

Signale und Systeme – Idealisierte Systeme

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- Stochastische Signale und ihre Spektren
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- Idealisierte Systeme***
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen



Inhalt des Abschnitts „Idealisierte Systeme“

- ...
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- ***Idealisierte Systeme***
 - ***Grundlagen und Hintergrund***
 - ***Verzerrungsfreie Systeme***
 - ***Dämpfungsverzerrungen***
 - ***Phasenverzerrungen***
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen

Bisherige Beschreibungen und neue Fragestellungen:

Bisher haben wir uns mit der Beschreibung determinierter und stochastischer Signale befasst. Jeweils im Anschluss wurde dann die Systemreaktion auf Signale bzw. Zufallsprozesse behandelt. Die Systeme wurden dabei durch geeignete Systemeigenschaften beschrieben.

Nun wollen wir uns mit folgenden **Fragen** beschäftigen:

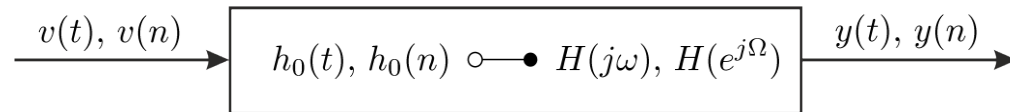
- Welche Form können diese Kennfunktionen (Übertragungsfunktion, Impulsantwort, etc.) haben?
- Wie beeinflusst eine bestimmte Art z.B. eines Frequenzgangs die Impuls- bzw. Sprungantwort und wie verändert sich damit ein Signal bzw. wie verändern sich die Signaleigenschaften?

Bei den Antworten auf die o.g. Fragen, wollen wir zunächst **Einzeleffekte** betrachten. Danach betrachten wir Abweichungen zu einem definierten „**Idealverhalten**“ im Detail. Wir berücksichtigen hier zunächst noch nicht die **Realisierbarkeit** eines Systems.

Unter dem „Idealverhalten“ eines Systems wird oft eine „verzerrungsfreie“ Übertragung verstanden, d.h. die Übertragung eines Signals ohne (wesentliche) Veränderung.

Definitionen – Teil 1:

Unter einem **verzerrungsfreien System** wird oftmals ein System



mit folgenden Eigenschaften verstanden:

$$y(t) = v(t),$$

$$y(n) = v(n).$$

(falls keine Veränderung der Ausgangssignale $y(t)$ bzw. $y(n)$ erwünscht ist).

Realistischer sind allerdings meist die Forderungen:

$$y(t) = A v(t - t_0),$$

$$y(n) = A v(n - n_0).$$

d.h. man lässt zumindest eine **Verzögerung** t_0 bzw. n_0 zu. Für den Parameter A gilt $A \in \mathbb{R}^+$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Entsprechend gilt $t_0 \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ sowie $t_0 = \text{const.}$ und $n_0 = \text{const.}$

Definitionen – Teil 2:

Für die **Impulsantworten** ergibt sich dann

$$h_0(t) = A \delta_0(t - t_0),$$

$$h_0(n) = A \gamma_0(n - n_0).$$

Daraus ergibt sich für die **Sprungantworten**:

$$h_{-1}(t) = A \delta_{-1}(t - t_0),$$

$$h_{-1}(n) = A \gamma_{-1}(n - n_0).$$

Wählt man als Eingangssignale $v(t) = e^{j\omega t}$ bzw. $v(n) = e^{j\Omega n}$, so erhält man für die Ausgangssignale

$$y(t) = A e^{j\omega(t-t_0)},$$

$$y(n) = A e^{j\Omega(n-n_0)}.$$

Somit kann man für die **Frequenzgänge** direkt angeben:

$$H(j\omega) = A e^{-j\omega t_0},$$

$$H(e^{j\Omega}) = A e^{-j\Omega n_0}.$$

Definitionen – Teil 3:

Betrachtet man die Frequenzgänge genauer, so erkennt man, dass diese einerseits einen **konstanten Betrag**, d.h.

$$|H(j\omega)| = A, \forall \omega,$$

$$|H(e^{j\Omega})| = A, \forall \Omega,$$

aufweisen. Andererseits weisen beide Frequenzgänge eine **lineare Phase**, d.h.

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_0,$$

$$\arg\{H(e^{j\Omega})\} = -\Omega n_0.$$

auf, d.h. die Phasen sind linear in ω bzw. Ω . Diese idealen Übertragungssysteme werden daher als sog. **linearphasige Allpässe** bezeichnet. Entsprechende Überlegungen kann man auch für Übertragungsfunktionen anstellen. Hier gilt dann

$$H(s) = A e^{-st_0},$$

$$H(z) = A z^{-n_0}.$$

Diese idealen Übertragungssysteme entsprechen bis auf den konstanten Faktor A (d.h. einer Verstärkung oder Abschwächung) dem zuvor behandelten Verzögerungs- bzw. Verschiebeoperator!

Definitionen – Teil 4:

Mögliche Abweichungen vom zuvor beschriebenen idealen Verhalten kann man gemäß der folgenden Möglichkeiten klassifizieren:

- **Betrags-** oder **Dämpfungsverzerrungen:**

$$|H(\dots)| \neq \text{const.}$$

- **Phasen-** oder **Laufzeitverzerrungen:**

$$\arg\{H(\dots)\} \neq \text{linear.}$$

- **Allgemeine lineare Verzerrungen:**

$$|H(\dots)| \neq \text{const.} \wedge \arg\{H(\dots)\} \neq \text{linear.}$$

Die letztgenannten linearen Verzerrungen unterscheiden sich von **nichtlinearen Verzerrungen**. Diese entstehen z.B. bei Systemen, die durch $y(n) = v(n) + v^2(n) + \dots$ beschrieben sind.

Ideale Bandbegrenzung – Teil 1:

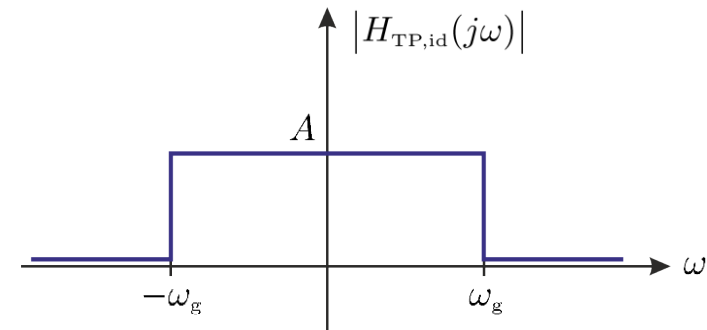
Im Folgenden nehmen wir an, dass ein **linearer Phasenverlauf** vorliegt, d.h. es gelte:

$$H_{\text{TP,id}}(j\omega) = |H_{\text{TP,id}}(j\omega)| e^{-j\omega t_0}$$

(zunächst wollen wir alle Überlegungen für den kontinuierlichen Fall anstellen, im Anschluss übertragen wir die Ergebnisse auf diskrete Systeme). Für den **Betragsverlauf** soll nun gelten:

$$|H_{\text{TP,id}}(j\omega)| = \begin{cases} A > 0, & \text{für } |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei Anregung des Systems mit einem Impuls entsteht dann am Ausgang nicht wieder ein Impuls (dies wäre nur bei verzerrungsfreien Systemen der Fall), sondern die Impulsantwort dieses **idealen Tiefpassfilters**:



$$h_{0,\text{TP,id}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\text{TP,id}}(j\omega)\} = A \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g(t - t_0))}{\omega_g(t - t_0)} = A \frac{\omega_g}{\pi} \text{si}(\omega_g(t - t_0)).$$

Zur Herleitung siehe Teil IV der „Signale und Systeme I“-Vorlesung!

Ideale Bandbegrenzung – Teil 2:

Je nach Tiefpassgrenzfrequenz ω_g wird aus dem unendlich-schmalen Impuls eine Impulsantwort endlicher Breite (beschrieben z.B. durch $2t_1 = 2\frac{\pi}{\omega_g}$).

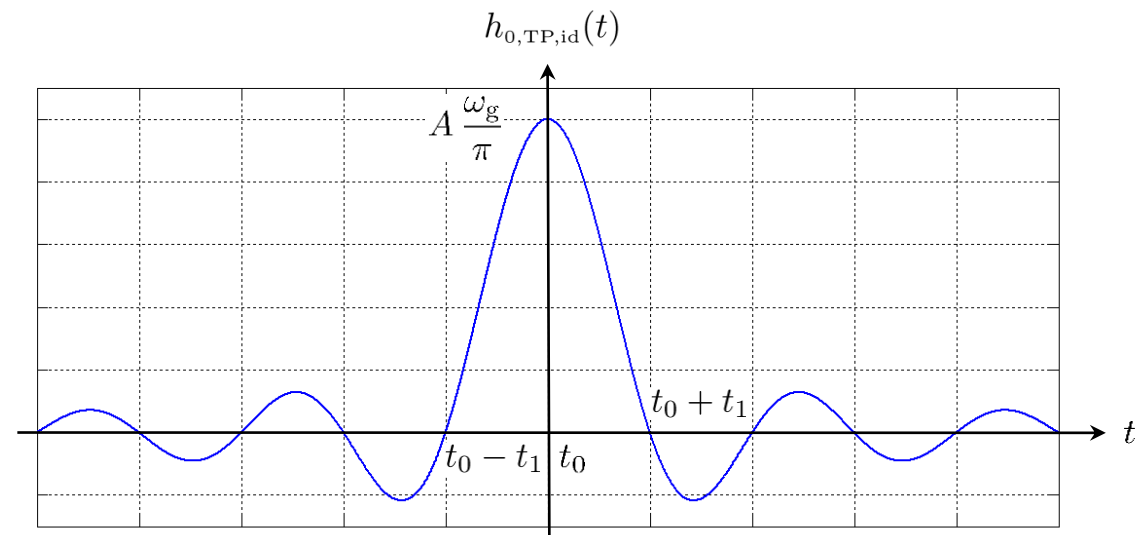
Durch Faltung mit der Impulsantwort wird Entsprechend jedes Signal $v(t)$ „**verbreitert**“ bzw. „**verschmiert**“.

Für $\omega_g \rightarrow \infty$ strebt $t_1 \rightarrow 0$ und $A\frac{\omega_g}{\pi} \rightarrow \infty$.

Damit strebt die Impulsantwort gegen die Dirac-Distribution

$$h_{0,TP,id}(t) \longrightarrow A \delta_0(t - t_0),$$

d.h. das Tiefpassfilter wird zum verzerrungsfreien Allpassfilter (d.h. zum Verzögerungsglied).



Ideale Bandbegrenzung – Teil 3:

Für den **diskreten Fall** ergibt sich ganz entsprechend für den Frequenzgang eines idealen, zeitdiskreten Tiefpassfilters

$$H_{\text{TP,id}}(e^{j\Omega}) = |H_{\text{TP,id}}(e^{j\Omega})| e^{-j\Omega n_0},$$

mit dem Betragsfrequenzgang

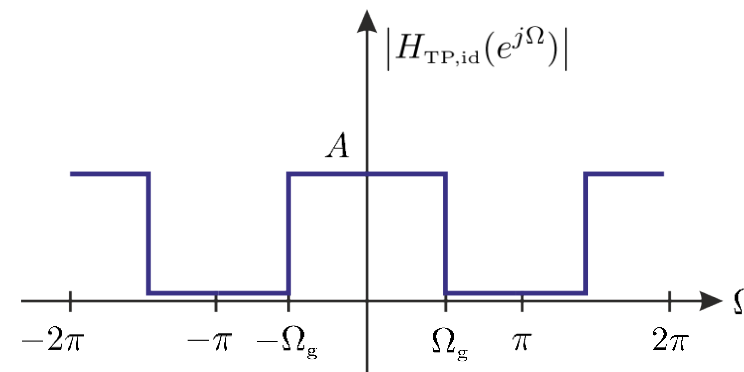
$$|H_{\text{TP,id}}(e^{j\Omega})| = \begin{cases} A, & \text{für } |\Omega - \lambda 2\pi| \in [0, \Omega_g], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich durch Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$h_{0,\text{TP,id}}(n) = A \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin(\Omega_g(n - n_0))}{\Omega_g(n - n_0)}.$$

Setzt man $\Omega = \omega T_A$, so ergibt sich die diskrete Impulsantwort durch **Abtastung der Impulsantwort** des kontinuierlichen idealen Tiefpassfilters:

$$h_{0,\text{TP,id}}(n) = h_{0,\text{TP,id}}(t) \Big|_{t = nT_A}.$$



Ideale Bandbegrenzung – Teil 4:

Bei Anregung eines idealen Tiefpassfilter (wir starten zunächst wieder mit dem kontinuierlichen System) mit einer **Sprungfunktion** wird aus dem „senkrechten“ Anstieg bei $t = 0$ (vgl. das „Verzögern und Verschmieren“ von vorher) eine „schräge Flanke“ bei $t = t_0$. Das „Vor-“ und „Nachschwingen“ zeigt sich auch hier. Für die **Sprungantwort** ergibt sich:

$$h_{-1,TP,id}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h_{0,TP,id}(\tau) d\tau$$

... Einsetzen der Definition der Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters ...

$$= \int_{\tau=-\infty}^t A \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g(\tau - t_0))}{\omega_g(\tau - t_0)} d\tau$$

... Aufteilen des Integrals und „Erinnern“ an die Fourier-Transformation für $\omega = 0$...

$$= \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{t_0} h_{0,TP,id}(\tau) d\tau}_{= \frac{1}{2} H(j\omega = 0) = \frac{A}{2}} + \int_{\tau=t_0}^t A \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g(\tau - t_0))}{\omega_g(\tau - t_0)} d\tau$$

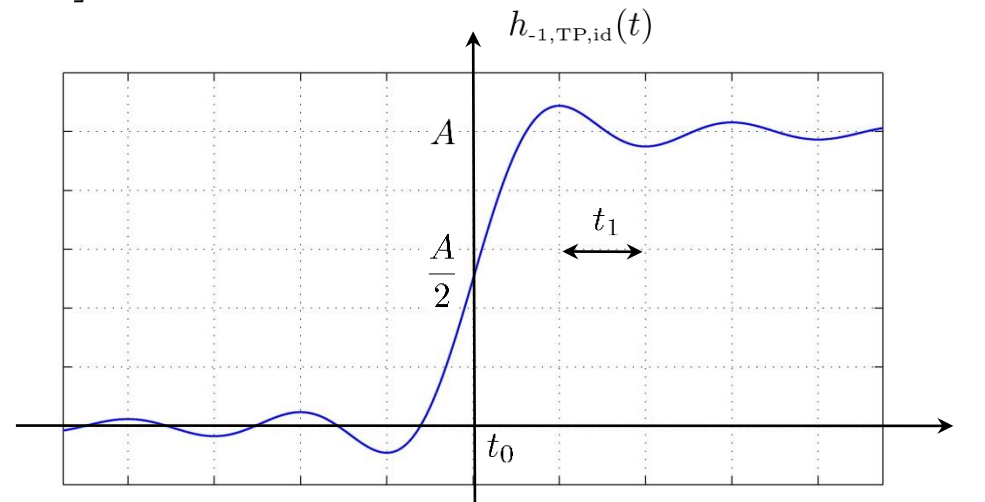
Ideale Bandbegrenzung – Teil 5:

Für eine weitere Vereinfachung kann man noch auf die „tabellierte Integralsinusfunktion“

$$\text{Si}(x) = \int_{t=0}^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

zurückgreifen. Hier ergibt sich schließlich:

$$h_{-1, \text{TP}, \text{id}}(t) = A \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_g(t - t_0)) \right].$$



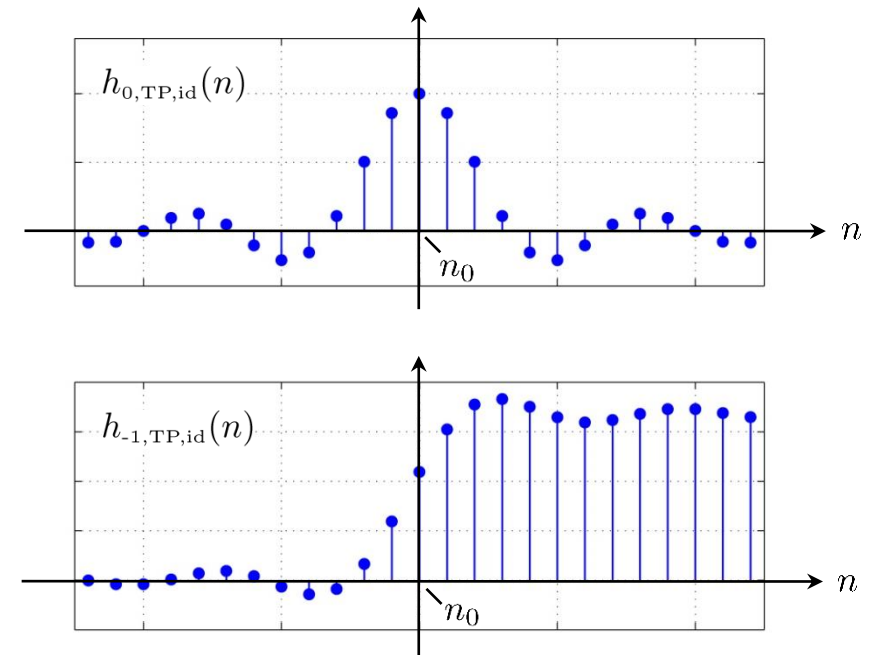
Fazit: Auch der Sprung wird durch das ideale Tiefpassfilter „verschmiert“.

Ideale Bandbegrenzung – Teil 6:

Für *diskrete* ideale Bandbegrenzungsfilter gilt für die *Sprungantwort*

$$h_{-1,TP,id}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n h_{0,TP,id}(\kappa) = A \frac{\Omega_g}{\pi} \sum_{\kappa=-\infty}^n \frac{\sin(\Omega_g(\kappa - n_0))}{\Omega_g(\kappa - n_0)} \approx h_{-1,TP,id}(t) \Big|_{t=nT_A}$$

Hierbei ist $h_{-1,TP,id}(n)$ dann nicht mehr eine abgetastete Version der kontinuierlichen Sprungantwort, da die Summe nur als Näherung einer Integration gesehen werden kann (daher auch das \approx -Zeichen in der o.g. Formel).



Ideale Bandbegrenzung – Teil 7:

Für die **Eigenschaften** eines idealen Tiefpassfilters kann Folgendes festgehalten werden:

- ❑ Voraussetzungsgemäß ist ein ideales Tiefpassfilter **linear** und **verschiebungsinvariant**.
- ❑ Die Impulsantworten $h_{0,TP,id}(t)$ und $h_{0,TP,id}(n)$ sind unendlich ausgedehnt. Daher hängen $y(t_0)$ und $y(n_0)$ von $v(t)$ bzw. $v(n)$ mit $t \neq t_0$, $n \neq n_0$ ab. Daraus folgt, dass ideale Tiefpassfilter **gedächtnisbehaftet** sind.
- ❑ Die Impulsantworten $h_{0,TP,id}(t)$ und $h_{0,TP,id}(n)$ „beginnen“ vor $t = 0$ bzw. $n = 0$, daher sind ideale Tiefpassfilter **nicht-kausal** und **nicht-passiv**.
- ❑ Das Integral bzw. die Summe

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |h_{0,TP,id}(t)| dt, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{0,TP,id}(n)|$$

existieren nicht im Allgemeinen (aber für Sonderfälle). Daher sind ideale Tiefpassfilter **nicht stabil**.

Trotz der fehlenden Integrations- bzw. Summationsbegrenzungen existieren die Fourier-Transformationen! Dieser scheinbare Widerspruch liegt daran, dass die Begrenzungsbedingungen zwar hinreichend aber nicht notwendig sind.

Ideale Bandbegrenzung – Teil 8:

Aufgabe:

Gegeben sei ein ideales Tiefpassfilter mit dem Frequenzgang

$$H_{\text{TP,id}}(j\omega) = \begin{cases} A e^{-j\omega t_0}, & \text{für } |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Filter werde mit weißem Rauschen angeregt. Die Autokorrelationsfunktion des Anregungsrauschens sei

$$s_{vv}(\tau) = S_0 \delta_0(\tau).$$

- Geben Sie das **Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals** an!
- Bestimmen Sie die **Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals** des idealen Tiefpassfilters!
Spielt die Phase bzw. die **Verzögerung** des idealen Tiefpassfilters hier eine Rolle?
- Geben Sie die **Kreuzkorrelationsfunktion** zwischen Systemeingang und –ausgang an!

Hinweis: Für die Lösung der o.g. Aufgabe ist nicht wirklich eine Rechnung notwendig!

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 1:

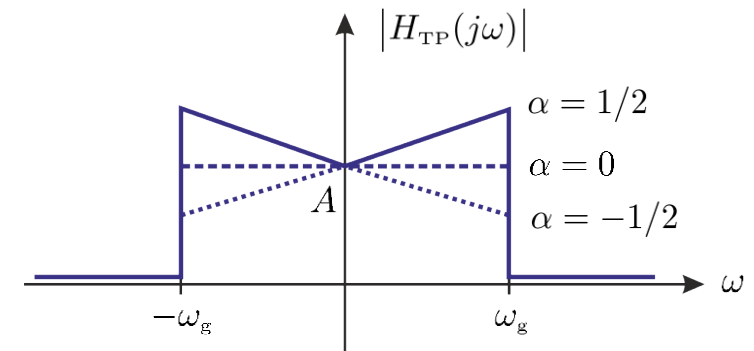
Nun soll ein im Gegensatz zum idealen Tiefpassfilter leicht modifiziertes Filter mit folgendem Betragsfrequenzgang

$$|H_{\text{TP}}(j\omega)| = \begin{cases} A \left(1 + \alpha \frac{|\omega|}{\omega_g}\right), & \text{für } |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

betrachtet werden. Auch hier wird wieder eine lineare Phase angenommen, so dass für den Gesamtfrequenzgang gilt:

$$H_{\text{TP}}(j\omega) = |H_{\text{TP}}(j\omega)| e^{-j\omega t_0}.$$

Der Hintergrund der nun folgenden Betrachtungen soll ein *besseres Verständnis* für das Verhältnis der Eigenschaften „*Bandbreite*“ und „*Reaktions*“- bzw. „*Anstiegszeit*“ vermitteln.

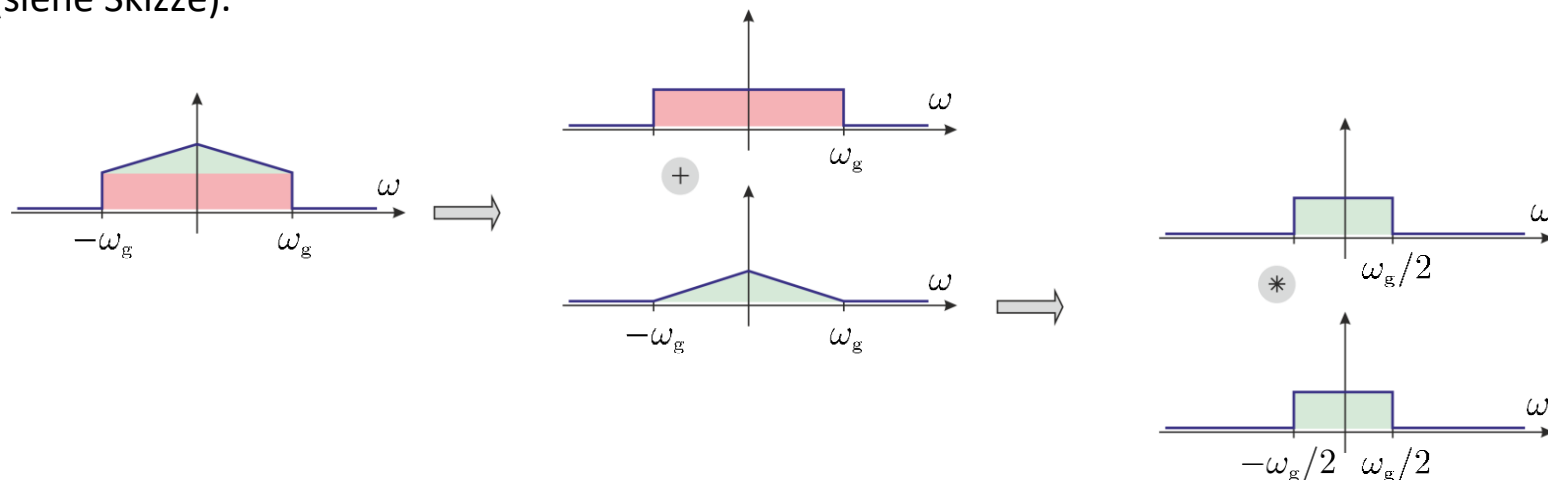


Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 2:

Die Bestimmung der zugehörigen Impulsantwort

$$h_{0,TP}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{TP}(j\omega)\}$$

soll hier nur kurz skizziert werden. Man zerlegt dazu den Frequenzgang in eine Rechteck- und in eine Dreiecksfunktion (siehe Skizze).



Für die Rechteckfunktion ist die zugehörige Impulsantwort gerade vorgestellt worden. Die Dreiecksfunktion entsteht durch Faltung zweier Rechteckfunktionen halber Breite. Im Zeitbereich entspricht dies einer Multiplikation der einzelnen Impulsantworten.

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 3:

Insgesamt ergibt sich damit für die **kontinuierliche Impulsantwort**:

$$h_{0,TP}(t) = (1 + \alpha) \underbrace{A \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g(t - t_0))}{\omega_g(t - t_0)}}_{\text{Rechteckanteil}} - \alpha \underbrace{A \frac{\omega_g}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega_g}{2}(t - t_0)\right)}{\frac{\omega_g}{2}(t - t_0)} \right]^2}_{\text{Dreiecksanteil}}.$$

In ähnlicher Weise erhält man für den **diskreten** Fall

$$\begin{aligned} h_{0,TP}(n) &= (1 + \alpha) \underbrace{A \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin(\Omega_g(n - n_0))}{\Omega_g(n - n_0)}}_{\text{Rechteckanteil}} - \alpha \underbrace{A \frac{\Omega_g}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\Omega_g}{2}(n - n_0)\right)}{\frac{\Omega_g}{2}(n - n_0)} \right]^2}_{\text{Dreiecksanteil}} \\ &= h_{0,TP}(t) \Big|_{t=nT_A}. \end{aligned}$$

d.h. es ergibt sich eine abgetastete Version der kontinuierlichen Impulsantwort. Der zugehörige Frequenzgang wurde dabei in analoger Weise wie das kontinuierliche Pendant angesetzt.

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 4:

Durch Integration bzw. Summation (numerische Rechnung) können aus den Impulsantworten die zugehörigen Sprungantworten bestimmt werden:

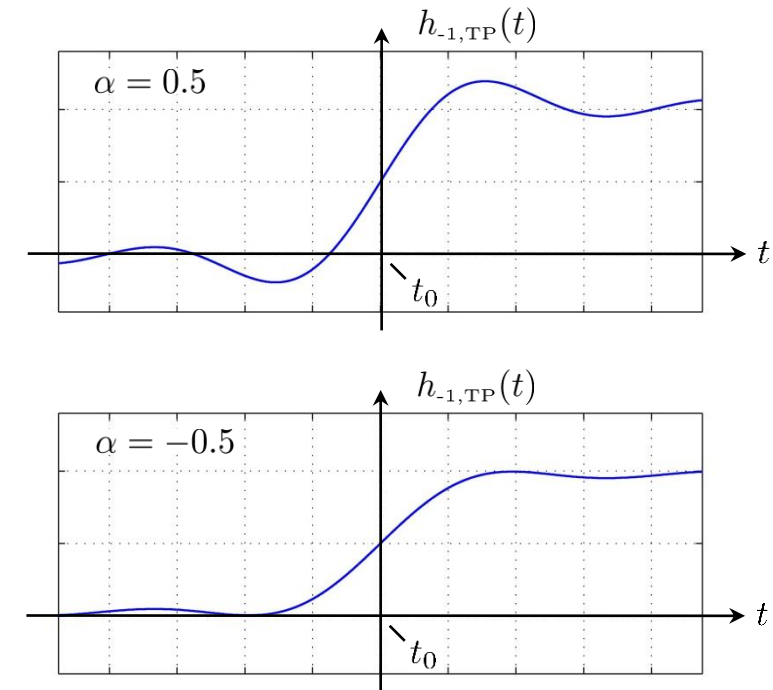
□ **kontinuierlich:**

$$h_{-1,TP}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h_{0,TP}(\tau) d\tau.$$

□ **diskret:**

$$h_{-1,TP}(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n h_{0,TP}(\kappa).$$

Auch hier erkennt man wieder, dass eine Bandbegrenzung zu einer „**Signal-Verbreiterung**“ bzw. zu einer zeitlichen „**Verschmierung**“ führt (die ursprünglich unendlich steile Sprungfunktion besitzt am Systemausgang nur noch eine endlich steilen Anstieg).



Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 5:

Die zeitliche „**Verschmierung**“ kann man z.B. durch die „Breite“ (Zeitdauer) des Anstiegs der Sprungantwort beschreiben. Diese Anstiegszeit kann wiederum durch den Abstand der Schnittpunkte der Tangente im „steilsten“ Stück der Sprungantwort mit Geraden bei Null bzw.

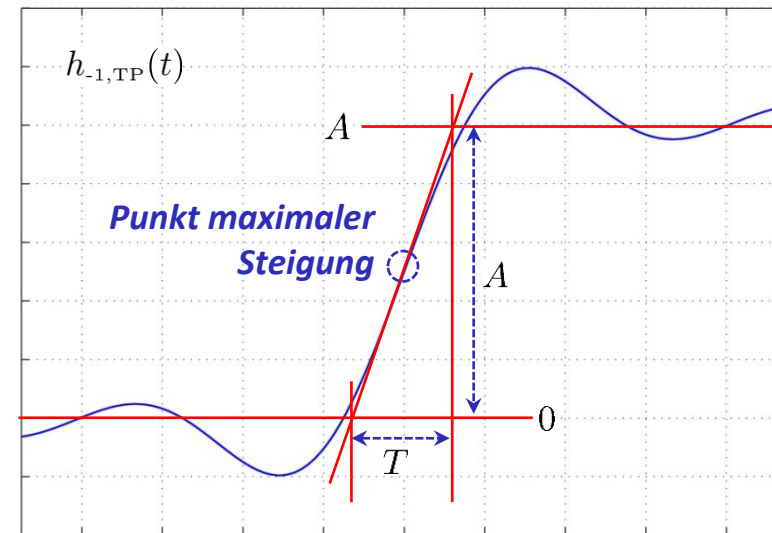
$$h_{-1}(\infty) = H(j\omega = 0) \cdot$$

Für die **Steigung der Tangente** rechts gilt:

$$\begin{aligned} \frac{A}{T} &= \max_t \left\{ \frac{d}{dt} h_{-1}(t) \right\} \\ &= \max_t \{ h_0(t) \} \\ &= h_0(t_0). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich für die **Anstiegszeit**:

$$T = \frac{A}{h_0(t_0)}.$$



Systeme mit Dämpfungsverzerrungen – Teil 14

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 6:

Im **diskreten Fall** ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}\frac{A}{K} &= \max_n \{h_{-1}(n) - h_{-1}(n-1)\} \\ &= \max_n \{h_0(n)\} \\ &= h_0(n_0).\end{aligned}$$

Damit erhält man für die **diskrete Anstiegszeit**:

$$K = \frac{A}{h_0(n_0)}.$$

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 7:

Gehen wir nun noch einmal einen Schritt zurück und betrachten das ideale Tiefpassfilter aus dem vorangegangenen Abschnitt, so können wir hier zum einen eine „normierte“ **Bandbreite** und zum anderen die **Anstiegszeiten** bestimmen:

□ **Kontinuierlich:**

□ **Diskret:**

□ **Normierte Bandbreite:**

$$B_{\text{norm}} = \frac{2\omega_g}{2\pi} = \frac{\omega_g}{\pi}$$

$$B_{\text{norm}} = \frac{2\Omega_g}{2\pi} = \frac{\Omega_g}{\pi}$$

□ **Anstiegszeit:**

$$T = \frac{A}{h_0(t_0)} = \frac{A}{A \frac{\omega_g}{\pi}} = \frac{\pi}{\omega_g}$$

$$K = \frac{A}{h_0(n_0)} = \frac{A}{A \frac{\Omega_g}{\pi}} = \frac{\pi}{\Omega_g}$$

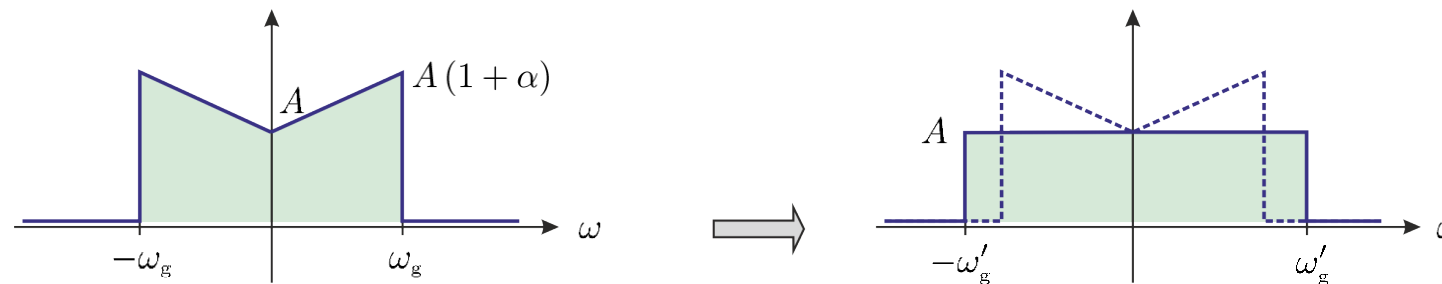
Man kann hier erkennen, dass (zumindest für das ideale Tiefpassfilter) das **Produkt aus Anstiegszeit und normierter Bandbreite** konstant ist:

$$T B_{\text{norm}} = 1,$$

$$K B_{\text{norm}} = 1.$$

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 8:

Wollen wir nun die Überlegungen der letzten Folie auch auf Tiefpassfilter mit linearem Betragsverlauf anwenden, so müssen wir zunächst eine sog. „äquivalente Rechteckbandbreite“ einführen. Diese äquivalenten Rechteckbandbreiten sind über die Flächengleichheit beider Filter definiert:



Es gilt hierbei für ...

□ **kontinuierliche Filter:**

$$\begin{aligned} \left(A + A \alpha \frac{1}{2}\right) 2\omega_g &= A 2\omega'_g \\ \omega'_g &= \omega_g \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

□ **diskrete Filter:**

$$\begin{aligned} \left(A + A \alpha \frac{1}{2}\right) 2\Omega_g &= A 2\Omega'_g \\ \Omega'_g &= \Omega_g \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 9:

Analog zum idealen Tiefpassfilter können wir nun Anstiegszeiten und normierte, äquivalente Rechteckbandbreiten für Tiefpassfilter mit linearem Betragsverlauf bestimmen:

| | | |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| | <p>□ Kontinuierlich:</p> $B_{\text{norm}} = \frac{\omega_g (1 + \alpha/2)}{\pi}$ | <p>□ Diskret:</p> $B_{\text{norm}} = \frac{\Omega_g (1 + \alpha/2)}{\pi}$ |
| <p>□ Normierte, äquivalente Bandbreite:</p> | | |
| <p>□ Anstiegszeit:</p> | $T = \frac{\pi}{\omega_g (1 + \alpha/2)}$ | $K = \frac{\pi}{\Omega_g (1 + \alpha/2)}$ |

Für das **Produkt aus Anstiegszeit und äquivalenter, normierter Bandbreite** gilt auch hier wieder:

$$T B_{\text{norm}} = 1,$$

$$K B_{\text{norm}} = 1.$$

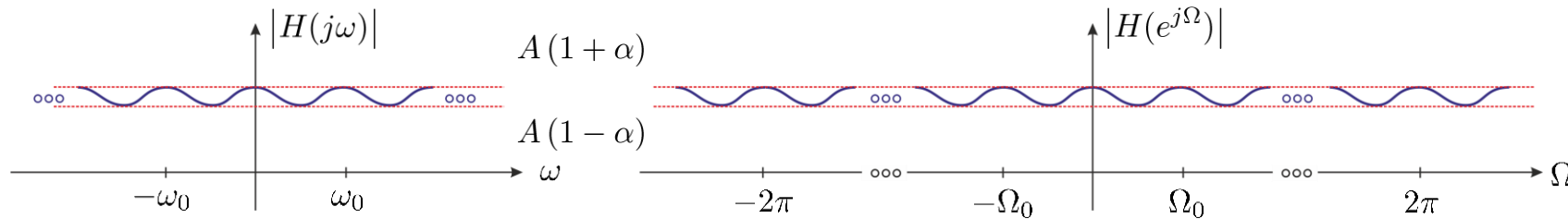
Bandbegrenzung mit linearem Betragsverlauf – Teil 10:

Anmerkungen zu den bisherigen Überlegungen:

- ❑ Ein System mit „**schneller**“ bzw. „steiler“ **Reaktion** erfordert eine **hohe Bandbreite**. Dies kann entweder „unmittelbar“ geschehen oder „äquivalent“ durch Anheben hoher Frequenzen.
- ❑ Andererseits zeigt sich aus den bisherigen Überlegungen, dass eine Verstärkung hoher Frequenzen zu verstärkten Oszillationen bzw. **Überschwingen** der Impuls- bzw. Sprungantworten führt (dies ist in vielen Anwendungen unerwünscht). Abhilfe schafft hier ein **Absenken hoher Frequenzen**, wodurch das System wiederum langsam wird. Ein Kompromiss ist hier eine Erhöhung der realen Bandbreite bei gleichzeitiger Absenkung der hohen Frequenzen.

Betragsschwankungen – Teil 1:

Auch in den im folgenden angestellten Überlegungen gehen wir von einem linearen Phasengang aus. Für einige Anwendungen (z.B. in der HiFi-Technik) ist ein konstanter Betragsfrequenzgang erwünscht, real ist dies aber meist nicht erreichbar. Vielmehr sind kleinere Abweichungen oft zu beobachten. Wir wollen solche Abweichungen hier nun vereinfachend als Cosinus-förmige Schwankungen modellieren.



Solche Frequenzgänge kann man wie folgt beschreiben:

□ **kontinuierlich:**

$$H(j\omega) = A \left[1 + \alpha \cos \left(2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right] e^{-j\omega t_0}.$$

□ **diskret:**

$$H(e^{j\Omega}) = A \left[1 + \alpha \cos \left(2\pi \frac{\Omega}{\Omega_0} \right) \right] e^{-j\Omega n_0}.$$

Betragsschwankungen – Teil 2:

Um die zugehörigen Impulsantworten zu bestimmen, **vernachlässigen** wir zunächst den **linearen Phasenterm**, d.h. wir bestimmen zunächst für das kontinuierliche System folgende Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0(t) &= A \mathcal{F}^{-1} \left\{ 1 + \alpha \cos \left(2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right\} \\ &\quad \dots \text{verwenden von } \cos(x) = 1/2 (e^{jx} + e^{-jx}) \dots \\ &= A \mathcal{F}^{-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2} e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_0}} + \frac{\alpha}{2} e^{-j2\pi \frac{\omega}{\omega_0}} \right\} \\ &\quad \dots \text{Rücktransformation von komplexen Schwingungstermen ...} \\ &= A \delta_0(t) + A \frac{\alpha}{2} \left[\delta_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0} \right) + \delta_0 \left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wendet man nun noch den linearen Phasenterm an (entspricht einer Verschiebung im Zeitbereich), so erhält man für die **Impulsantwort**:

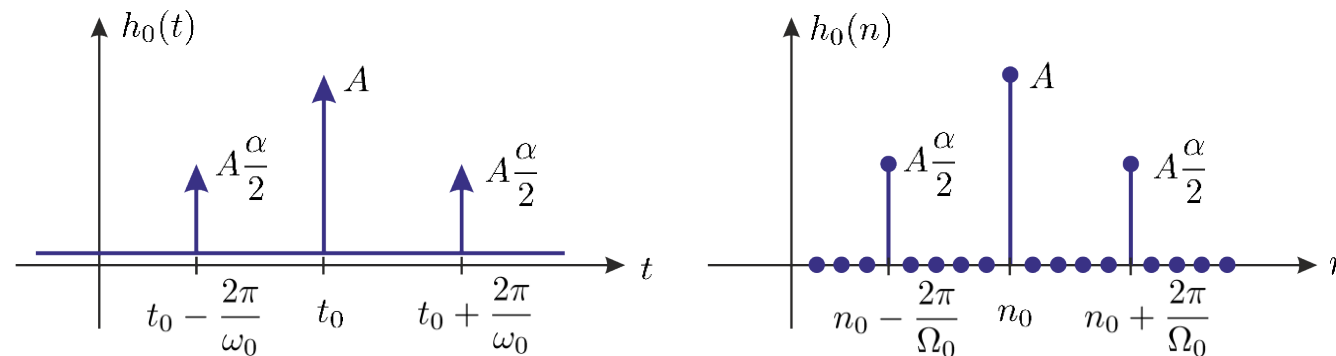
$$h_0(t) = A \delta_0(t - t_0) + A \frac{\alpha}{2} \left[\delta_0 \left(t - t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0} \right) + \delta_0 \left(t - t_0 - \frac{2\pi}{\omega_0} \right) \right].$$

Betragschwankungen – Teil 3:

Auf nahezu die gleiche Weise erhält man die **Impulswort für diskrete Systeme**:

$$h_0(n) = A \gamma_0(n - n_0) + A \frac{\alpha}{2} \left[\gamma_0\left(n - n_0 + \frac{2\pi}{\Omega_0}\right) + \gamma_0\left(n - n_0 - \frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \right].$$

In beiden Fällen ergibt sich ein sog. Hauptimpuls bei $t = t_0$ bzw. $n = n_0$ und zwei „**Neben-**“ bzw. „**Echoimpulse**“ jeweils um $2\pi/\omega_0$ bzw. $2\pi/\Omega_0$ nach dem Hauptimpuls. Die Frequenz der Betragsfrequenzgangsschwingung bestimmt dabei den Abstand der Nebenimpulse, die Größe der maximalen Betragsabweichung geht in die Höhe der Neben- bzw. Echoimpulse ein.



Betragsschwankungen – Teil 4:

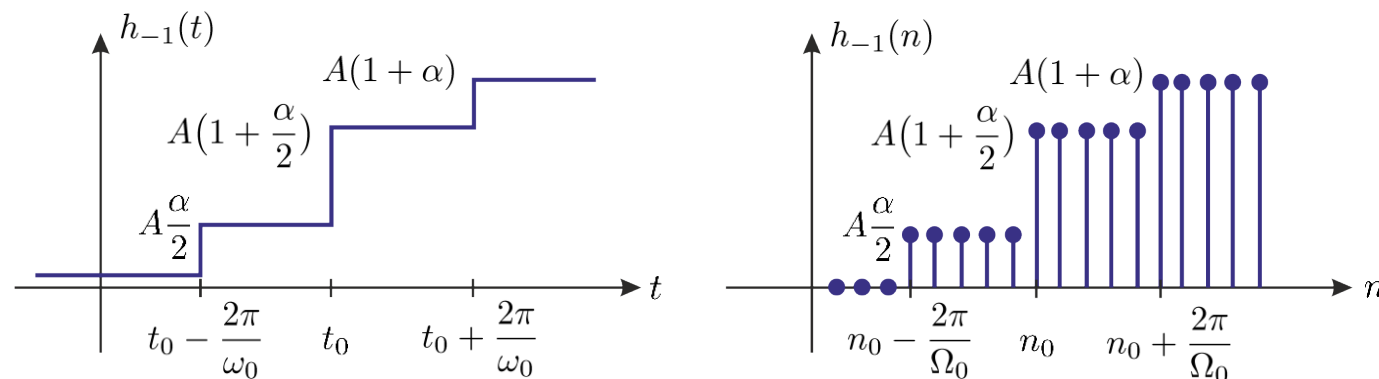
Die zugehörigen **Sprungantworten** ergeben sich durch Integration bzw. Summation der entsprechenden Impulsantworten.
Für **kontinuierliche** Systeme ergibt sich:

$$h_{-1}(t) = A \delta_{-1}(t - t_0) + A \frac{\alpha}{2} \left[\delta_{-1}\left(t - t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \delta_{-1}\left(t - t_0 - \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \right].$$

Entsprechend gilt für den **zeitdiskreten** Fall:

$$h_{-1}(n) = A \gamma_{-1}(n - n_0) + A \frac{\alpha}{2} \left[\gamma_{-1}\left(n - n_0 + \frac{2\pi}{\Omega_0}\right) + \gamma_{-1}\left(n - n_0 - \frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \right].$$

Skizze der Sprungantworten:



Systeme mit Dämpfungsverzerrungen – Teil 23

Betragschwankungen – Teil 5:

Abschließende **Bemerkungen:**

- Jedes Signal $v(t)$ bzw. $v(n)$ tritt bei diesen Systemen am Ausgang „unverzerrt“ (abgesehen von einer Verzögerung und einer Gewichtung) auf, sowie einmal „davor“ und einmal „danach“ im Abstand $2\pi/\omega_0$ bzw. $2\pi/\Omega_0$. Der zeitliche Abstand ist proportional zum Inversen der Schwankungsfrequenz.
- Bei hinreichend großem Wert α werden die „**Echos**“ in einer Hifi-Anwendung **hörbar**.

Allgemeine Betragsverzerrungen bei reellwertigen Systemen – Teil 1:

Setzen wir wieder eine **lineare Phase** voraus, so gilt für die Frequenzgänge

$$H(j\omega) = H_0(\omega) e^{-j\omega t_0},$$

$$H(e^{j\Omega}) = H_0(\Omega) e^{-j\Omega n_0}.$$

Fordern wir nun zusätzlich noch, dass die zugehörigen **Impulsantworten reellwertig** sind

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} \in \mathbb{R},$$

$$h_0(n) = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\Omega})\} \in \mathbb{R},$$

so erfordert dies gemäß unseren Überlegungen aus dem ersten Teil der Vorlesung folgende **Symmetrie im Frequenzbereich**:

$$H_0(\omega) = H_0^*(-\omega) \in \mathbb{C},$$

$$H_0(\Omega) = H_0^*(-\Omega) \in \mathbb{C}.$$

Die linearen **Phasenterme** $e^{-j\omega t_0}$ bzw. $e^{-j\Omega n_0}$ brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden, da diese lediglich zu einer Verschiebung der Impulsantworten im Zeitbereich beitragen.

Allgemeine Betragsverzerrungen bei reellwertigen Systemen – Teil 2:

Der Phasenbeitrag der Terme $H_0(\omega)$ bzw. $H_0(\Omega)$ kann gemäß

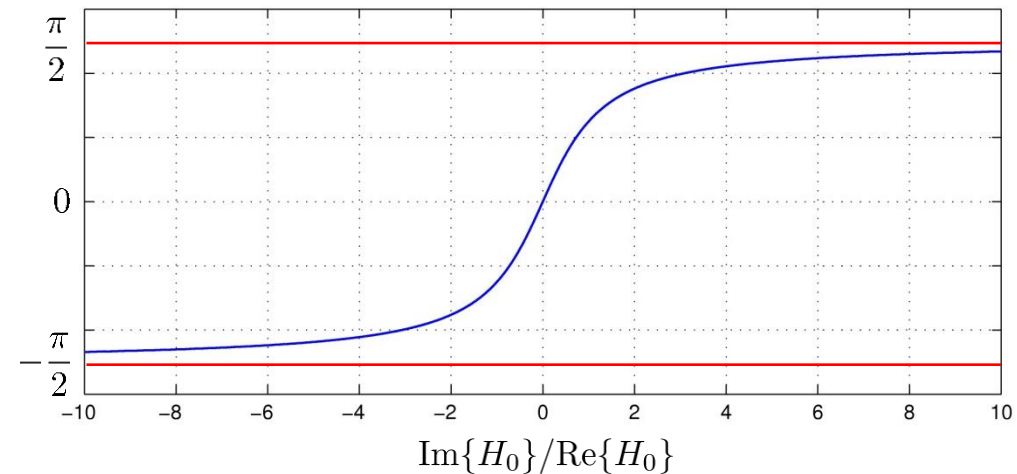
$$\arg\{H_0(\omega)\} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{H_0(\omega)\}}{\text{Re}\{H_0(\omega)\}}\right),$$

$$\arg\{H_0(\Omega)\} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{H_0(\Omega)\}}{\text{Re}\{H_0(\Omega)\}}\right),$$

angegeben werden. Da die Gesamtphase aber linear verlaufen soll, dürfen $\arg\{H_0(\omega)\}$ bzw. $\arg\{H_0(\Omega)\}$ den Gesamtphasenverlauf nicht beeinflussen.

Dies kann auf **zwei Weisen** geschehen:

- $\arg\{H_0(\dots)\} = 0,$
- $\arg\{H_0(\dots)\} = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\omega, \Omega).$



Allgemeine Betragsverzerrungen bei reellwertigen Systemen – Teil 3:

Da zusätzlich noch die Symmetrie

$$H_0(\omega) = H_0^*(-\omega),$$

$$H_0(\Omega) = H_0^*(-\Omega),$$

gelten muss folgt damit für die **erste Lösung**, d.h. $\arg\{H_0(\dots)\} = 0$, dass

$$H_0(\dots) \in \mathbb{R}, \text{ gerade in } \omega, \Omega.$$

Damit gilt für die **Rücktransformierte** (siehe ersten Teil der Vorlesung)

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_0(\omega)\} \in \mathbb{R}, \text{ gerade in } t,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_0(\Omega)\} \in \mathbb{R}, \text{ gerade in } n.$$

Beachtet man noch die zusätzliche **Phasendrehung** (Verschiebung im Zeitbereich), so erhält man

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_0(\omega) e^{-j\omega t_0}\} = h_0(t) \in \mathbb{R}, \text{ gerade in } (t - t_0),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_0(\Omega) e^{-j\Omega n_0}\} = h_0(n) \in \mathbb{R}, \text{ gerade in } (n - n_0).$$

Allgemeine Betragsverzerrungen bei reellwertigen Systemen – Teil 4:

Die Impulsantwort für die **erste Lösung** ist reell und gerade-symmetrisch zum Zeitpunkt t_0 bzw. n_0 . Es gilt also:

$$\begin{aligned}h_0(t_0 - t') &= h_0(t_0 + t'), \\h_0(n_0 - n') &= h_0(n_0 + n').\end{aligned}$$

Für die zweite Lösung gilt, dass $H_0(\dots)$ rein imaginär ist und gerade in ω bzw. Ω . Hier gilt dann für die Rücktransformierten

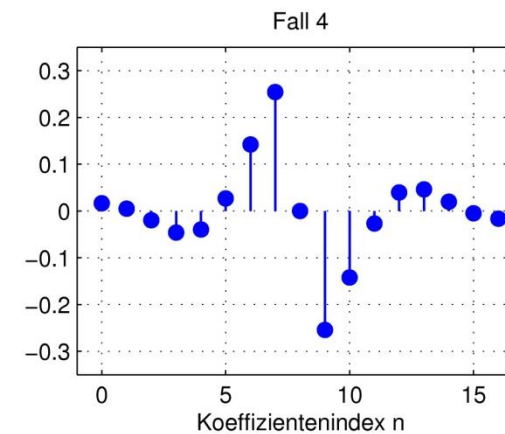
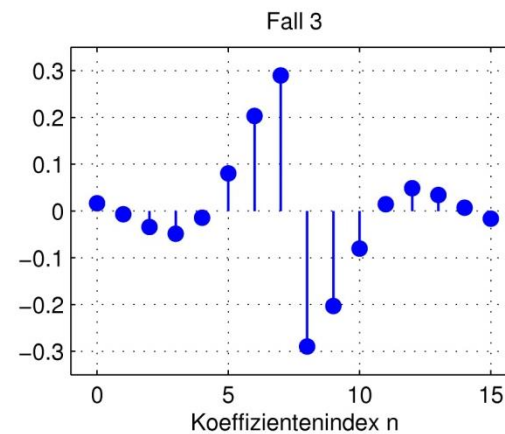
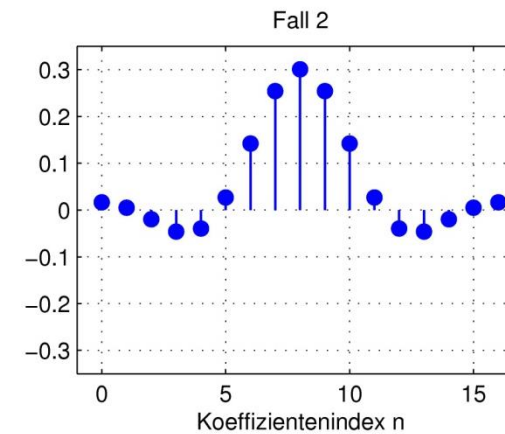
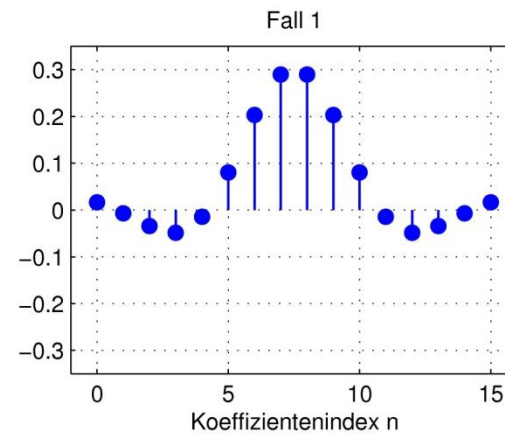
$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{H_0(\omega)\} &\in \mathbb{R}, \text{ ungerade in } t, \\ \mathcal{F}^{-1}\{H_0(\Omega)\} &\in \mathbb{R}, \text{ ungerade in } n.\end{aligned}$$

Nach Anwendung der Phasendrehung (Verschiebung im Zeitbereich) und unter Beachtung der einzelnen Symmetriepaarungen ergibt sich als **zweite Lösung**:

$$\begin{aligned}h_0(t_0 - t') &= -h_0(t_0 + t'), \\h_0(n_0 - n') &= -h_0(n_0 + n').\end{aligned}$$

Allgemeine Betragsverzerrungen bei reellwertigen Systemen – Teil 5:

Für diskrete linear-phasige Filter gibt es vier Realisierungsmöglichkeiten (siehe Beispiel rechts).



Hilbert-Transformation – Teil 1:

Als **Hilbert-Transformation** wird ein Sonderfall eines idealisierten, linearphasigen Systems mit besonderer Bedeutung bzw. Anwendung bezeichnet. Ein solches Filter besitzt folgenden Frequenzgang:

□ (**kontinuierlich**)

$$H(j\omega) = H_0(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

mit

$$H_0(\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega).$$

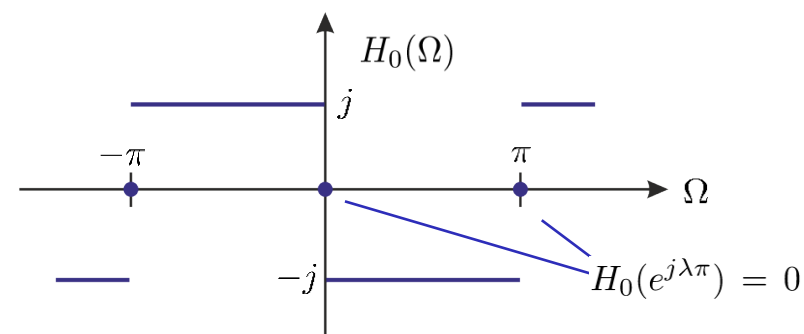
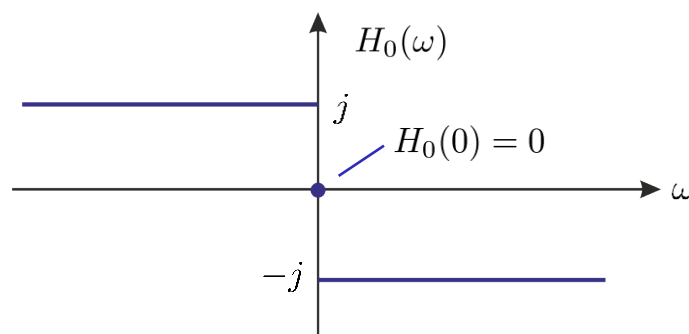
□ (**diskret**)

$$H(e^{j\Omega}) = H_0(\Omega) e^{-j\Omega n_0}$$

mit

$$H_0(\Omega) = -j \operatorname{sign}(\operatorname{mod}(\Omega + \pi, 2\pi) - \pi).$$

Skizze:



Hilbert-Transformation – Teil 2:

Für den Betragsfrequenzgang solcher Filter gilt

□ (**kontinuierlich**):

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= |H_0(\omega)| \\ &= |-j \operatorname{sign}(\omega)| \\ &= 1 \quad \forall \omega \neq 0. \end{aligned}$$

□ (**diskret**):

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})| &= |H_0(\Omega)| \\ &= |-j \operatorname{sign}(\operatorname{mod}(\Omega + \pi, 2\pi) - \pi)| \\ &= 1 \quad \forall \Omega \neq \lambda\pi. \end{aligned}$$

Man kann erkennen, dass $H(j\omega)$ bzw. $H(e^{j\Omega})$ **fast linearphasige Allpassfilter** beschreiben. Aufgrund der Sprünge bei $\omega = 0$ bzw. $\Omega = \lambda\pi$ sind diese Filter aber **nicht verzerrungsfrei**.

Insgesamt bewirken die Filter $H(j\omega)$ bzw. $H(e^{j\Omega})$ eine **konstante Phasendrehung** um $\pm 90^\circ$ mit einem **Phasensprung** in $\omega = 0$ bzw. $\Omega = \lambda\pi$ um 180° (sowie eine lineare Phase, d.h. eine Verzögerung).

Hilbert-Transformation – Teil 3:

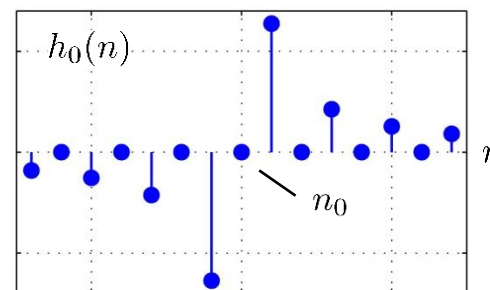
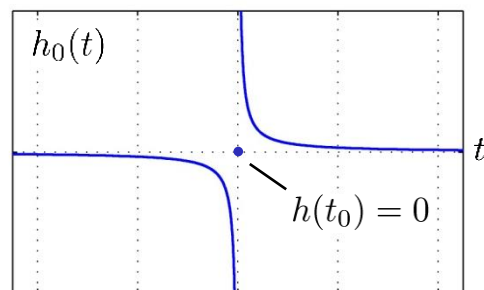
Durch Rücktransformation (diese ist nicht trivial) ergeben sich die kontinuierliche bzw. diskrete **Impulsantwort**

□ (**kontinuierlich**):

$$h_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(t-t_0)}, & \text{falls } t - t_0 \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

□ (**diskret**):

$$h_0(n) = \begin{cases} \frac{1 - (-1)^{n-n_0}}{\pi(n-n_0)}, & \text{falls } n - n_0 \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Hilbert-Transformation – Teil 4:

Die Bedeutung der Filter $H(j\omega)$ bzw. $H(e^{j\Omega})$ wird klarer (man beachte vor allem die nächste Folie), wenn man sie auf ein Signal $v(t)$ bzw. $v(n)$ anwendet:

□ (kontinuierlich):

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v(t) * h_0(t) \\ \tilde{V}(j\omega) &= -V(j\omega) j \operatorname{sign}(\omega) e^{-j\omega t_0}. \end{aligned}$$

□ (diskret):

$$\begin{aligned} \tilde{v}(n) &= v(n) * h_0(n) \\ \tilde{V}(e^{j\Omega}) &= -V(e^{j\Omega}) j \operatorname{sign}(\operatorname{mod}(\dots) - \pi) e^{-j\Omega n_0}. \end{aligned}$$

Addiert man nun das verzögerte Originalsignal und den mit der imaginären Einheit multiplizierten Filterausgang (unter Vernachlässigung der Verzögerung), so ergibt sich das sog. analytische Signal

□ (kontinuierlich):

$$v_a(t) = v(t) + j \tilde{v}(t + t_0).$$

□ (diskret):

$$v_a(n) = v(n) + j \tilde{v}(n + n_0).$$

Hilbert-Transformation – Teil 5:

Für die Spektren dieser analytischen Signale erhält man schließlich

□ (*kontinuierlich*):

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= v(t) + j \tilde{v}(t + t_0) \\
 &\quad \circ \\
 &\quad \downarrow \\
 V_a(j\omega) &= V(j\omega) + j \tilde{V}(j\omega) e^{j\omega t_0} \\
 &= V(j\omega) [1 + \text{sign}(\omega)] \\
 &= \begin{cases} 2V(j\omega), & \text{falls } \omega > 0, \\ V(0), & \text{falls } \omega = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□ (*diskret*):

$$\begin{aligned}
 v_a(n) &= v(n) + j \tilde{v}(n + n_0) \\
 &\quad \circ \\
 &\quad \downarrow \\
 V_a(e^{j\Omega}) &= V(e^{j\Omega}) + j \tilde{V}(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n_0} \\
 &= V(e^{j\Omega}) [1 + \text{sign}(\Omega)] \\
 &= \begin{cases} 2V(e^{j\Omega}), & \text{falls } \Omega \in (0, \pi), \\ V(e^{j0}), & \text{falls } \Omega = 0, \\ 0, & \text{falls } \Omega \in (-\pi, 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

... periodisch fortgesetzt ...

Das analytische Signal besitzt ein *einseitiges Spektrum*! Dies ist in einigen Anwendungen sehr nützlich.

Hilbert-Transformation – Teil 6:

Das für die partielle spektrale Auslöschung notwendige Signal $\tilde{v}(t + t_0)$ bzw. $\tilde{v}(n + n_0)$ wird **Hilbert-Transformierte** $\mathcal{H}\{v(t)\}$ bzw. $\mathcal{H}\{v(n)\}$ genannt. Üblicherweise lässt man dazu die Verzögerung (d.h. den linearen Phasenterm) weg, d.h. wir setzen $t_0 = 0$ bzw. $n_0 = 0$. Es gilt für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$\mathcal{H}\{v(t)\} = v(t) * h_0(t)|_{t_0=0} = v(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t - \tau)} v(\tau) d\tau.$$

□ ... diskrete Signale:

$$\mathcal{H}\{v(n)\} = v(n) * h_0(n)|_{n_0=0} = v(n) * \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{n-\kappa}}{\pi(n - \kappa)} v(\kappa).$$

Dieser **Zusammenhang** kann auf einfache Weise (siehe nächste Folie) **umgekehrt** werden. Es gilt:

$$\mathcal{H}\left\{ \mathcal{H}\{v(t)\} \right\} \Big|_{V(0)=0} = -v(t),$$

$$\mathcal{H}\left\{ \mathcal{H}\{v(n)\} \right\} \Big|_{V(1)=0} = -v(n).$$

Hilbert-Transformation – Teil 7:

Zum Verstehen der Umkehrung der Hilbert-Transformation kann man z.B. den Zusammenhang zwischen dem Eingangssignalspektrum und dem Spektrum des Hilbert-transformierten Signals näher untersuchen.

Es gilt hier für kontinuierliche Signale

$$\tilde{V}(j\omega) = V(j\omega) (-j \operatorname{sign}(\omega))$$

... beide Seiten vertauschen und durch die Klammer mit der sign-Funktion dividieren ...

$$V(j\omega) = \frac{\tilde{V}(j\omega)}{-j \operatorname{sign}(\omega)}$$

... den Zähler mit 1 erweitern, um das „j“ im Nenner kürzen zu können ...

$$V(j\omega) = \frac{\tilde{V}(j\omega) \overbrace{(-j)j}^1}{-j \operatorname{sign}(\omega)}$$

... kürzen ...

$$V(j\omega) = j \frac{\tilde{V}(j\omega)}{\operatorname{sign}(\omega)}$$

... verwenden, dass eine Multiplikation mit der sign-Funktion gleich einer Division ist (mit Ausnahme an der Stelle 0) ...

$$V(j\omega) = \tilde{V}(j\omega) \Big|_{V(0)=0} (j \operatorname{sign}(\omega)).$$

Hilbert-Transformation – Teil 8:

Bis auf das Vorzeichen und die Anforderung an das Signalspektrum bei der Frequenz 0, führt die **Anwendung von zwei Hilbert-Transformationen hintereinander** somit wieder auf das gleiche Signal. Gleiches kann für diskrete Signale gezeigt werden.

Bemerkungen:

- Bestimmt man zu einem reellen Signal $v(\dots) \in \mathbb{R}$ das analytische Signal, so wird dieses komplex sein $v_a(\dots) \in \mathbb{C}$. Dabei bilden die Signale $v(\dots) = \operatorname{Re}\{v_a(\dots)\}$ und $\tilde{v}(\dots) = \operatorname{Im}\{v_a(\dots)\}$ ein **Paar von Hilbert-Transformierten**.
- Da für reelle Signale alle Informationen sowohl in der rechten als auch in der linken Hälfte des Spektrums enthalten sind

$$V(j\omega) = V^*(-j\omega),$$

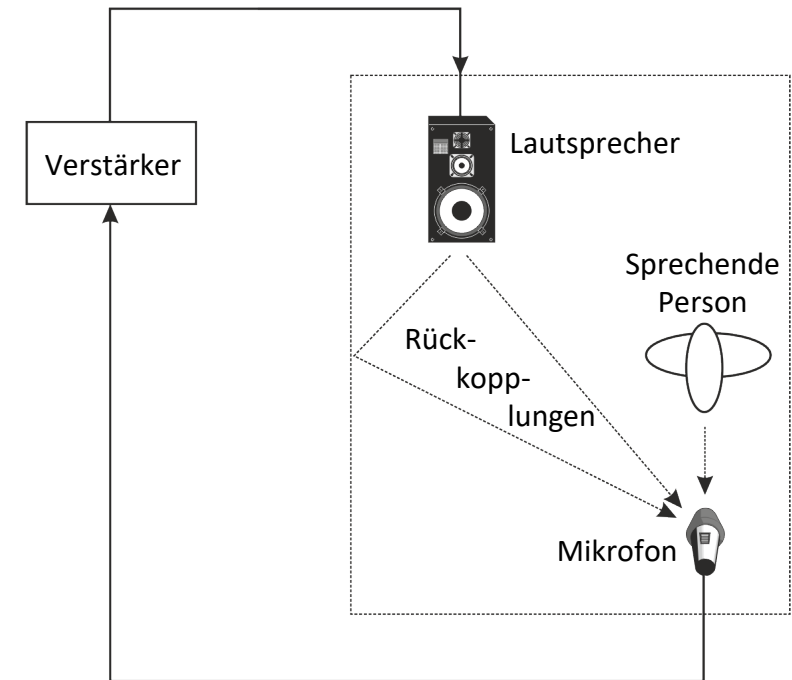
$$V(e^{j\Omega}) = V^*(e^{-j\Omega}),$$

kann durch das analytische Signal $v_a(\dots)$ das ursprüngliche Signal $v(\dots)$ vollständig beschrieben werden.

Hilbert-Transformation – Teil 9:

Als Anwendungsbeispiel für Hilbert-Transformationen in der Audiotechnik seien hier sog. *public address systems* (*Saalbeschallungsanlagen*) aufgeführt.

Hierbei wird das Signal einer sprechenden Person mittels eines Mikrofons aufgenommen und verstärkt über einen Lautsprecher wieder ausgegeben. Hierdurch wird zwar eine höhere Wiedergabelautstärke erzielt, allerdings koppelt das Lautsprechersignal auch wieder in das Mikrophon ein, so dass eine geschlossene *elektro-akustische Schleife* entsteht.

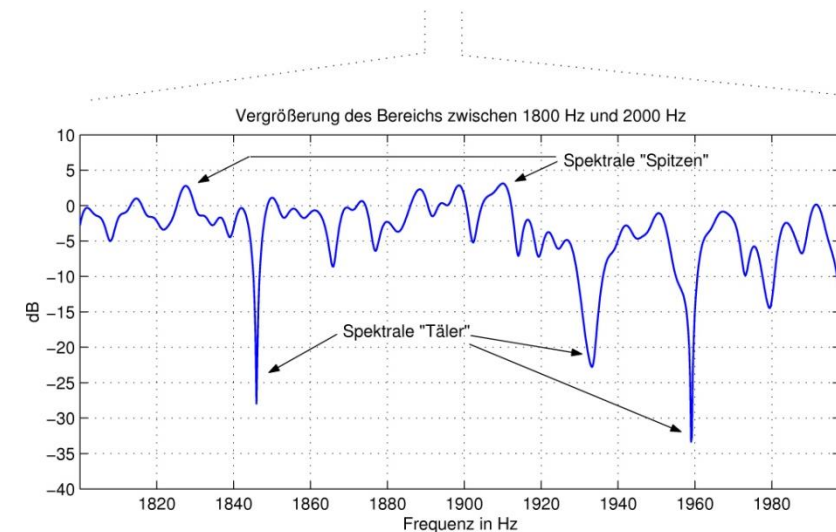
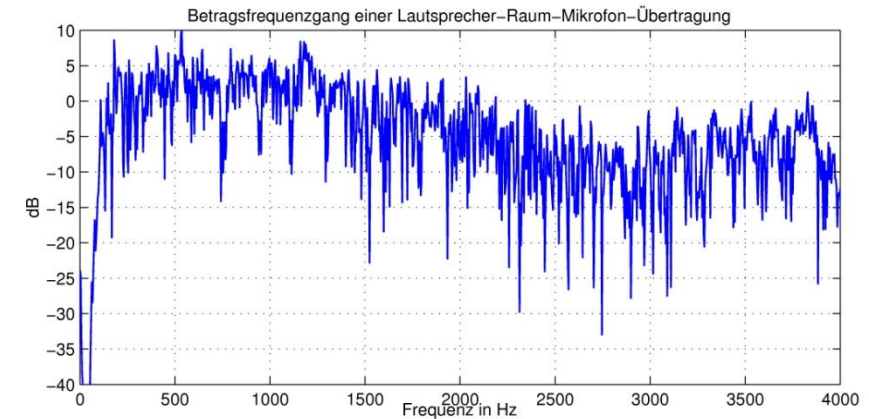


Hilbert-Transformation – Teil 10:

Die Lautsprecher-Raum-Mikrofon-Übertragung bestimmt dabei wie hoch man die Verstärkung maximal wählen darf, bevor der Kreis zu schwingen beginnt.

Gegenmaßnahmen bzw. Verbesserungen:

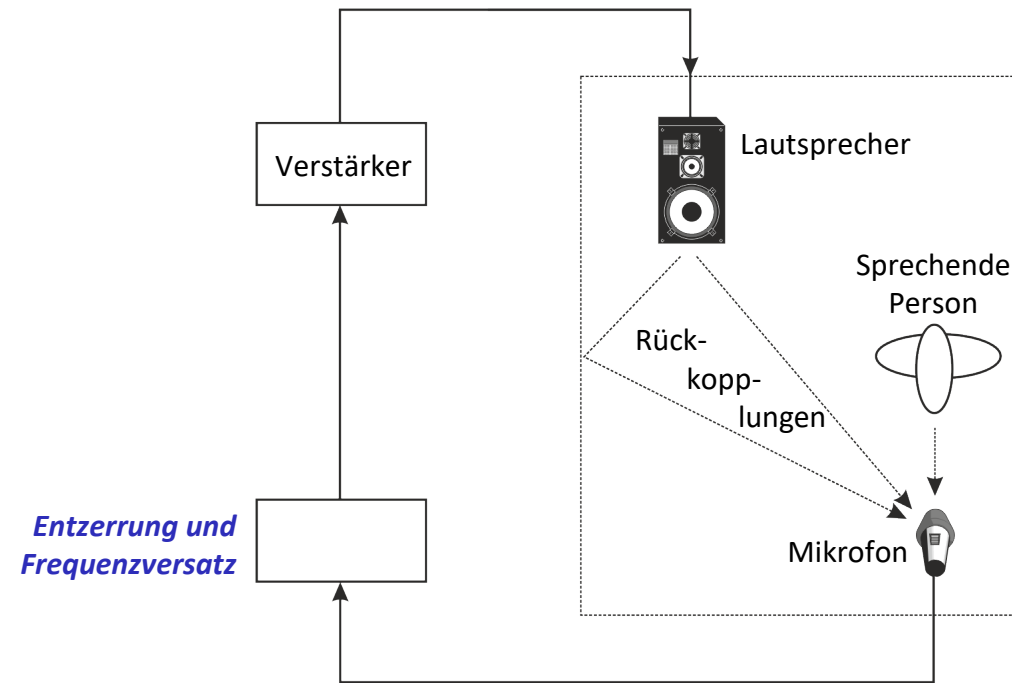
- Entzerrungsfilter
- Frequenzversatz (Hilbert-Transformation)



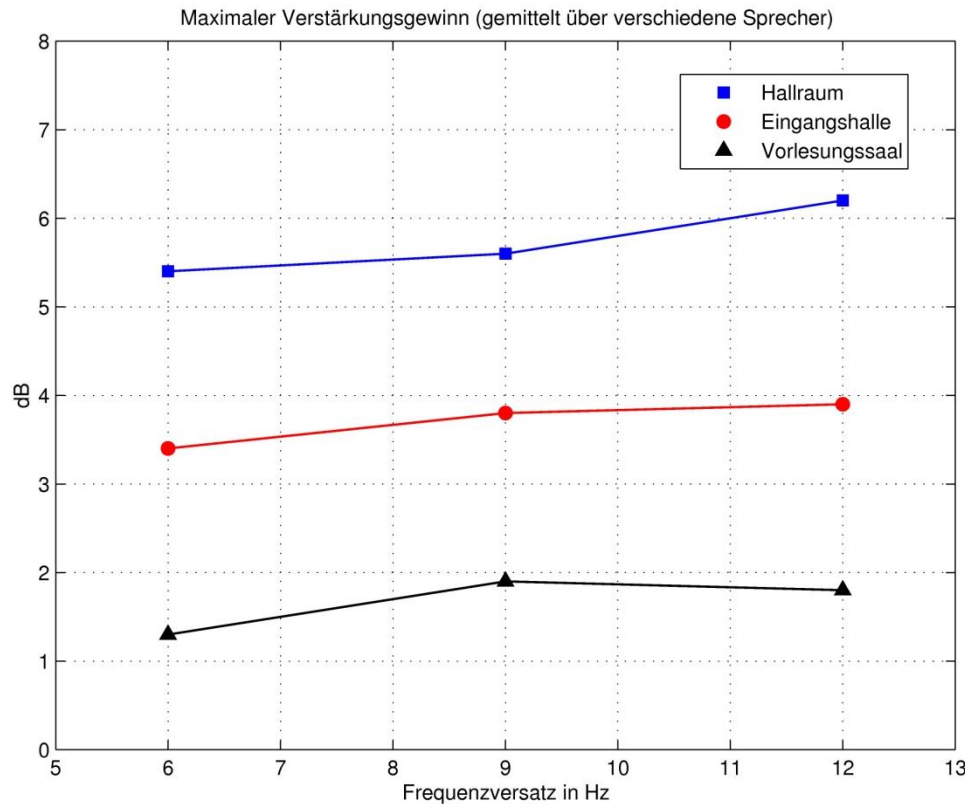
Hilbert-Transformation – Teil 11:

Durch die Entzerrung sind i. A. einige Dezibel mehr Verstärkung möglich, aber auch der Frequenzversatz hilft hier.

Zur Realisierung des Frequenzversatzes kann z.B. zunächst das analytische Signal bestimmt werden, dieses dann mit einer komplexen Exponentialschwingung moduliert werden (Frequenz ca. 3 bis 10 Hz) und anschließend wieder das „normale“ (frequenzverschobene) Signal mittels erneuter Hilbert-Transformation bestimmt werden.



Hilbert-Transformation – Teil 12:



Ergebnisse:

Je nach Raum können etwa 1 bis 6 dB Verstärkungsgewinn durch den Frequenzversatz erreicht werden.

Mit höheren Versatzfrequenzen könnte zwar noch mehr erreicht werden, hier würde man aber die Signalqualität merklich verschlechtern.



Allpassfilter – Teil 1:

Unter einem idealen verzerrungsfreien System haben wir einen konstanten Betragsfrequenzgang und einen linearen Phasenverlauf verstanden. Im Anschluss sind wir bei linearphasigen Systemen geblieben und ließen aber einen nicht-konstanten Betragsfrequenzgang zu. Nun wollen wir dies umkehren, d.h. wir untersuchen nun **Systeme mit einem konstanten Betrags-Frequenzgang und einem nichtlinearen Phasenverlauf**, d.h.

□ (**kontinuierlich**):

$$H(j\omega) = A e^{jb(\omega)}$$

mit

$$b(\omega) = -\arg\{H(j\omega)\} \neq \omega t_0.$$

□ (**diskret**):

$$H(e^{j\Omega}) = A e^{jb(\Omega)}$$

mit

$$b(\Omega) = -\arg\{H(e^{j\Omega})\} \neq \Omega n_0.$$

Solche nicht-linearphasigen **Allpassfilter** beeinflussen (nur) die Phasenbeziehungen, d.h. die **zeitliche Zuordnung der Spektralkomponenten eines Eingangssignals**.

Partnerarbeit – Teil 1:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Welche Anwendungen können Sie sich vorstellen, für die ein ideales Tiefpassfilter im Rahmen einer „Ideal“-Spezifikation vorkommen könnte?

.....
.....
.....

- Was wird aus einem idealen Tiefpassfilter, wenn Sie die Grenzfrequenz gegen ∞ (für kontinuierliche Filter) bzw. gegen π (für diskrete Filter) streben lassen?

.....
.....
.....

Abschließende Verständnisfragen – Teil 2

Partnerarbeit – Teil 2:

- Für welche Anwendungen können linearphasige Filter notwendig sein?

.....
.....
.....

- Welche Probleme bestehen, wenn Sie eine Hilbert-Transformation „praktisch“ durchführen wollen?

.....
.....
.....

Abschließende Zusammenfassung

- ...
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- ***Idealisierte Systeme***
 - ***Grundlagen und Hintergrund***
 - ***Verzerrungsfreie Systeme***
 - ***Dämpfungsverzerrungen***
 - ***Phasenverzerrungen***
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen