2

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen**
 - Lineare Modulation**
 - Nichtlineare Modulation**
 - Digitalisierung**
 - Winkelmodulation**
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- Stochastische Signale und ihre Spektren
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- Idealisierte Systeme
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen