

Signale und Systeme – Systembeschreibung im Zustandsraum

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum**
- Stochastische Signale und ihre Spektren
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- Idealisierte Systeme
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen



Inhalt des Abschnitts über Zustandsraumbeschreibungen

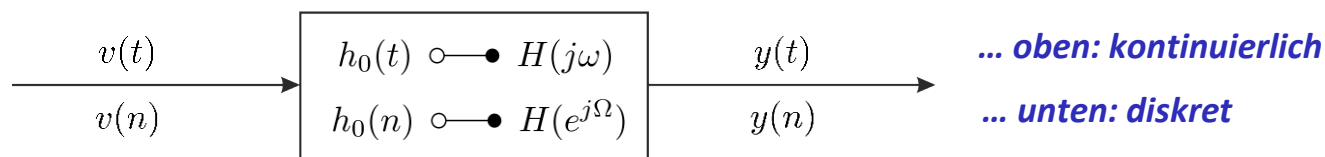
-
- Modulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum**
 - Grundlagen und Grundstruktur der Zustandsraumbeschreibung**
 - Speicherelemente**
 - Signalflussgraphen**
 - Übertragungs-, Impulsantwort- und Übergangsmatrizen**
 - Matrizenformen**
- Stochastische Signale und ihre Spektren
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- Idealisierte Systeme
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen

Einschränkung:

Die in diesem Kapitel angestellten Überlegungen *beschränken* sich auf *lineare, verschiebungsinvariante, dynamische, kausale Systeme*.

Bisheriges Vorgehen:

Es wurde eine Eingangs-Ausgangs-Beschreibung



als bekannt angenommen. Das „*Innenleben*“ des Systems wurde z.B. durch seine Impulsantwort oder durch seinen Frequenzgang beschrieben.

Netzwerkanalyse und -synthese:

Ist ein (z.B. elektrotechnisches) System gegeben (z.B. eine Schaltung mit R-, L-, C-Elementen), so ermittelt man dabei oftmals „innere“ Größen (z. B. Ströme und Spannungen) und bestimmt daraus dann die Übertragungsfunktion oder die Impulsantwort.

Dies wird verallgemeinert als „**Netzwerkanalyse**“ bezeichnet.

Ist umgekehrt die Systembeschreibung in Form einer Eingangs-Ausgangs-Beziehung, z.B. mittels des Frequenzgangs, gegeben, so kann daraus auf den Aufbau im „Inneren“ geschlossen werden und z.B. für elektrotechnische Systeme eine Schaltungsrealisierung vorgeschlagen werden.

Dies wird verallgemeinert als „**Netzwerksynthese**“ bezeichnet.

Was wir im Folgenden versuchen wollen, ist eine abstrakte Beschreibung des „Innenlebens“ mit einer **allgemeingültigen Beschreibungsform** und einer unmittelbaren Realisierungsmöglichkeit mit Hilfe bestimmter (auch elektrotechnisch aufgebauter) Grundbausteine.

Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 1:

Allgemeine Annahme:

Der „**Zustand eines Systems**“ ändert sich in Abhängigkeit vom „Ist-Zustand“ des Systems $x(t)$ bzw. $x(n)$ und von der äußeren Einwirkung der **Eingangssignale**:

$$v_l(t) \text{ bzw. } v_l(n) \text{ mit } l \in \{0, 1, \dots, L-1\}.$$

Die Eingangssignale werden im **Eingangsvektor**

$$\mathbf{v}(t) = [v_0(t), v_1(t), \dots, v_{L-1}(t)]^T \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{v}(n) = [v_0(n), v_1(n), \dots, v_{L-1}(n)]^T$$

zusammengefasst.

Die interessierenden Signale $y_r(t)$ bzw. $y_r(n)$ mit $r \in \{0, 1, \dots, R-1\}$ fasst man zum **Ausgangsvektor** zusammen:

$$\mathbf{y}(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_{R-1}(t)]^T \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{y}(n) = [y_0(n), y_1(n), \dots, y_{R-1}(n)]^T.$$

Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 2:

Analog zum Eingangs- und Ausgangsvektor werden die einzelnen Systemzustände $x_i(t)$ bzw. $x_i(n)$ zu einem **Zustandsvektor**

$$\mathbf{x}(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)]^T \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{x}(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{N-1}(n)]^T.$$

zusammengefasst. Die einzelnen Zustände kann man sich als „Speichereinheiten“ vorstellen (für die gesamte Vergangenheit). Sie sind verantwortlich für das weitere Verhalten des Systems, abgesehen von äußeren Einwirkungen.

Die Zustände beschreiben somit das „**Eigenverhalten**“ eines Systems.

Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 3:

Mit dieser Nomenklatur folgt die bereits im ersten Teil dieser Vorlesung eingeführte **allgemeine Zustandsbeschreibung** (siehe Folien des Einführungsteils aus „Signale und Systeme – Teil 1“).

Für den **kontinuierlichen** Fall erhalten wir ein **Differentialgleichungssystem**:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)),$$

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)).$$

Im **diskreten** Fall ergibt sich ein **Differenzgleichungssystem**:

$$\mathbf{x}(n + 1) = f(\mathbf{x}(n), \mathbf{v}(n)),$$

$$\mathbf{y}(n) = g(\mathbf{x}(n), \mathbf{v}(n)).$$

Man beachte hierbei die zu Beginn dieses Abschnitts eingeführte Einschränkung auf lineare, verschiebungsinvariante, dynamische, kausale Systeme.

Als Folge davon müssen die Funktionen $g(\dots)$ und $f(\dots)$ linear in Bezug auf $\mathbf{x}(\dots)$ und $\mathbf{v}(\dots)$ sein. Außerdem dürfen die Parameter der Funktionen nicht von der Zeit abhängen (Verschiebungsinvarianz!).

Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 4:

Durch die zuvor genannte Einschränkung kann man folgenden Ansatz für die Zustandsbeschreibung von linearen, zeitinvarianten Systemen ansetzen.

□ **Kontinuierlich:**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{v}(t).\end{aligned}$$

□ **Diskret:**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \mathbf{v}(n), \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \mathbf{v}(n).\end{aligned}$$

Die Größen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} müssen offenbar Matrizen sein, welche Linearkombinationen der Elemente $x_r(t)$ und $v_l(t)$ bzw. $x_r(n)$ und $v_l(n)$ beschreiben. Die Dimensionen der Matrizen folgen aus dem o.g. Ansatz:

- $\mathbf{A} : [N \times N]$,
- $\mathbf{B} : [N \times L]$,
- $\mathbf{C} : [R \times N]$,
- $\mathbf{D} : [R \times L]$.

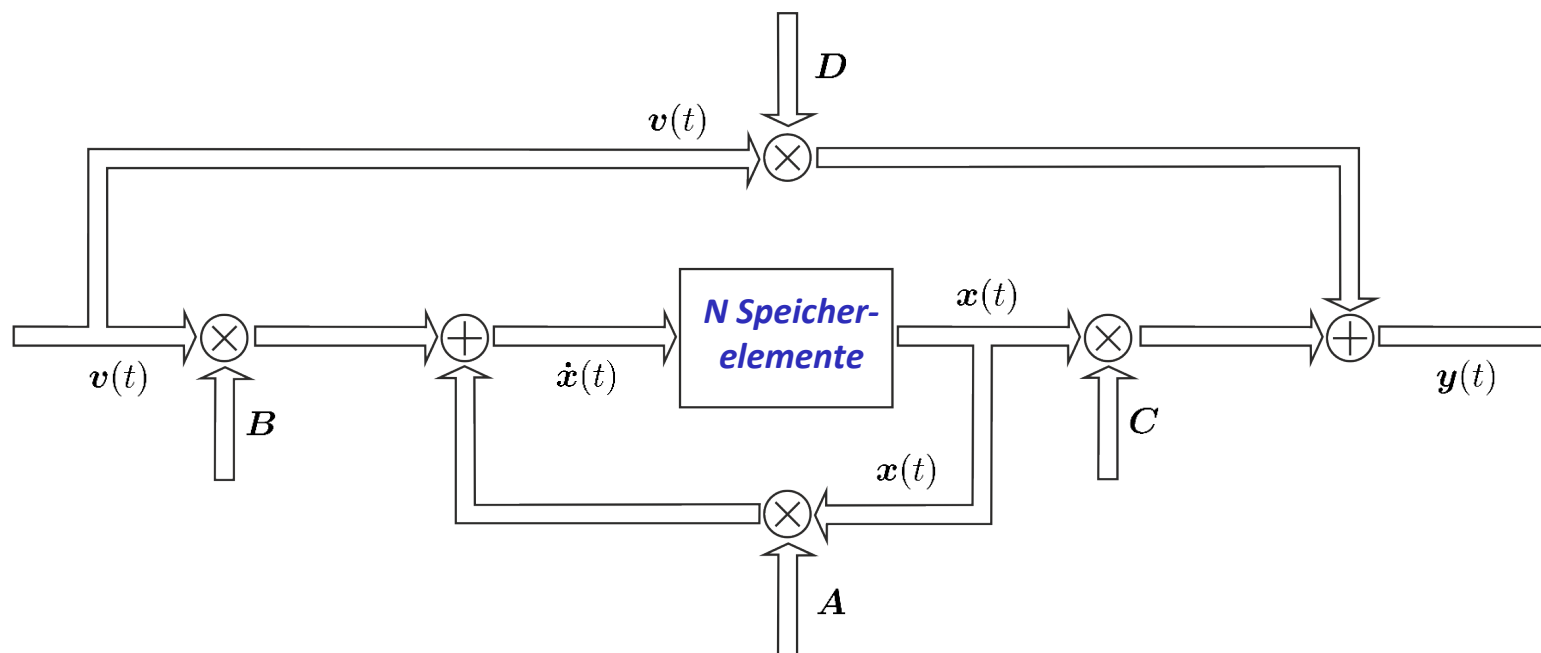
Beispiel für eine $[I \times J]$ -Matrix (I Zeilen, J Spalten):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,j} & \dots & m_{0,J-1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,J-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{I-1,0} & m_{I-1,1} & \dots & m_{I-1,j} & \dots & m_{I-1,J-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} : [I \times J].$$

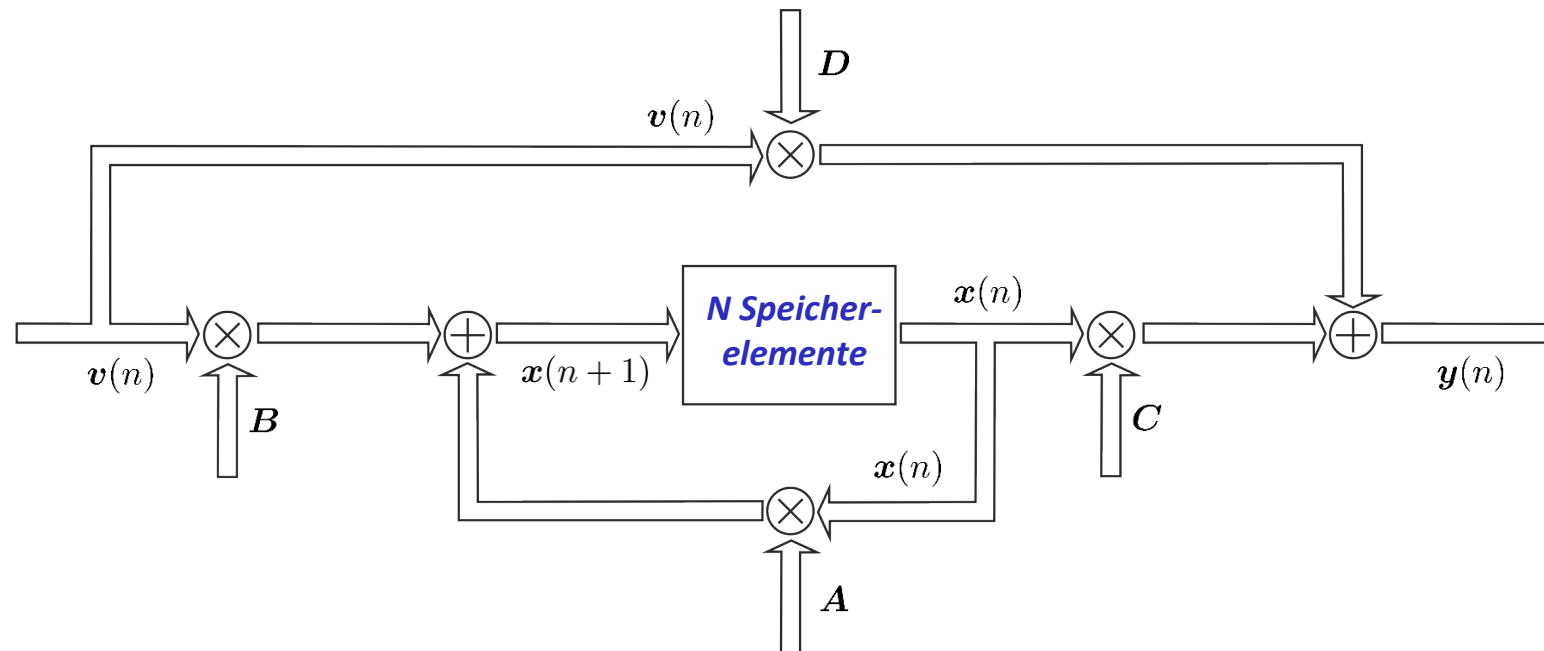
Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 5:

Übersichtsdarstellung für *kontinuierliche* Systeme:



Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 6:

Übersichtsdarstellung für *diskrete* Systeme:



Beschreibung eines Systems im Zustandsraum – Teil 7:

Bezeichnungen der einzelnen Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
 \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t), \\
 \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{v}(t).
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \swarrow \text{„Zustands-} \\
 \text{gleichung“} \\
 \searrow \\
 \swarrow \text{„Ausgangs-} \\
 \text{gleichung“} \\
 \searrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \mathbf{v}(n), \\
 \mathbf{y}(n) = \mathbf{C} \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \mathbf{v}(n).
 \end{array}$$

Zusammen wird beides als „Zustands-
beschreibung“ bzw. „Zustands-
gleichungen“ bezeichnet.

Bedeutung der einzelnen Matrizen:

- \mathbf{A} : Rückführungen (Systemverhalten ohne äußere Einwirkungen), beschreibt das Eigenverhalten, wird „**Systemmatrix**“ genannt)
- \mathbf{B} : Einkopplung des Eingangssignals (Ansteuerung des Systems, wird „**Eingangsmatrix**“ genannt)
- \mathbf{C} : Auskopplung des Systems (Beobachtung des Systems, wird „**Ausgangsmatrix**“ genannt)
- \mathbf{D} : Direktverbindung vom Eingang zum Ausgang (Durchgriff des Systems, wird „**Durchgangsmatrix**“ genannt)

Speicherelemente – Teil 1

Grundlagen (für kontinuierliche Systeme):

Speicherelemente sind „anschauliche“ Realisierungen von Zustandsgrößen, die das Systemverhalten ohne äußere Einflüsse bestimmen. Diese **Zustandsgrößen** beschreiben in physikalischen Systemen (z.B. elektrischen oder mechanischen) im Allgemeinen die **gespeicherte Energie**.

Beispiele – Teil 1:

In elektrischen Schaltungen tritt Energie in Form von elektrischen und magnetischen Feldern auf. Man muss hier also Kapazitäten und Induktivitäten betrachten.

□ **Kapazität:**

- Für die gespeicherte Energie gilt: $w_c(t) = C/2 u_c^2(t)$.
- Die Speicherausgangsgröße (die Zustandsgröße) ist hier $u_c(t)$.
- Die Zustandsänderung entspricht dem Speicher-Eingang $i_c(t) \sim \dot{u}_c(t)$
(die Energie wird durch gespeicherte Ladung bestimmt, die Ladung ist proportional zu $u_c(t)$, die Ladungsänderung entspricht einem Strom $i_c(t) \sim \dot{u}_c(t)$).

Beispiele – Teil 2:

Elektrische Schaltungen (Fortsetzung):

□ **Kapazität** (Fortsetzung):

- Es gilt folgender Zusammenhang:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau=-\infty}^t i_c(\tau) d\tau.$$

- Fazit:
- Speicher entspricht einem Integrierer-Element!**

□ **Induktivität:**

- Für die gespeicherte Energie gilt: $w_L(t) = L/2 i_L^2(t)$.
- Die Speicherausgangsgröße (die Zustandsgröße) ist hier $i_L(t)$.
- Die Zustandsänderung entspricht dem Speicher-Eingang $u_L(t) \sim \frac{d}{dt} i_L(t)$.

Speicherelemente – Teil 3

Beispiele – Teil 3:

Elektrische Schaltungen (Fortsetzung):

□ **Induktivität** (Fortsetzung):

□ Es gilt folgender Zusammenhang:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{\tau=-\infty}^t u_L(\tau) d\tau.$$

□ Fazit: **Speicher entspricht wieder einem Integrierer-Element!**

Auch für **mechanische Systeme** kann man analoge Überlegungen anstellen – die Zusammenhänge lassen sich stets durch **Integrierer**-Bausteine beschreiben. Allgemein gilt dabei immer:

$$x_i(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \dot{x}_i(\tau) d\tau.$$

Im **Laplace**-Bereich lässt sich dies durch eine Multiplikation mit $\frac{1}{s}$ beschreiben!

Grundlagen (für diskrete Systeme):

Diskrete (bzw. digitale) Systeme enthalten keine Energiespeicher im selben Sinn wie kontinuierliche Systeme, sehr wohl aber Speicher im Sinne von (digitalen Daten-) Speicherzellen, die in einem Takt beschrieben und im nächsten Takt gelesen werden können:

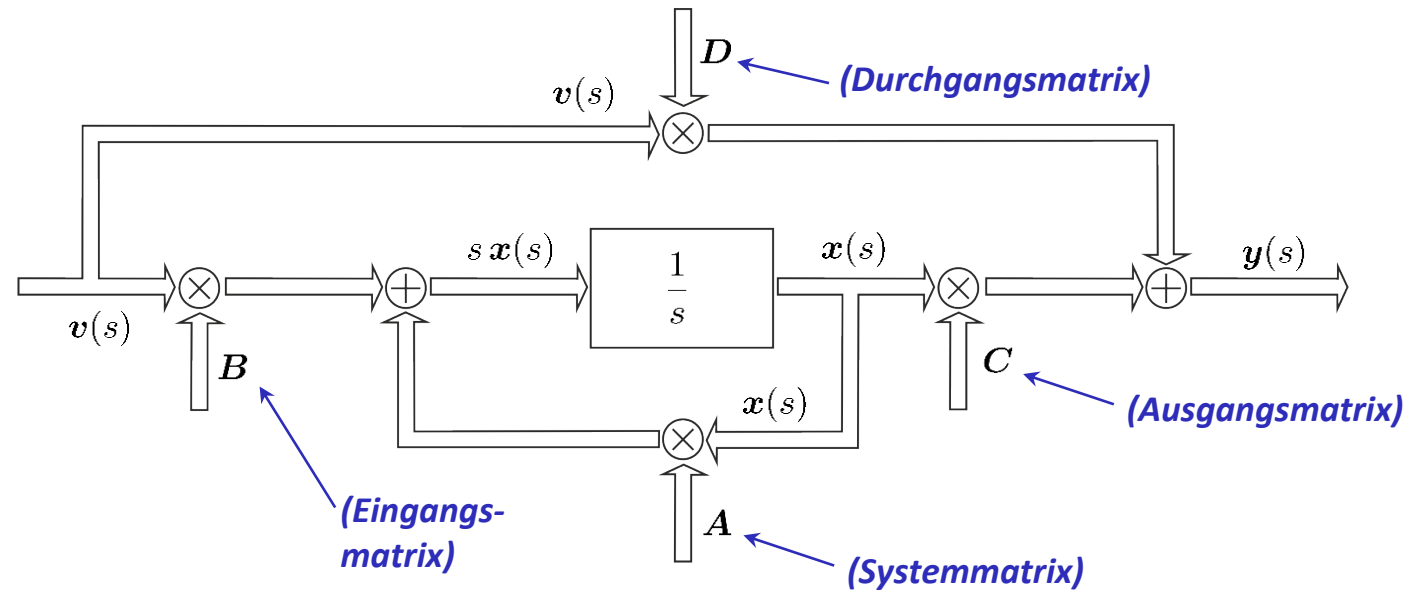
Im Takt n steht am Speicher**ausgang** $x_i(n)$ zur Verfügung, am Speicher**eingang** liegt der Wert an, welcher im Takt $n + 1$ am Ausgang sein wird.

Damit wird eine **Verzögerung** oder allgemeiner eine **Verschiebung** beschrieben. Im **z -Bereich** entspricht dies einer Übertragungsfunktion von

$$H(z) = \frac{1}{z} = z^{-1}.$$

Übersichtsdarstellung im Frequenzbereich – Teil 1:

Fassen wir unsere bisherigen Überlegungen zusammen, so ergibt sich folgendes **Übersichtsdiagramm** für die Zustandsraumdarstellung im **Laplace**-Bereich:



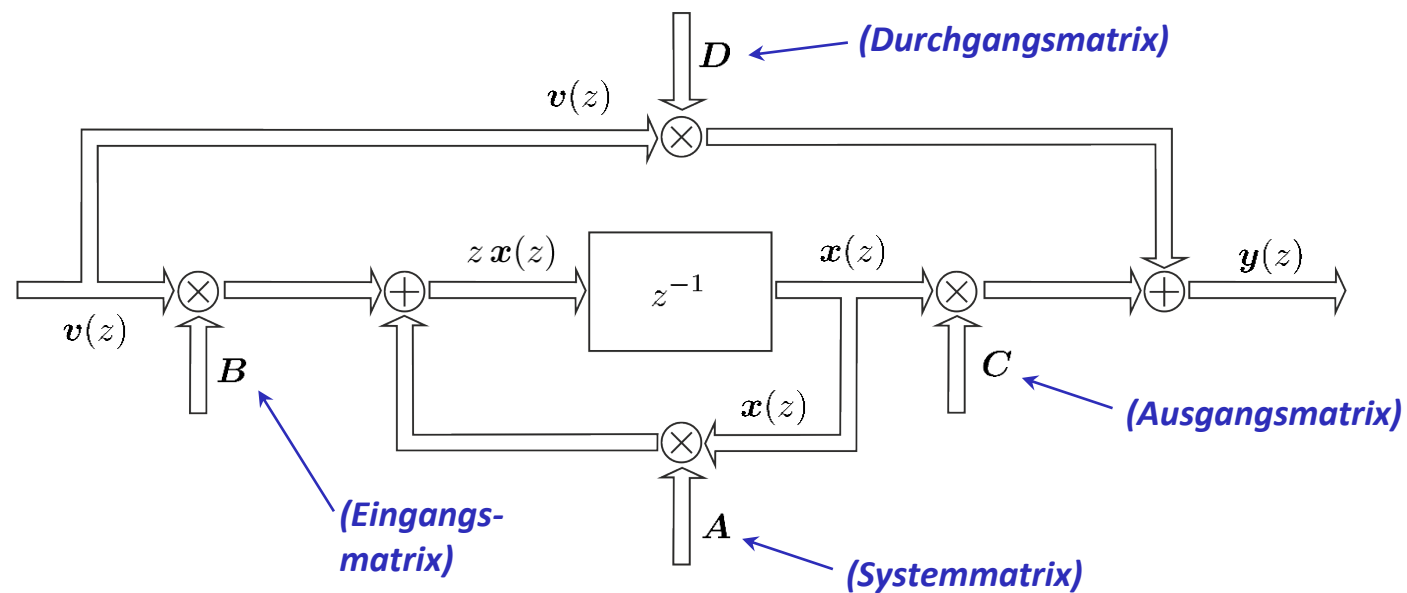
Dabei gilt:

$$\mathbf{v}(s) = [V_0(s), V_1(s), \dots, V_{L-1}(s)]^T, \quad \mathbf{y}(s) = [Y_0(x), Y_1(s), \dots, Y_{R-1}(s)]^T.$$

$$\mathbf{x}(s) = [X_0(s), X_1(s), \dots, X_{N-1}(s)]^T,$$

Übersichtsdarstellung im Frequenzbereich – Teil 2:

Für den *z*-Bereich ergibt sich folgende Übersicht:



Dabei gilt:

$$\mathbf{v}(z) = [V_0(z), V_1(z), \dots, V_{L-1}(z)]^T,$$

$$\mathbf{x}(z) = [X_0(z), X_1(z), \dots, X_{N-1}(z)]^T,$$

$$\mathbf{y}(z) = [Y_0(z), Y_1(z), \dots, Y_{R-1}(z)]^T.$$

$$\mathbf{x}(z) = \mathbf{A} z^{-1} \mathbf{x}(z) + \mathbf{B} z^{-1} \mathbf{v}(z),$$

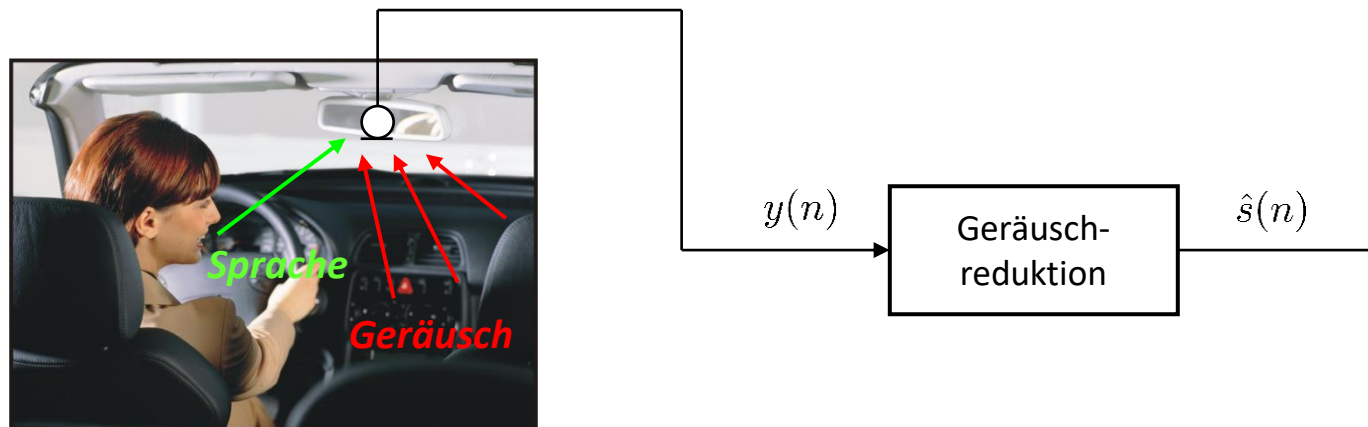
$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C} \mathbf{x}(z) + \mathbf{D} \mathbf{v}(z).$$

„Anwendungen“ für die Zustandsraumdarstellung – Teil 1

Kalman-Filter – Teil 1:

Die folgenden Beispiele beruhen auf der Dissertation von Dr.-Ing. Henning Puder. Thematisch geht es dabei um eine Geräuschreduktion für ein Freisprechsystem im Kraftfahrzeug.

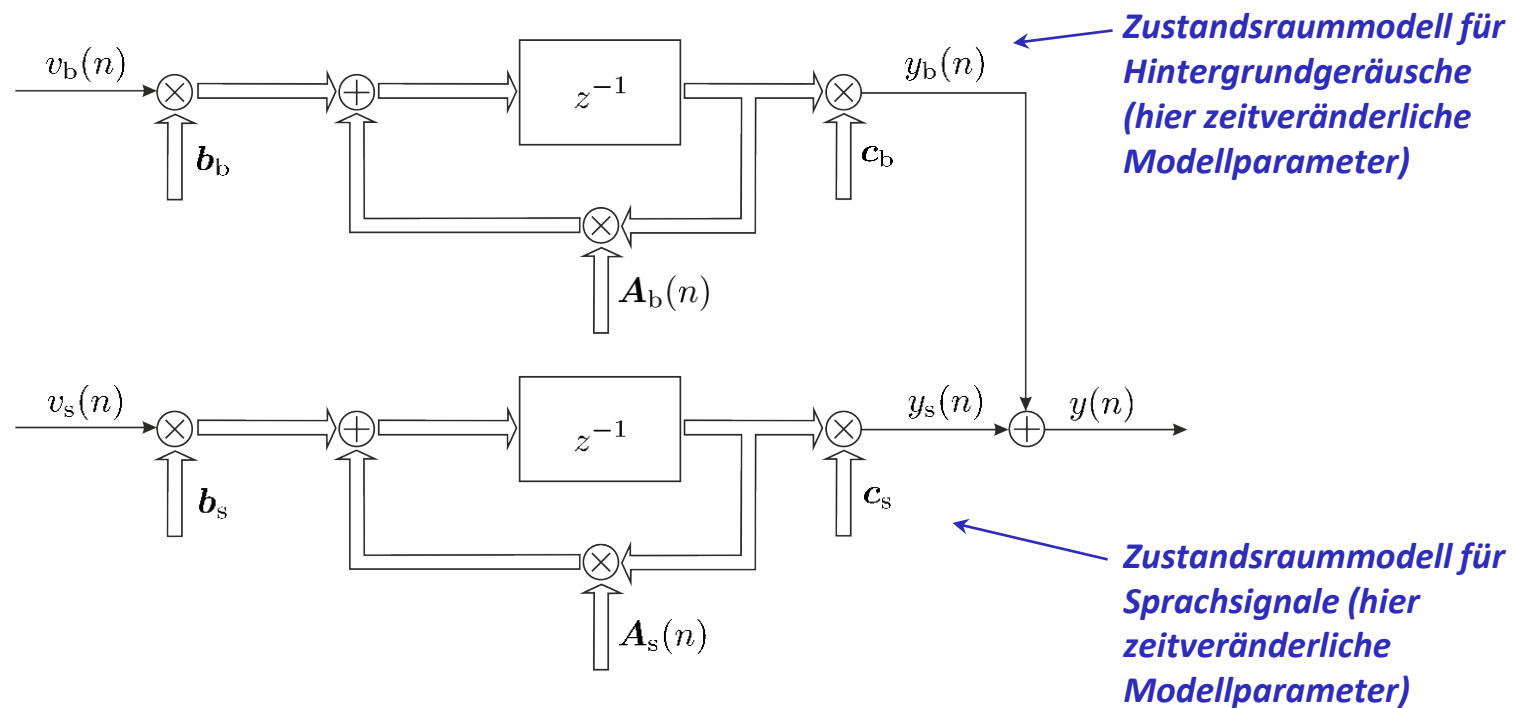
Anwendungsbeispiel:



„Anwendungen“ für die Zustandsraumdarstellung – Teil 2

Kalman-Filter – Teil 2:

Im Rahmen der Arbeiten von Herrn Puder wurden autoregressive Sprachmodelle im Zustandsraum für Sprachsignale und für Geräusche verwendet.



„Anwendungen“ für die Zustandsraumdarstellung – Teil 3

Kalman-Filter – Teil 3:

Auf der Basis der Zustandsraumdarstellung kann nun ein Algorithmus entwickelt werden, welcher das Nutzsignal optimal von der Störung trennt. Dieses sog. Kalman-Filter hat dabei folgende Eigenschaften:

- ❑ es ist ein **lineares** Filter,
- ❑ es erzeugt ein **erwartungstreues** Schätzsignal,
- ❑ der Ausgang des Filters weist eine **minimale Fehlervarianz** auf und
- ❑ das Filter kann **rekursiv** berechnet werden.

Aufgrund dieser Eigenschaften wird dieses Optimalfilter sehr häufig eingesetzt. Vor allem in der Regelungstechnik spielt es eine wichtige Rolle.

Kalman-Filter – Teil 4:

Rudolf Emil Kálmán (* 19. Mai 1930 in Budapest) ist ein ungarisch-US-amerikanischer Mathematiker. Er entwickelte 1960 das nach ihm benannte Kalman-Filter.

Kálmán wurde in Budapest geboren, wanderte jedoch in die USA aus und studierte dort am Massachusetts Institute of Technology, wo er 1954 seinen Master-Titel erhielt. Einen Dokortitel erhielt er 1957 an der Columbia University, zu der er nach seinem Abschluss am MIT wechselte. Er arbeitete von 1958 bis 1964 am Institute for Advanced Study und erhielt 1964 eine Professur an der Stanford University. 1971 wechselte er als Direktor des Zentrums für mathematische Systemtheorie an die University of Florida. Gleichzeitig übernahm er die Leitung des Zentrums für mathematische Systemtheorie an der ETH Zürich. 1997 wurde er an der ETH Zürich emeritiert.“

Quelle: Wikipedia

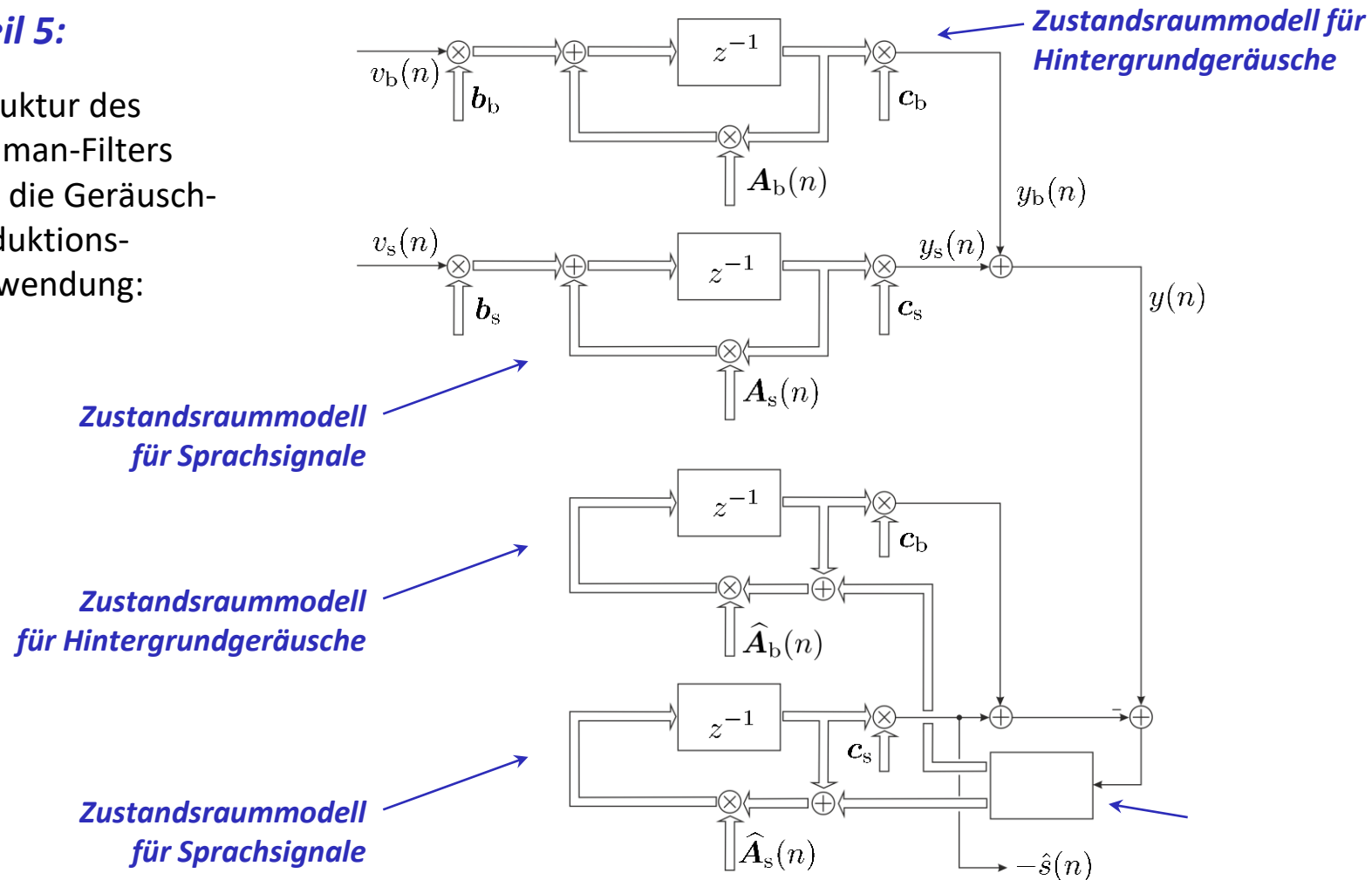


Systembeschreibung im Zustandsraum







„Anwendungen“ für die Zustandsraumdarstellung – Teil 5

Kalman-Filter – Teil 5:





Struktur des Kalman-Filters für die Geräuschreduktionsanwendung:



Beispiel 1: Stationäres Fahrzeugrauschen

<i>Sprache einer Frau</i>	<i>Sprache eines Mannes</i>
 Gestörtes Sprachsignal	 Gestörtes Sprachsignal
 Klassischer Ansatz (Wiener-Filter)	 Klassischer Ansatz (Wiener-Filter)
 Kalman-Filter	 Kalman-Filter

Beispiel 2: Instationäres Fahrzeugrauschen (Beschleunigungsvorgang)

-  Gestörtes Sprachsignal
-  Nach Unterdrückung der Motorharmonischen
-  Klassisches Wiener-Filter
-  Kalman-Filter

*Audiobeispiele mit Erlaubnis
 von H. Puder, TU Darmstadt*

Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 1

Differenzgleichung:

Ein diskretes, lineares, verschiebungsinvariantes System mit einem Eingang und einem Ausgang kann durch folgende Differenzgleichung beschrieben werden:

$$\begin{aligned}y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_{N_1} y(n-N+1) \\ = b_0 v(n) + \tilde{b}_1 v(n-1) + \tilde{b}_2 v(n-2) + \dots + \tilde{b}_{N-1} v(n-N+1).\end{aligned}$$

Zustandsraumbeschreibung:

Für die Zustandsraumbeschreibung suchen wir nun

- die **Zustandsgleichung** bzw. **Systemgleichung**, d.h. der neue Zustand ist eine Funktion des alten Zustands und des gesamten Eingangs und
- die **Ausgangsgleichung** (bzw. **Messgleichung**), d.h. der momentane Ausgang ist eine Funktion des momentanen Zustands und des Eingangs.

Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 2

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 1:

Zunächst wird das System in einen sog. Durchgriff und ein durchgriffsfreies System aufgespalten.

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) = b_0 v(n) + \tilde{b}_1 v(n-1) + \tilde{b}_2 v(n-2) + \dots + \tilde{b}_{N-1} v(n-N+1)$$

$$\Rightarrow y(n) = d v(n) + u(n)$$

mit

$$d = b_0,$$

und

$$u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + \dots + a_{N-1} u(n-N+1)$$

$$= b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2) + \dots + b_{N-1} v(n-N+1).$$

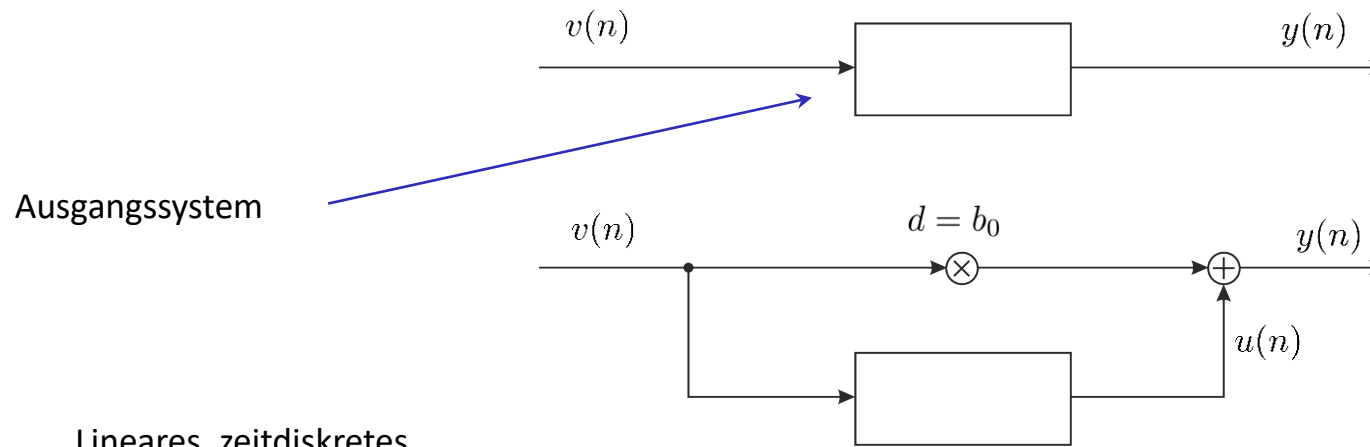
Umbenennung in Durchgriffsparameter

Neue Differenzgleichung mit neuer Ausgangsbezeichnung und „Weglassen“ des Terms $b_0 v(n)$!

Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 3

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 2:

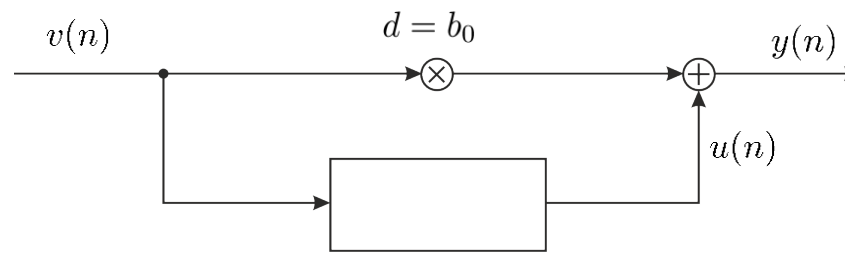
Graphische Veranschaulichung



Ausgangssystem

Lineares, zeitdiskretes,
verschiebungsinvariantes,
durchgriffsfreies System mit

der Differenzgleichung $u(n) + a_1 u(n - 1) + a_2 u(n - 2) + \dots + a_{N-1} u(n - N + 1)$
 $= b_1 v(n - 1) + b_2 v(n - 2) + \dots + b_{N-1} v(n - N + 1).$

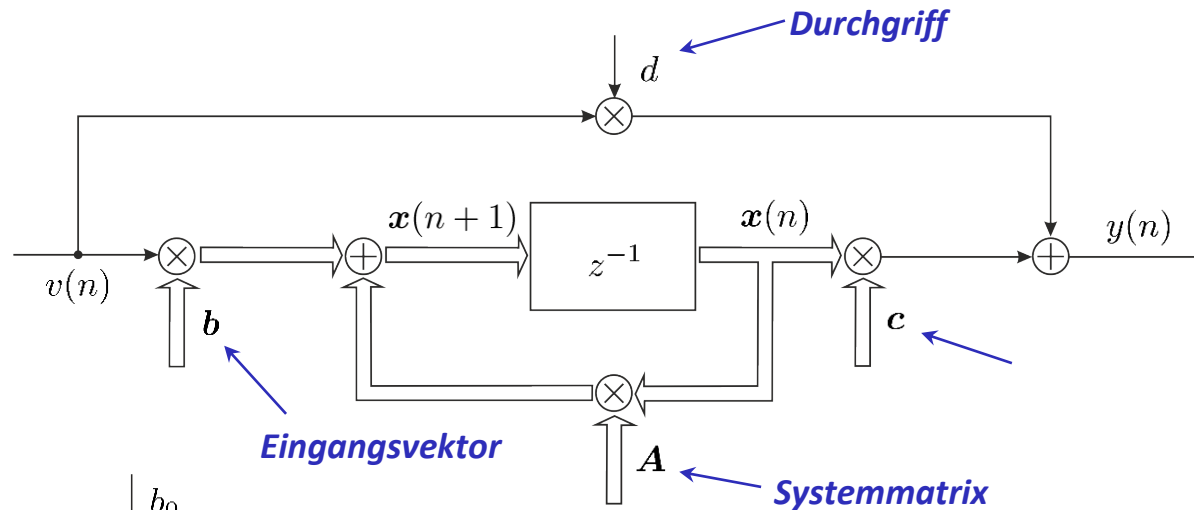


Systembeschreibung im Zustandsraum

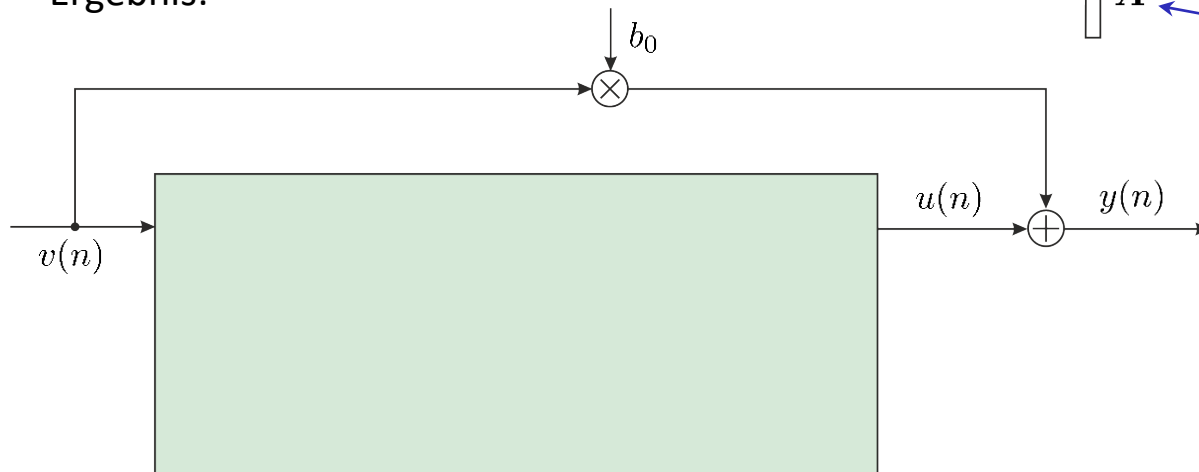
Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 4

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 3:

Zielstruktur für ein
 Eingangs- und ein
 Ausgangssignal:



Bisheriges
 Ergebnis:

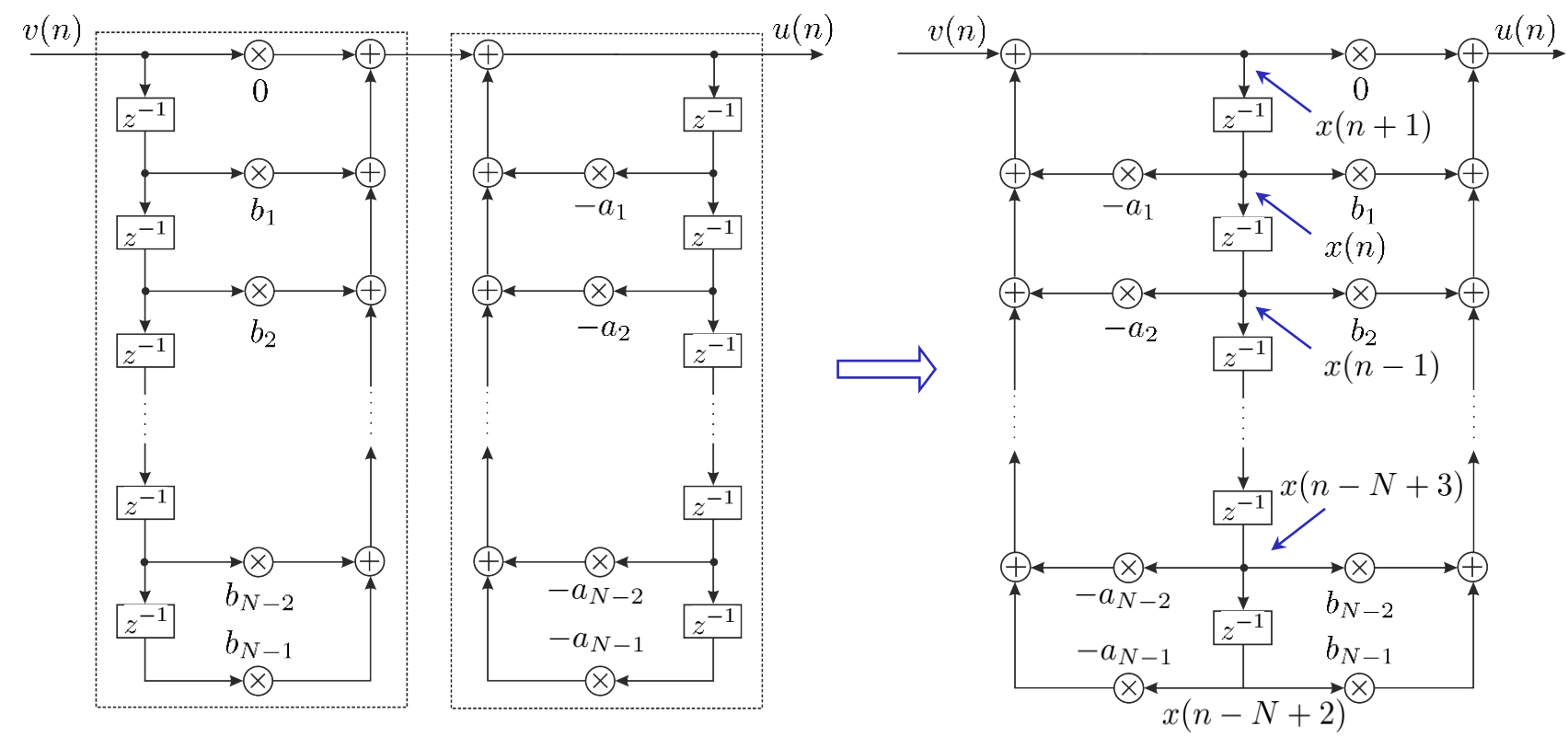


Systembeschreibung im Zustandsraum

Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 5

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 4:

Die neue Differenzgleichung wird nun von der sog. Direktform 1 in die Direktform 2 umgewandelt.
Die Speicherstellen der Direktform 2 enthalten die **Zustandsspeicher**.



Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 6

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 5:

Ausgehend von der Differenzgleichung des durchgriffsfreien Systems (Direktform 1)

$$\begin{aligned} u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + \dots + a_{N-1} u(n-N+1) \\ = b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2) + \dots + b_{N-1} v(n-N+1). \end{aligned}$$

wird diese nun wie folgt geschrieben (Direktform 2):

$$\begin{aligned} u(n) &= b_1 x(n) + b_2 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(n-N+2), \\ x(n+1) &= v(n) - a_1 x(n) - a_2 x(n-1) - \dots - a_{N-1} x(n-N+2). \end{aligned}$$

Damit wir die Gleichung $y(n) = d v(n) + u(n)$ erfüllen, definieren wir uns

$$u(n) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n),$$

mit der Ausgangsmatrix bzw. in unserem Fall dem **Ausgangsvektor**

$$\mathbf{c} = [b_1, \dots, b_{N-1}]^T$$

und dem **Zustandsvektor**

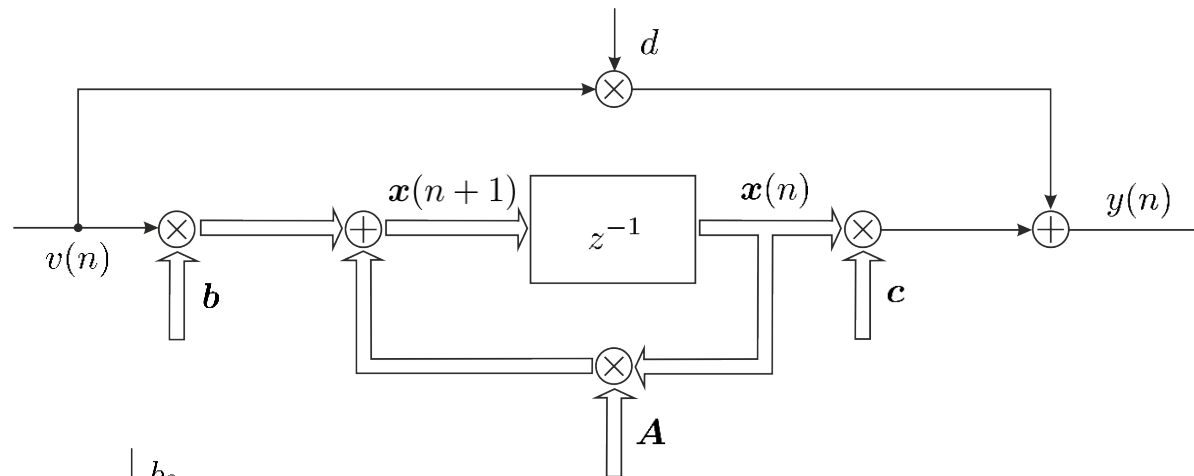
$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+2)]^T.$$

Systembeschreibung im Zustandsraum

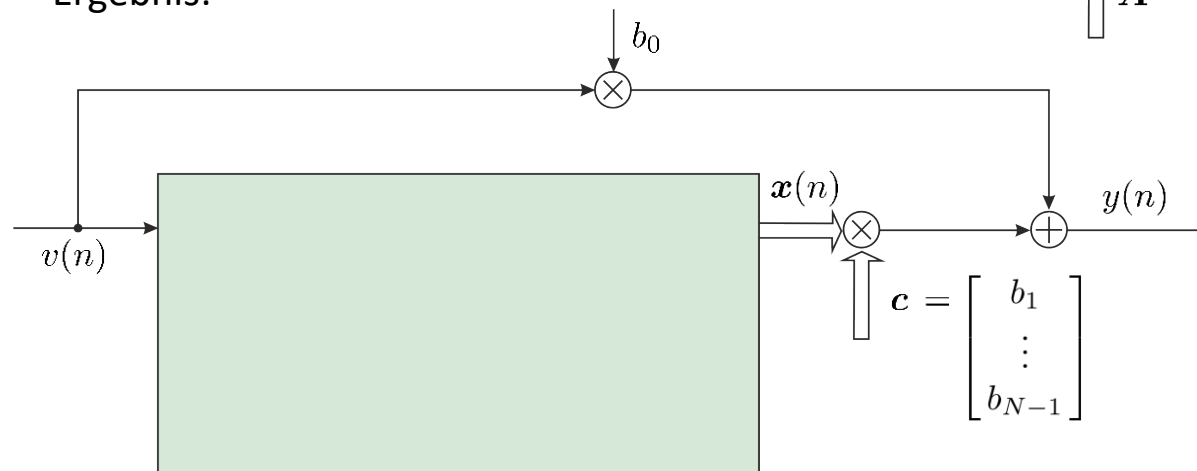
Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 7

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 6:

Zielstruktur für ein
Eingangs- und ein
Ausgangssignal:



Bisheriges
Ergebnis:



Von der Differenzgleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 8

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 7:

Ausgehend von der Differenzgleichung des durchgriffsfreien Systems (Direktform 2)

$$x(n+1) = v(n) - a_1 x(n) - a_2 x(n-1) - \dots - a_{N-1} x(n-N+2)$$

und der Definition des Zustandsvektors

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+2)]^T,$$

wird diese nun in **Matrix-Vektor-Schreibweise** umgestellt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(n+1) \\ x(n) \\ \vdots \\ x(n-N+4) \\ x(n-N+3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-2} & -a_{N-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+3) \\ x(n-N+2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} v(n)$$

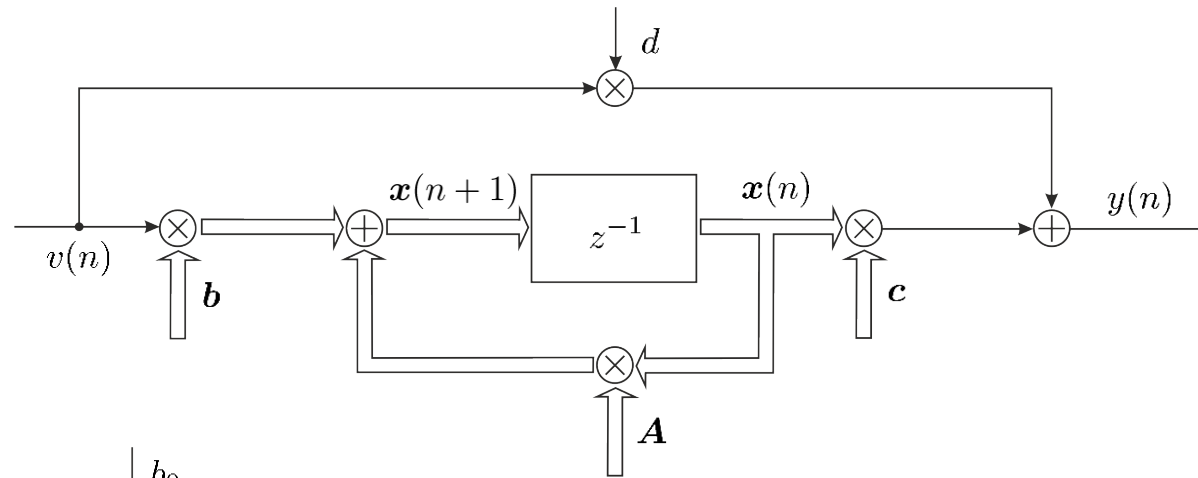
$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(n) + \mathbf{b} v(n).$$

Systembeschreibung im Zustandsraum

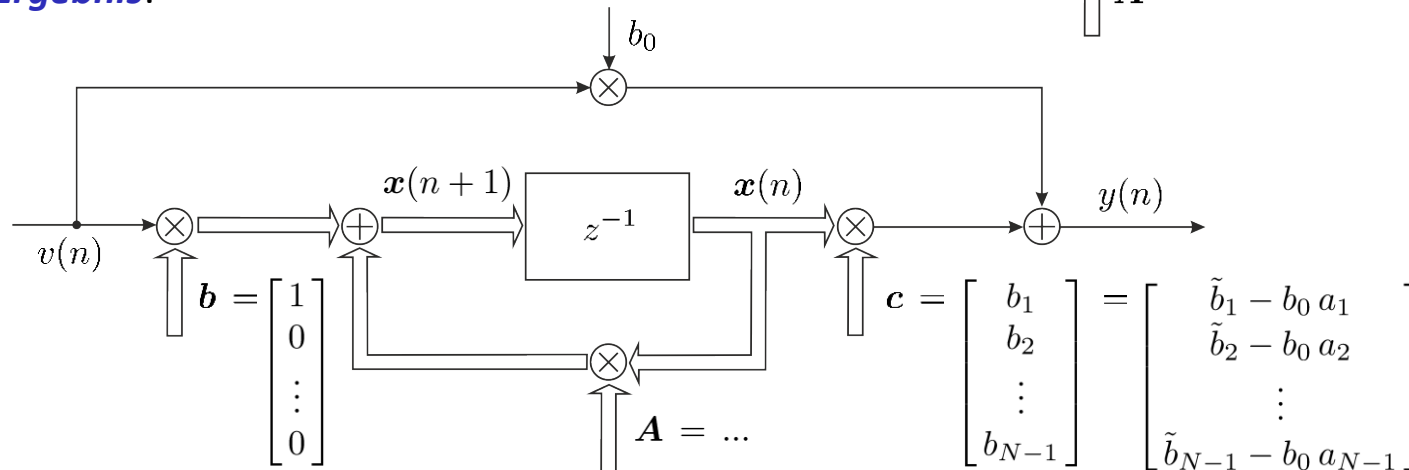
Von der Differenzengleichung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 9

Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 8:

Zielstruktur für ein
 Eingangs- und ein
 Ausgangssignal:



Ergebnis:



Umwandlung zur Zustandsraumbeschreibung – Teil 9:

Anmerkungen:

- ❑ Die hier gezeigte Herleitung ist nur **eine von mehreren Möglichkeiten**, wie man von einer Differenzgleichung zur Zustandsraumdarstellung kommen kann.
- ❑ Bei den Überlegungen der letzten Folien haben wir uns auf Systeme mit nur einem Eingang und einem Ausgang beschränkt, eine **Erweiterung auf MIMO-Systeme** ist aber ohne weitere Schwierigkeiten möglich.
- ❑ Neben der diskreten Herleitung kann auch eine **kontinuierliche** durchgeführt werden.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Warum haben die FIR-Anteile der beiden Differenzgleichungen auf Folie IX-26 unterschiedliche Koeffizienten (\tilde{b}_i versus b_i)?

.....

- Welcher Art von „Bauteil“ entsprechen die Zustandsspeicher in der kontinuierlichen Zustandsraumdarstellung?

.....

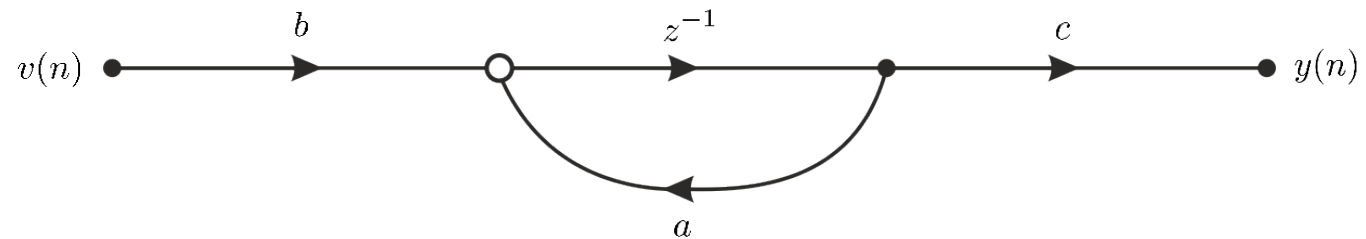
- Welche Anwendungsfälle (außer Geräuschreduktion) können Sie für die Zustandsraumdarstellung bzw. Kalman-Filter nennen?

.....

Allgemeines:

Ein Signalflussgraph ist ein Hilfsmittel zur vereinfachten Darstellung von Blockschaltbildern. Signalflussgraphen sind **gerichtete und gewichtete Graphen**, d.h. die Richtungen und die Gewichte der einzelnen Zweige müssen angegeben werden.

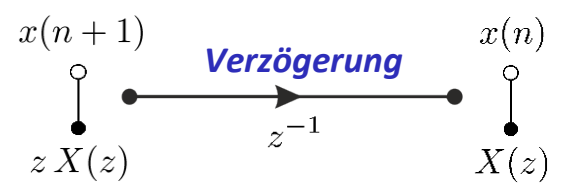
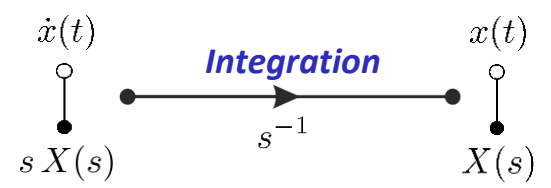
Beispiel:



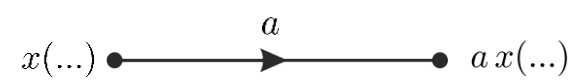
Signalflussgraphen – Teil 2

Elemente von Signalflussgraphen:

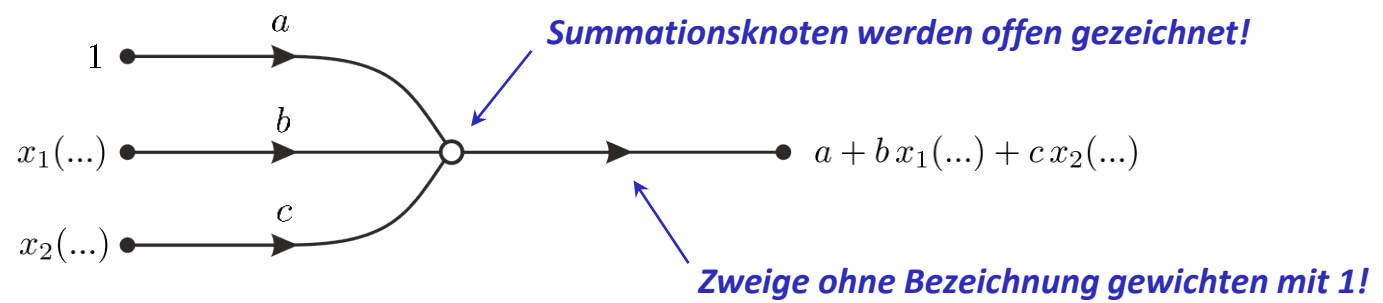
□ Speicher:



□ Multiplikation mit einem konstanten Faktor (Gewichtung):

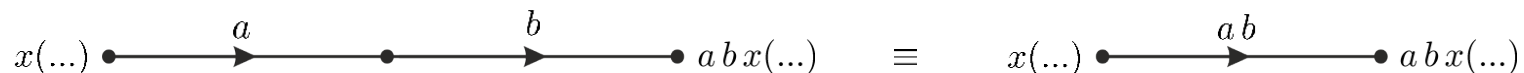


□ Addition:

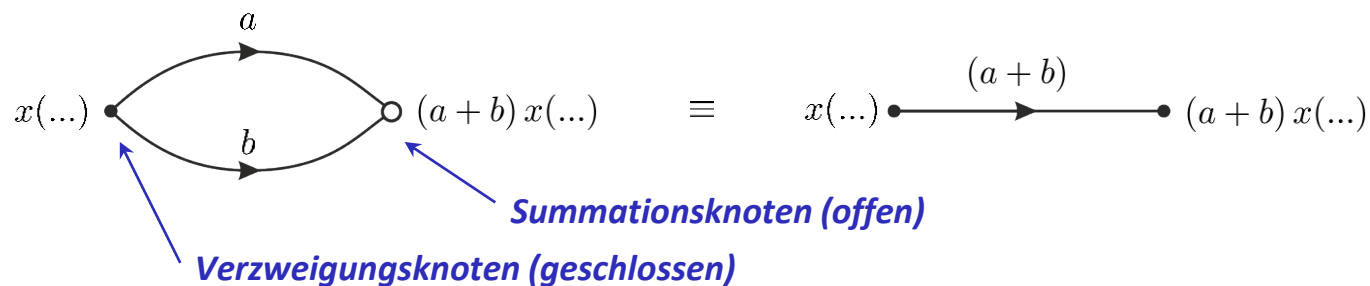


„Rechenregeln“ für Signalflussgraphen:

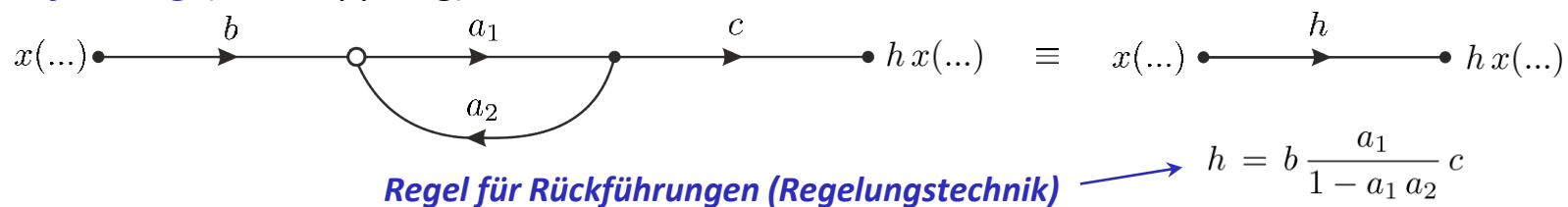
□ **Kaskade:**



□ **Parallelanordnung:**

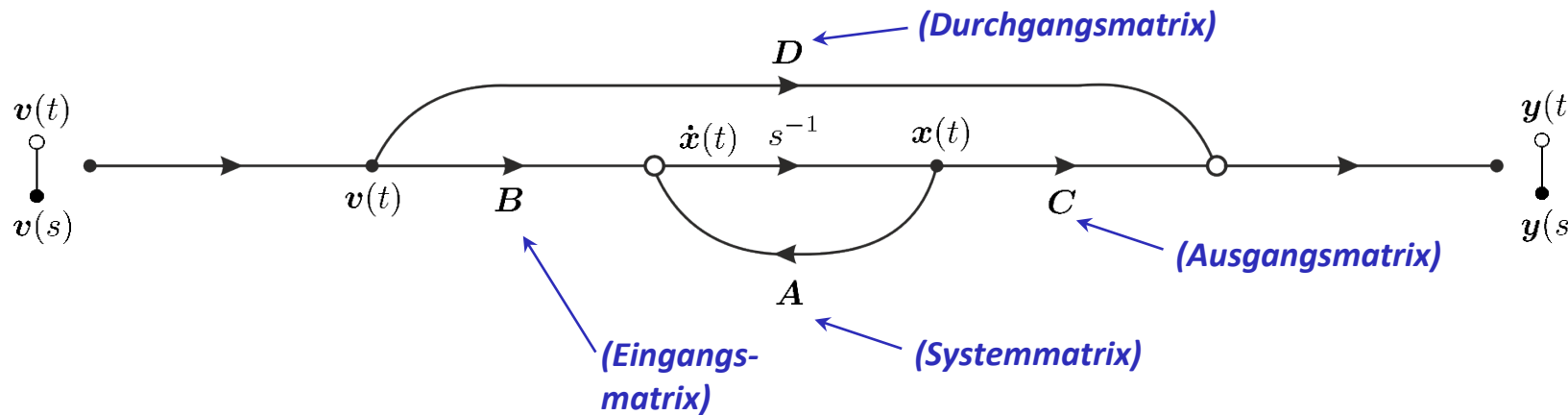


□ **Rückführung (Rückkopplung):**



Übersichtsdarstellung als Signalflussgraph – Teil 1:

Für den *Laplace-Bereich* bzw. für kontinuierliche Systeme ergibt sich folgender Signalflussgraph:



Dabei gilt:

$$\mathbf{v}(t) = [v_0(t), v_1(t), \dots, v_{L-1}(t)]^T,$$

$$\mathbf{x}(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)]^T,$$

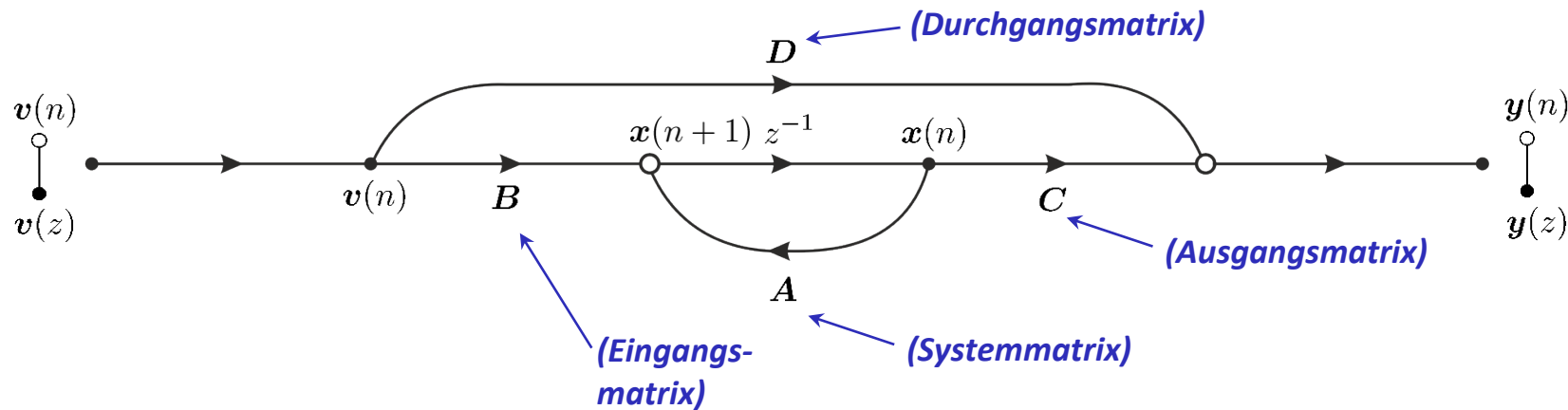
$$\mathbf{y}(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_{R-1}(t)]^T.$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{v}(t).$$

Übersichtsdarstellung als Signalflussgraph – Teil 2:

Für den *z-Bereich* bzw. für diskrete Systeme ergibt sich folgender Signalflussgraph:



Dabei gilt:

$$\mathbf{v}(n) = [v_0(n), v_1(n), \dots, v_{L-1}(n)]^T,$$

$$\mathbf{x}(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{N-1}(n)]^T,$$

$$\mathbf{y}(n) = [y_0(n), y_1(n), \dots, y_{R-1}(n)]^T.$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \mathbf{v}(n),$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C} \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \mathbf{v}(n).$$

Beispiel einer Zustandsraumbeschreibung – Teil 1:

Es sei ein System gegeben mit folgenden Eigenschaften:

- ein diskretes System,
- mit $N = 3$ Zustandsspeichern $x_0(n)$, $x_1(n)$ und $x_2(n)$,
- mit $L = 2$ Eingängen $v_0(n)$ und $v_1(n)$ sowie
- mit $R = 1$ Ausgang $y(n)$.

Damit ergibt sich folgende **Zustandsgleichung** (mit Beispielwerten):

$$\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}.$$

Für die **Ausgangsgleichung** ergibt sich (wieder mit Beispielwerten):

$$y(n) = \underbrace{[16 \quad 17 \quad 18]}_c \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \underbrace{[19 \quad 20]}_d \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \end{bmatrix}.$$

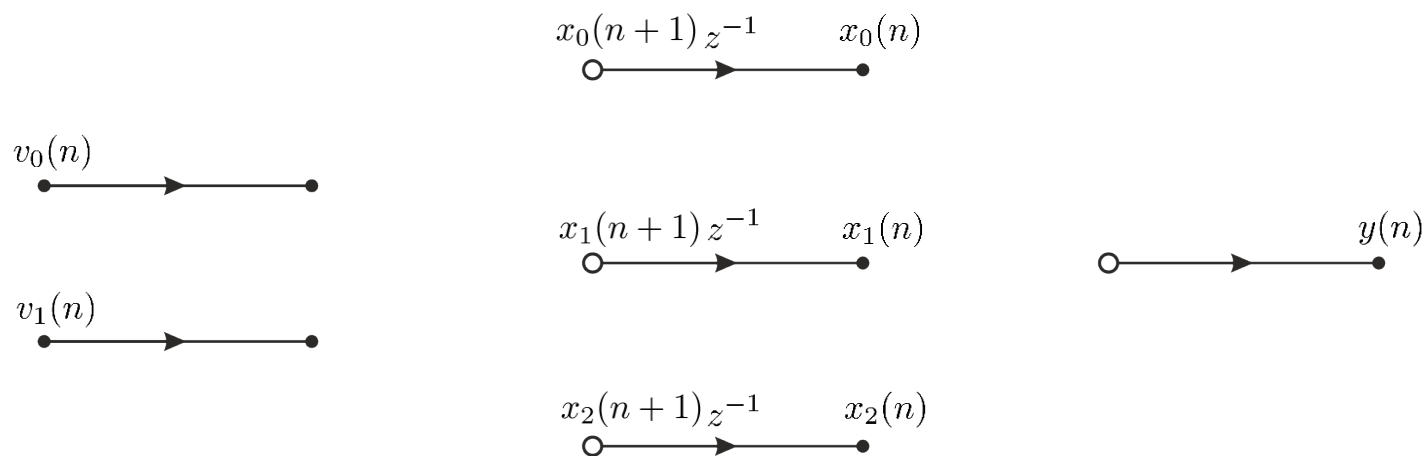
Beispiel einer Zustandsraumbeschreibung – Teil 2:

Wenn wir nun aus den beiden Gleichungen der letzten Folie einen Signalflussgraphen zeichnen wollen, so bietet sich folgendes Vorgehen an:

- Zeichnen der Speicherelemente s^{-1} bzw. z^{-1} mit Ein- und Ausgängen,
- Eintragen der Zustandsgrößen $x_i(\dots)$,
- Zeichnen der Ein- und Ausgangsknoten ($v_i(\dots)$ und $y_i(\dots)$),
- Einzeichnen der Verbindungen aus A (mit Richtungen und Gewichten),
- Einzeichnen der Verbindungen aus B (mit Richtungen und Gewichten),
- Einzeichnen der Verbindungen aus c (mit Richtungen und Gewichten),
- Einzeichnen der Verbindungen aus d (mit Richtungen und Gewichten).

Beispiel einer Zustandsraumbeschreibung – Teil 2:

Bitte vervollständigen Sie das folgende Signalflussdiagramm! Verwenden Sie dabei die Zahlenwerte, welche zwei Folien zuvor angegeben wurden.



Übertragungs-, Impulsantwort- und Übertragungsmatrizen – Teil 1

Definition und Deutung von Übertragungs- und Impulsantwortmatrizen – Teil 1:

Bisher haben wir uns meist auf Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang beschränkt:

$$v(t) \longrightarrow y(t) \quad \text{bzw.} \quad v(n) \longrightarrow y(n).$$

Erweitern wir dies auf $L > 1$ Eingänge und $R > 1$ Ausgänge, so verwenden wir Anregungsvektoren $\mathbf{v}(t)$ bzw. $\mathbf{v}(n)$ sowie Reaktions- bzw. Ausgangsvektoren $\mathbf{y}(t)$ bzw. $\mathbf{y}(n)$.

Die Faltungsbeschreibungen

$$y(t) = h_0(t) * v(t) \quad \text{bzw.} \quad y(n) = h_0(n) * v(n)$$

können für den mehrkanaligen Fall in **Matrix-Vektor-Schreibweise** erweitert werden:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}_0(t) * \mathbf{v}(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y}(n) = \mathbf{H}_0(n) * \mathbf{v}(n).$$

Die Impulsantwortmatrix $\mathbf{H}_0(t)$ bzw. $\mathbf{H}_0(n)$ hat dabei die Dimension $(R \times L)$.

Übertragungs-, Impulsantwort- und Übertragungsmatrizen – Teil 2

Definition und Deutung von Übertragungs- und Impulsantwortmatrizen – Teil 2:

Die einzelnen *Elemente* der Signalvektoren bzw. Impulsantwortmatrizen sind dabei wie folgt definiert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_0(\dots) \\ y_1(\dots) \\ \vdots \\ y_r(\dots) \\ \vdots \\ y_{R-1}(\dots) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(\dots)} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{0,0,0}(\dots) & h_{0,0,1}(\dots) & \dots & h_{0,0,l}(\dots) & \dots & h_{0,0,L-1}(\dots) \\ h_{0,1,0}(\dots) & h_{0,1,1}(\dots) & \dots & h_{0,1,l}(\dots) & \dots & h_{0,1,L-1}(\dots) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{0,r,0}(\dots) & h_{0,r,1}(\dots) & \dots & h_{0,r,l}(\dots) & \dots & h_{0,r,L-1}(\dots) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{0,R-1,0}(\dots) & h_{0,R-1,1}(\dots) & \dots & h_{0,R-1,l}(\dots) & \dots & h_{0,R-1,L-1}(\dots) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0(\dots)} * \underbrace{\begin{bmatrix} v_0(\dots) \\ v_1(\dots) \\ \vdots \\ v_l(\dots) \\ \vdots \\ v_{L-1}(\dots) \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}(\dots)}.$$

Eine *Zeile dieses Gleichungssystems* ist dabei als Summe über L Einzelfaltungen zu verstehen:

$$y_r(\dots) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{0,r,l}(t) * v_l(t).$$

Übertragungs-, Impulsantwort- und Übertragungsmatrizen – Teil 3

Definition und Deutung von Übertragungs- und Impulsantwortmatrizen – Teil 3:

Ähnliche **Matrix-Vektor-Überlegungen** können auch im **Frequenzbereich** angestellt werden. Wie wir schon wissen, gilt für lineare, verschiebungsinvariante ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\text{Für } v(t) = V e^{st}$$

ergibt sich am Ausgang

$$y(t) = Y e^{st} = H(s) V e^{st}.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\text{Für } v(n) = V z^n$$

ergibt sich am Ausgang

$$y(n) = Y z^n = H(z) V z^n.$$

Wendet man dies auf Systeme (wieder linear und verschiebungsinvariant) an, so ergibt sich für

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\text{Für } v(t) = v e^{st}$$

ergibt sich am Ausgang

$$y(t) = y e^{st} = H(s) v e^{st}.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\text{Für } v(n) = v z^n$$

ergibt sich am Ausgang

$$y(n) = y z^n = H(z) v z^n.$$

Übertragungs-, Impulsantwort- und Übertragungsmatrizen – Teil 4

Definition und Deutung von Übertragungs- und Impulsantwortmatrizen – Teil 4:

Wie bisher gilt also auch für MIMO-Systeme (*multiple input multiple output*-Systeme): Bei exponentieller Anregung gleicher Art e^{st} bzw. z^n mit verschiedenen komplexen Amplituden an allen Eingängen entstehen an allen Ausgängen komplexe exponentielle Reaktionen gleicher Form.

Völlig entsprechend zu den Überlegungen der letzten Folie, ergibt sich für **allgemeine harmonische Schwingungen** für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\text{Für } \mathbf{v}(t) = \mathbf{v} e^{j\omega t}$$

ergibt sich am Ausgang

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} e^{j\omega t} = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{v} e^{j\omega t}.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\text{Für } \mathbf{v}(n) = \mathbf{v} e^{j\Omega n}$$

ergibt sich am Ausgang

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{y} e^{j\Omega n} = \mathbf{H}(e^{j\Omega}) \mathbf{v} e^{j\Omega n}.$$

Zusammenhänge zwischen den Systembeschreibungen:

Die eingeführten Matrizen (Impulsantwortmatrix $\mathbf{H}_0(t)$ bzw. $\mathbf{H}_0(n)$, Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(s)$ bzw. $\mathbf{H}(z)$ und Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\omega)$ bzw. $\mathbf{H}(e^{j\Omega})$) sind entsprechende Erweiterungen der bekannten Skalarbeziehungen. Es gelten dabei auch wieder die entsprechenden **Transformationsbeziehungen**

(kontinuierlich)

$$\mathbf{H}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{H}_0(t)\},$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{H}_0(t)\},$$

(diskret)

$$\mathbf{H}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{H}_0(n)\},$$

$$\mathbf{H}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{\mathbf{H}_0(n)\},$$

wobei die einzelnen Transformationen **elementweise** zu verstehen sind, d.h. es gilt z.B.

(kontinuierlich)

$$H_{r,l}(s) = \mathcal{L}\{h_{0,r,l}(t)\}.$$

(diskret)

$$H_{r,l}(z) = \mathcal{Z}\{h_{0,r,l}(n)\}.$$



Übertragungsfunktion vom Eingang l zum Ausgang r

Übertragungsmatrix – Teil 1:

Als nächstes wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie man aus der Zustandsraumdarstellung (d.h. wir kennen die Matrizen A , B , C und D) zur Übertragungsmatrix kommen kann. Hierzu verwenden wir zunächst folgenden Zusammenhang:

Wenn man auf **alle Eingänge** eines linearen, zeitinvarianten Systems ein **exponentielles Signal** der Form $v(t) = v e^{st}$ bzw. $v(n) = v z^n$ gibt, dann werden auch **alle Systemzustände sowie alle Ausgangssignale exponentielle Form** aufweisen, d.h. es gilt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} e^{st},$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} e^{st},$$

bzw.

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{x} z^n,$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{y} z^n.$$

Übertragungsmatrix – Teil 2:

Bestimmen wir nun die Ableitung bzw. die Verzögerung des Zustandsvektors, so erhalten wir für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x} e^{st} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{x} s e^{st}. \end{aligned}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \mathbf{x} z^n \\ \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{x} z^{n+1} = \mathbf{x} z z^n. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Zustandsgleichung ergibt sich für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t) \\ &\quad \dots \text{Einsetzen der oben genannten harmonischen Signale} \dots \\ \mathbf{x} s e^{st} &= \mathbf{A} \mathbf{x} e^{st} + \mathbf{B} \mathbf{v} e^{st} \\ &\quad \dots \text{Hinzunehmen einer Einheitsmatrix} \dots \\ s \mathbf{I} \mathbf{x} e^{st} &= \mathbf{A} \mathbf{x} e^{st} + \mathbf{B} \mathbf{v} e^{st} \\ &\quad \dots \text{Kürzen des Terms } e^{st} \text{ bzw. } z^n \dots \\ s \mathbf{I} \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \mathbf{v}(n) \\ \mathbf{x} z z^n &= \mathbf{A} \mathbf{x} z^n + \mathbf{B} \mathbf{v} z^n \\ z \mathbf{I} \mathbf{x} z^n &= \mathbf{A} \mathbf{x} z^n + \mathbf{B} \mathbf{v} z^n \\ z \mathbf{I} \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Übertragungsmatrix – Teil 3:

Fortsetzung für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$s \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}$$

... alle Terme mit x auf eine Seite bringen...

$$[s \mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{v}$$

... nach x auflösen ...

$$\mathbf{x} = [s \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$z \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v}$$

$$[z \mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{x} = [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}.$$

Wenden wir nun ähnliche Überlegungen für die Ausgangsgleichung an, so erhalten wir für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{v}(t)$$

... exponentielle Signale einsetzen ...

$$\mathbf{y} e^{st} = \mathbf{C} \mathbf{x} e^{st} + \mathbf{D} \mathbf{v} e^{st}$$

... Kürzen des Terms e^{st} bzw. z^n ...

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{v}.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C} \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \mathbf{v}(n)$$

$$\mathbf{y} z^n = \mathbf{C} \mathbf{x} z^n + \mathbf{D} \mathbf{v} z^n$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{v}.$$

Übertragungsmatrix – Teil 4:

Fortsetzung für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$y = Cx + Dv$$

... Einsetzen des Ergebnisses für x ...

$$y = C[sI - A]^{-1}Bv + Dv$$

... Ausklammern von v ...

$$y = \left(C[sI - A]^{-1}B + D \right) v.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$y = Cx + Dv$$

$$y = C[zI - A]^{-1}Bv + Dv$$

$$y = \left(C[zI - A]^{-1}B + D \right) v.$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den früher gefundenen Zusammenhängen $y = H(s)v$ bzw. $y = H(z)v$, so erhält man schließlich für die Übertragungsmatrix von

□ ... kontinuierlichen Systemen:

$$H(s) = C[sI - A]^{-1}B + D.$$

□ ... diskreten Systemen:

$$H(z) = C[zI - A]^{-1}B + D.$$

Für die Frequenzgangmatrizen gilt die gleiche Herleitung allerdings mit $s = j\omega$ bzw. $z = e^{j\Omega}$.

Zusammenhang mit der Zustandsdarstellung – Teil 5

Impulsantwortmatrizen – Teil 1:

Will man aus der Zustandsraumdarstellung die einzelnen Impulsantworten bzw. die Impulsantwortmatrix bestimmen, so kann man verwenden, dass sich die Impulsantworten durch Rücktransformation der Übertragungsfunktionen bestimmen lassen. Es gilt dann für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_0(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen des Ergebnisses für } \mathbf{H}(s) \dots \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \mathbf{C} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right\} \\
 &\quad \dots \text{Aufspalten der Transformation} \dots \\
 &= \mathbf{C} \mathcal{L}^{-1}\left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathcal{L}^{-1}\{1\} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der Rücktransformation einer konstanten Übertragungsfunktion} \dots \\
 &= \mathbf{C} \mathcal{L}^{-1}\left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta_0(t).
 \end{aligned}$$

Bemerkungen: Zum einen ist zu beachten, dass für die Transformation nur die von s abhängigen Matrizen „von Interesse“ sind. Zum anderen wird dieses Ergebnis im weiteren Verlauf der Vorlesung noch weiter präzisiert.

Impulsantwortmatrizen – Teil 2:

□ Für diskrete Systeme ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\{\mathbf{H}(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right\} \\ &= \mathbf{C}\mathcal{Z}^{-1}\left\{[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\}\mathbf{B} + \mathbf{D}\mathcal{Z}^{-1}\{1\} \\ &= \mathbf{C}\mathcal{Z}^{-1}\left\{[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\}\mathbf{B} + \mathbf{D}\gamma_0(n). \end{aligned}$$

Bemerkung: Auch hier ist wieder zu beachten, dass für die Transformation nur die von z abhängigen Matrizen „von Interesse“ sind.

Um die Impulsantwortmatrizen $\mathbf{H}_0(t)$ bzw. $\mathbf{H}_0(n)$ weiter zu vereinfachen, betrachten wir zunächst die Matrizen $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ bzw. $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ im Detail und versuchen hierfür die Rücktransformationen zu bestimmen.

Impulsantwortmatrizen – Teil 3:

Für die Rücktransformation der Matrizen $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ bzw. $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ betrachten wir zunächst die skalaren Transformationspaare

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at} \delta_{-1}(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = a^n \gamma_{-1}(n).$$

Erweitert man das letztgenannte Transformationsbeispiel mit z^{-1} , so entspricht dies im Zeitbereich einer Verzögerung um einen Takt:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-a} \right\} = a^{n-1} \gamma_{-1}(n-1).$$

Erweitert man diese Transformationen auf MIMO-Systeme, so ergibt sich:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \} = e^{\mathbf{A}t} \delta_{-1}(t),$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \} = \mathbf{A}^{n-1} \gamma_{-1}(n-1).$$

Die Schreibweise $e^{\mathbf{A}t} \delta_{-1}(t)$ verwendet hier das sog. Matrizenexponential, welches wie folgt definiert ist:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \dots$$

Impulsantwortmatrizen – Teil 4:

Setzen wir dieses Ergebnis in die entsprechenden Impulsantwortmatrizen bzw. in die Ausgangsgleichungen ein, so ergibt sich für ...

- ... **kontinuierliche** Systeme:

$$H_0(t) = C e^{At} B \delta_{-1}(t) + D \delta_0(t).$$

Setzt man dies in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich:

$$y(t) = C \underbrace{\int_{\tau=0}^{\infty} e^{A\tau} B v(t - \tau) d\tau}_{= x(t)} + D v(t).$$

- ... **diskrete** Systeme:

$$H_0(n) = C A^{n-1} B \gamma_{-1}(n-1) + D \gamma_0(n),$$

$$y(n) = C \underbrace{\sum_{\kappa=1}^{\infty} A^{\kappa-1} B v(n - \kappa)}_{= x(n)} + D v(n).$$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Was bedeutet es, wenn ein System durchgriffsfrei ist? Was gilt dann für die Matrizen der Zustandsbeschreibung und was können Sie über die einzelnen Impulsantworten eines diskreten Systems sagen?

.....
.....
.....

- Welche Anregungsgrößen mussten bei unserem Mehrkanaleingangssignal gleich sein und welche durften unterschiedlich sein, damit wir die Übertragungs- und Frequenzgangüberlegungen anstellen durften ?

.....
.....
.....

Übertragungsmatrizen – Teil 1:

Um die Zustandsraumdarstellung besser mit unseren bisherigen Überlegungen zu Systembeschreibungen – insbesondere der Beschreibung mittels **gebrochen rationaler Funktionen im Übertragungsbereich** – vergleichen zu können, betrachten wir die Übertragungsmatrizen noch einmal etwas detaillierter. Unser bisheriges Ergebnis für die Übertragungsmatrizen war für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H(s) = C [s I - A]^{-1} B + D.$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H(z) = C [z I - A]^{-1} B + D.$$

Die Matrix $[s I - A]$ hat dabei die Form:

$$[s I - A] = \begin{bmatrix} s - a_{0,0} & -a_{0,1} & -a_{0,2} & \dots & -a_{0,N-1} \\ -a_{1,0} & s - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N-1,0} & -a_{N-1,1} & -a_{N-1,2} & \dots & s - a_{N-1,N-1} \end{bmatrix}.$$

Übertragungsmatrizen – Teil 2:

Entsprechend gilt für die Matrix in der Übertragungsfunktion des diskreten Systems:

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} z - a_{0,0} & -a_{0,1} & -a_{0,2} & \dots & -a_{0,N-1} \\ -a_{1,0} & z - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N-1,0} & -a_{N-1,1} & -a_{N-1,2} & \dots & z - a_{N-1,N-1} \end{bmatrix}.$$

Bestimmt man nun die Inversen solcher Matrizen, so kann man die Ergebnisse wie folgt aufteilen:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \text{adj}\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\},$$

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \text{adj}\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}.$$

← *Adjunkte der Matrix* $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]$
← *Determinante der Matrix* $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]$

Übertragungsmatrizen – Teil 3:

Für eine 3x3-Matrix der Form

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

bestimmt sich die **Determinante** wie folgt:

$$\det\{M\} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Für die **Adjunkte** gilt:

$$\text{adj}\{M\} = \begin{bmatrix} \det \begin{Bmatrix} e & f \\ h & i \end{Bmatrix} & -\det \begin{Bmatrix} d & f \\ g & i \end{Bmatrix} & \det \begin{Bmatrix} d & e \\ g & h \end{Bmatrix} \\ -\det \begin{Bmatrix} b & c \\ h & i \end{Bmatrix} & \det \begin{Bmatrix} a & c \\ g & i \end{Bmatrix} & -\det \begin{Bmatrix} a & b \\ g & h \end{Bmatrix} \\ \det \begin{Bmatrix} b & c \\ e & f \end{Bmatrix} & -\det \begin{Bmatrix} a & c \\ d & f \end{Bmatrix} & \det \begin{Bmatrix} a & b \\ d & e \end{Bmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ei - hf & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}.$$

Übertragungsmatrizen – Teil 4:

Wendet man die Kenntnisse zur Bestimmung der Determinante und der Adjunkten auf die hier verwendete Matrixform an, so erkennt man, dass jeweils Polynome in s bzw. z entstehen. Für die Polynomgrade gilt dabei für

□ ... kontinuierliche Systeme:

□ ... diskrete Systeme:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \text{adj}\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}. \quad [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \text{adj}\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}.$$

Jeweils Zählerpolynome vom Grad $\leq N-1$
Nennerpolynom vom Grad N

Das in allen Elementen der resultierenden Matrix auftretende Nennerpolynom heißt **charakteristisches Polynom** und ist über die einzelnen Determinanten

$$N(s) = \det\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\},$$

$$N(z) = \det\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}$$

definiert.

Übertragungsmatrizen – Teil 5:

Zusammenfassend kann man festhalten, dass alle Elemente der invertierten Matrizen $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ bzw. $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ **echt gebrochen rationale Funktionen** mit **identischen Nennerpolynomen** $N(s)$ bzw. $N(z)$ enthalten. Für die einzelnen Elemente der Übertragungsmatrizen gilt daher für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H_{r,l}(s) = \frac{Z_{rl}(s)}{N(s)} + d_{r,l}$$

... auf gemeinsamen Nenner bringen (dabei wird der Zählergrad ebenfalls auf N gebracht!) ...

$$= \frac{Z_{rl}(s) + d_{r,l} N(s)}{N(s)}$$

... Zusammenfassen und Koeffizienten neu benennen...

$$= \frac{\sum_{\mu=0}^N \alpha_{\mu}^{(r,l)} \cdot s^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^N \beta_{\nu} \cdot s^{\nu}}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$H_{r,l}(z) = \frac{Z_{rl}(z)}{N(z)} + d_{r,l}$$

$$= \frac{Z_{rl}(z) + d_{r,l} N(z)}{N(z)}$$

$$= \frac{\sum_{\mu=0}^N \alpha_{\mu}^{(r,l)} \cdot z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^N \beta_{\nu} \cdot z^{\nu}}$$

Übertragungsmatrizen – Teil 6:

Diese Darstellungsform ist aus früheren Teilen der Vorlesung bekannt. Wir können die Summendarstellung in eine **Produktdarstellung** umwandeln. Hier gilt dann für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$\begin{aligned}
 H_{r,l}(s) &= \frac{\sum_{\mu=0}^N \alpha_{\mu}^{(r,l)} \cdot s^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^N \beta_{\nu} \cdot s^{\nu}} \\
 &= \frac{\alpha_N^{(r,l)} \prod_{\mu=0}^{N-1} s - s_{0,\mu}^{(r,l)}}{\beta_N \prod_{\nu=0}^{N-1} s - s_{\infty,\nu}}.
 \end{aligned}$$

□ ... diskrete Systeme:

$$\begin{aligned}
 H_{r,l}(z) &= \frac{\sum_{\mu=0}^N \alpha_{\mu}^{(r,l)} \cdot z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^N \beta_{\nu} \cdot z^{\nu}} \\
 &= \frac{\alpha_N^{(r,l)} \prod_{\mu=0}^{N-1} z - z_{0,\mu}^{(r,l)}}{\beta_N \prod_{\nu=0}^{N-1} z - z_{\infty,\nu}}.
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Zählernullstellen sind dabei elementspezifisch, die Nennernullstellen (die Pole) sind für alle Elemente gleich!

Form der Matrizen – Teil 7

Übertragungsmatrizen – Teil 7:

Sollten **alle Polstellen unterschiedlich** sein, so können die einzelnen Übertragungsfunktionen durch eine Partialbruchzerlegung in folgende Form gebracht werden. Es gilt für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:

$$H_{r,l}(s) = d_{r,l} + \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{B_{\nu}^{(r,l)}}{s - s_{\infty,\nu}}$$


□ ... diskrete Systeme:

$$H_{r,l}(z) = d_{r,l} + \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{B_{\nu}^{(r,l)}}{z - z_{\infty,\nu}}$$

Sollten **mehrfache Polstellen** auftreten, so ist – siehe entsprechende Vorlesungsfolien für Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang – folgende Form zu wählen. Es gilt für ...

□ ... kontinuierliche Systeme:


Anzahl der unterschiedlichen Nullstellen



$$H_{r,l}(s) = d_{r,l} + \sum_{\nu=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{\kappa=1}^{N_{\nu}} \frac{B_{\nu,\kappa}^{(r,l)}}{(s - s_{\infty,\nu})^{\kappa}}$$

□ ... diskrete Systeme:

Häufigkeiten der einzelnen Nullstellen



$$H_{r,l}(z) = d_{r,l} + \sum_{\nu=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{\kappa=1}^{N_{\nu}} \frac{B_{\nu,\kappa}^{(r,l)}}{(z - z_{\infty,\nu})^{\kappa}}$$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Warum gibt es bei allen Elementen der Übertragungsfunktionsmatrix gleiche Polstellen?

.....
.....

- Was können Sie über die Anzahl von Nullstellen (bzw. die Differenz zwischen Nullstellen- und Polstellenanzahl) bei durchgriffsfreien Systemen aussagen?

.....
.....

- Wie könnte man aus der Summenformdarstellung (letze Folie) der Übertragungsmatrix die einzelnen Impulsantworten bestimmen?

.....
.....

Impulsantwortmatrizen – Teil 1:

Aus den Überlegungen zu linearen Systemen mit nur einem Eingang und einem Ausgang konnten wir die Transformationsbeziehungen

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} \right\} = e^{at} \delta_{-1}(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - a)^\kappa} \right\} = e^{at} \delta_{-\kappa}(t).$$

für kontinuierliche Systeme und

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z - a} \right\} = a^{n-1} \gamma_{-1}(n - 1),$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z - a)^\kappa} \right\} = a^{n-\kappa} \binom{n-1}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n - \kappa).$$

Binomialkoeffizienten

für diskrete Systeme herleiten.

Impulsantwortmatrizen – Teil 2:

Wenden wir diese Beziehungen nun auf die einzelnen Elemente der Übertragungsfunktionen an, so erhalten wir für ...

- ... **kontinuierliche** Systeme mit nur **einfach** vorkommenden Polstellen:

$$h_{0,r,l}(t) = d_{r,l} \delta_0(t) + \sum_{\nu=0}^{N-1} B_{\nu}^{(r,l)} e^{s_{\infty,\nu} t} \delta_{-1}(t).$$

- ... **diskrete** Systeme mit nur **einfach** vorkommenden Polstellen:

$$h_{0,r,l}(n) = d_{r,l} \gamma_0(n) + \sum_{\nu=0}^{N-1} B_{\nu}^{(r,l)} z_{\infty,\nu}^{n-1} \gamma_{-1}(n-1).$$

- ... **kontinuierliche** Systeme mit **mehrfach** vorkommenden Polstellen:

$$h_{0,r,l}(t) = d_{r,l} \delta_0(t) + \sum_{\nu=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{\kappa=1}^{N_{\nu}} B_{\nu,\kappa}^{(r,l)} e^{s_{\infty,\nu} t} \delta_{-\kappa}(t).$$

- ... **diskrete** Systeme mit **mehrfach** vorkommenden Polstellen:

$$h_{0,r,l}(n) = d_{r,l} \gamma_0(n) + \sum_{\nu=0}^{\tilde{N}-1} \sum_{\kappa=1}^{N_{\nu}} B_{\nu,\kappa}^{(r,l)} z_{\infty,\nu}^{n-\kappa} \binom{n-1}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n-\kappa).$$

Impulsantwortmatrizen – Teil 3:

Bemerkungen:

- Die Elemente der Impulsantwortmatrizen $\mathbf{H}_0(t)$ bzw. $\mathbf{H}_0(n)$ sind Linearkombinationen von Exponentialfunktionen $e^{s_\infty t}$ bzw. Exponentialfolgen z_∞^n .
- Sollten Polstellen mehrfach vorkommen, so sind diese Funktionen bzw. Folgen zusätzlich noch mit $t^{\kappa-1}$ bzw. $n^{\kappa-1}$ gewichtet.
- Entscheidend für das Impulsantwortverhalten sind dabei die Polstellen $s_{\infty,\nu}$ bzw. $z_{\infty,\nu}$ von $\mathbf{H}(s)$ bzw. $\mathbf{H}(z)$. Sie ergeben sich aus den Nullstellen der charakteristischen Polynome

$$N(s_{\infty,\nu}) = \det\{s_{\infty,\nu}\mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0,$$

$$N(z_{\infty,\nu}) = \det\{z_{\infty,\nu}\mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0.$$

Diese Nullstellen sind auch gleichzeitig die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} !

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{I} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} &= (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}. \quad \dots \text{lösbar, falls } \dots \det\{\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0. \end{aligned}$$

Stabilität:

In den Folien des ersten Teils dieser Vorlesung wurden rationale Übertragungsfunktionen behandelt. Die hier betrachtete MIMO-Systemklasse weist offenbar genau solche Funktionen (als Elemente der Übertragungsmatrix) auf. Hier gelten nun die gleichen Stabilitätsbetrachtungen:

Bei stabilen Systemen müssen alle Pole in der linken s -Halbebene bzw. im Einheitskreis der z -Ebene liegen.

Abschließende Zusammenfassung

-
- Modulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum**
 - Grundlagen und Grundstruktur der Zustandsraumbeschreibung**
 - Speicherelemente**
 - Signalflussgraphen**
 - Übertragungs-, Impulsantwort- und Übergangsmatrizen**
 - Matrizenformen**
- Stochastische Signale und ihre Spektren
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- Idealisierte Systeme
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen